Лекція 7. Графи.

§1 Способи представлення графів

- ***Графічне задання*** – відображення графа за допомогою точок і ліній;
- ***Матриця суміжності*** - ефективна для насичених графів;
- ***Матриця інцидентності*** – ефективний для розріджених графів;
- ***Список суміжних вершин*** – ефективний для розріджених графів;
- ***Список ребер*** – ефективний для розріджених графів.

1.1 Матриця суміжності

Матрицею суміжності графа G , яка відповідає заданій нумерації вершин, називають булеву квадратну матрицю А з елементами a_{ij}(i,j =1,..., n,) де

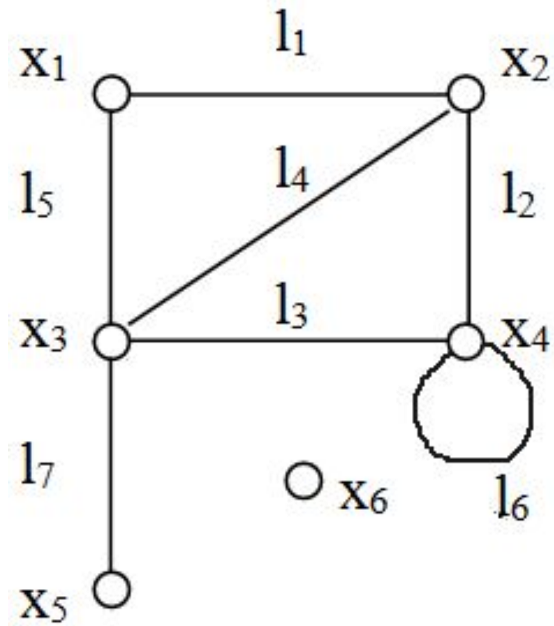
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \left\{v_i, v_j\right\} \in E, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Для неорієнтованого графа матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі.

Властивості:

- Об'єм необхідної пам'яті O(|V^2 |).
- Швидке визначення присутності ребра (i,j) в графі.
- За час O(1) отримуємо доступ до елементу a_{ij} матриці.

Для заданого графу побудувати матрицю суміжності.

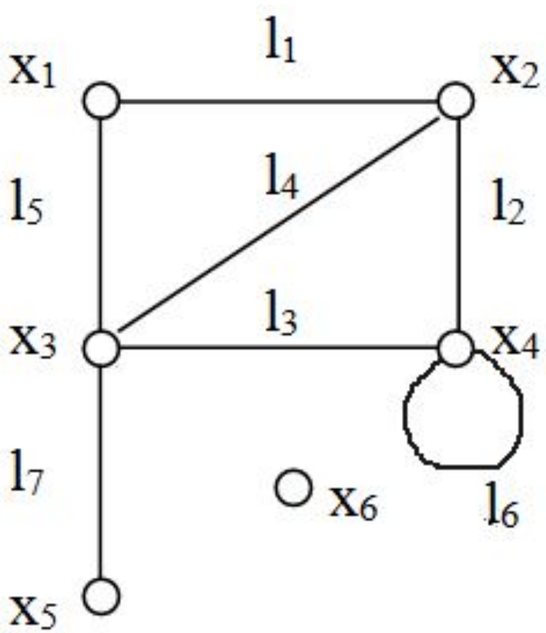


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Матриця інцидентності

Матрицею інцидентності (або матрицею інциденцій) неорієнтованого графу G називається матриця m×n $B = (b_{ij})$, у якої

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є інцидентна до ребра } \boldsymbol{u}_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ не є інцидентна до ребра } \boldsymbol{u}_j. \end{cases}$$

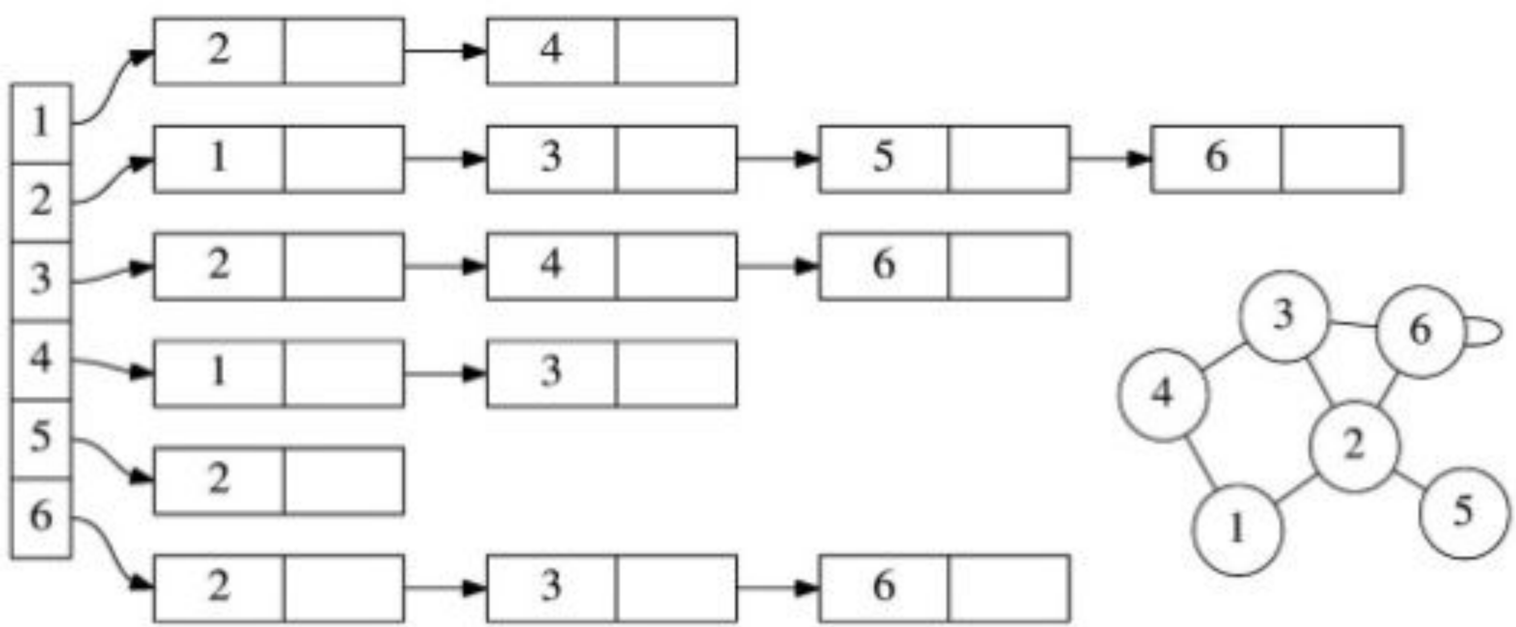


$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} l1 & l2 & l3 & l4 & l5 & l6 & l7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{array}$$

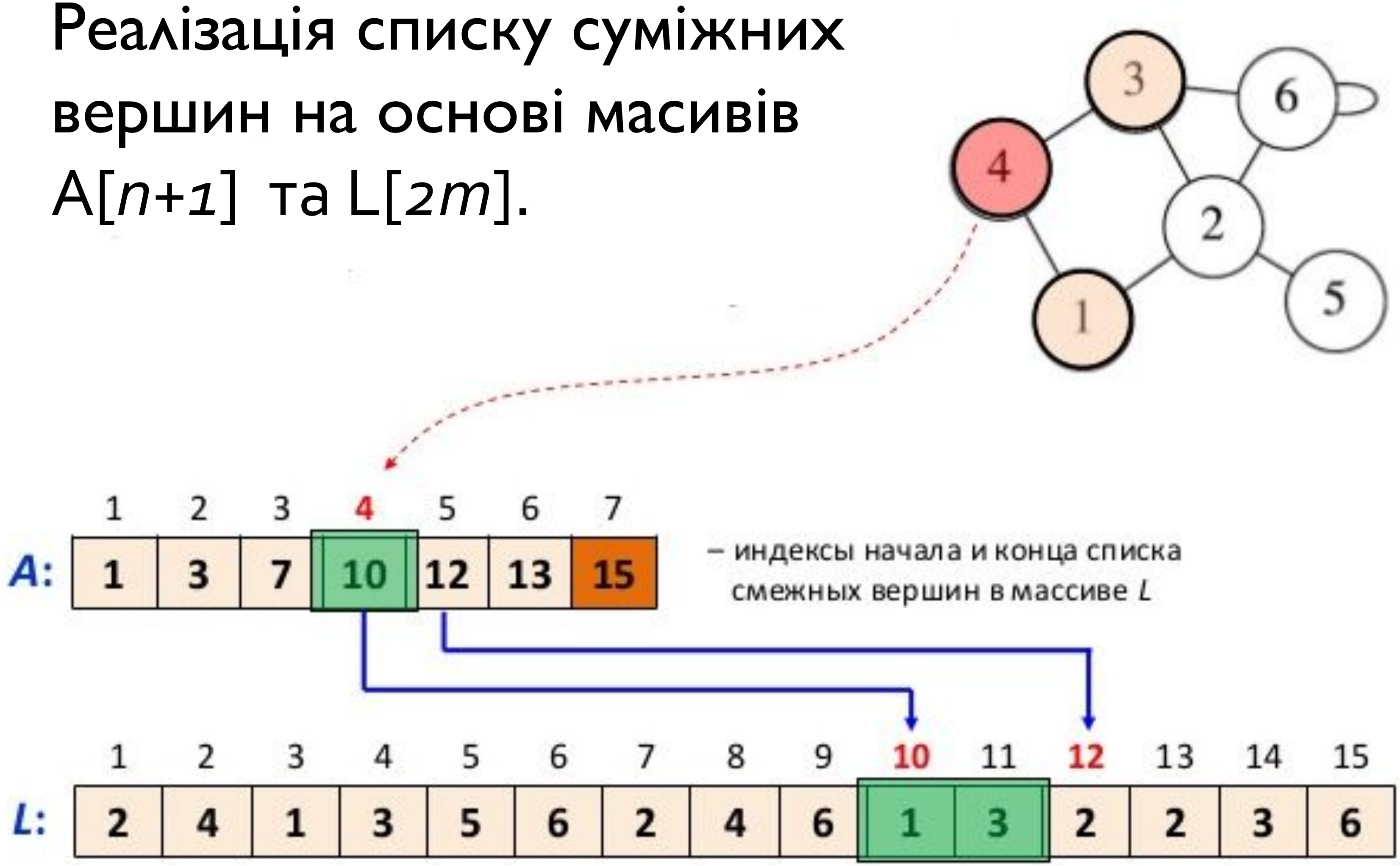
1.3 Список суміжних вершин

Список суміжних вершин – це масив A[*n*], кожен елемент A[*i*] якого містить список вузлів суміжних з вершиною *і*.

A= {(1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (5,2), (6,2), (6,3), (6,6)}



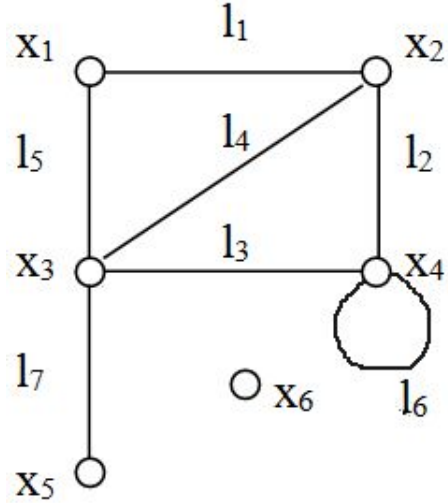
Реалізація списку суміжних вершин на основі масивів A[*n+1*] та L[*2m*].



1.4 Список ребер

Пара [*u*, *v*] відповідає ребру {*u*, *v*}, якщо граф неорієнтований, і дузі (*u*, *v*), якщо граф орієнтований.

Об'єм пам'яті у випадку представлення графа списком ребер дорівнює *2m* (*m* - кількість ребер або дуг) - це найекономніший щодо пам'яті спосіб. Недолік - велика (порядку *m*) кількість кроків для знаходження множини вершин, до яких ідуть ребра або дуги із заданої вершин.



$l_1(x_1,x_2)$
$l_2(x_2,x_4)$
$l_3(x_3,x_4)$
$l_4(x_2,x_3)$
$l_5(x_1,x_3)$
$l_6(x_4,x_4)$
$l_7(x_3,x_5)$

§2 Маршрути, ланцюги та цикли

Нехай $G = (X, U)$ – скінченний неорієнтований граф.

Скінчена послідовність вершин та ребер графа $\boldsymbol{x_0}\ \boldsymbol{u_1 x_1}\ \boldsymbol{u_2}\ \boldsymbol{x_2} \ldots \boldsymbol{x_{k-1} u_k}\ \boldsymbol{x_k}$, в якій кожне ребро $\boldsymbol{u_k}$ є ребро, яке з'єднує вершини $\boldsymbol{x_{k-1}}$ та $\boldsymbol{x_k}$, називається ***маршрутом*** на графі G.

Маршрут з'єднує вершини $\boldsymbol{x_0}$ та $\boldsymbol{x_k}$.
Число k називають ***довжиною маршруту***, тобто це кількість ребер, які входять до маршруту.

Маршрут називають ***замкненим***, якщо $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_k}$.

Маршрут, в якому всі ребра є різні, називають ***ланцюгом***.

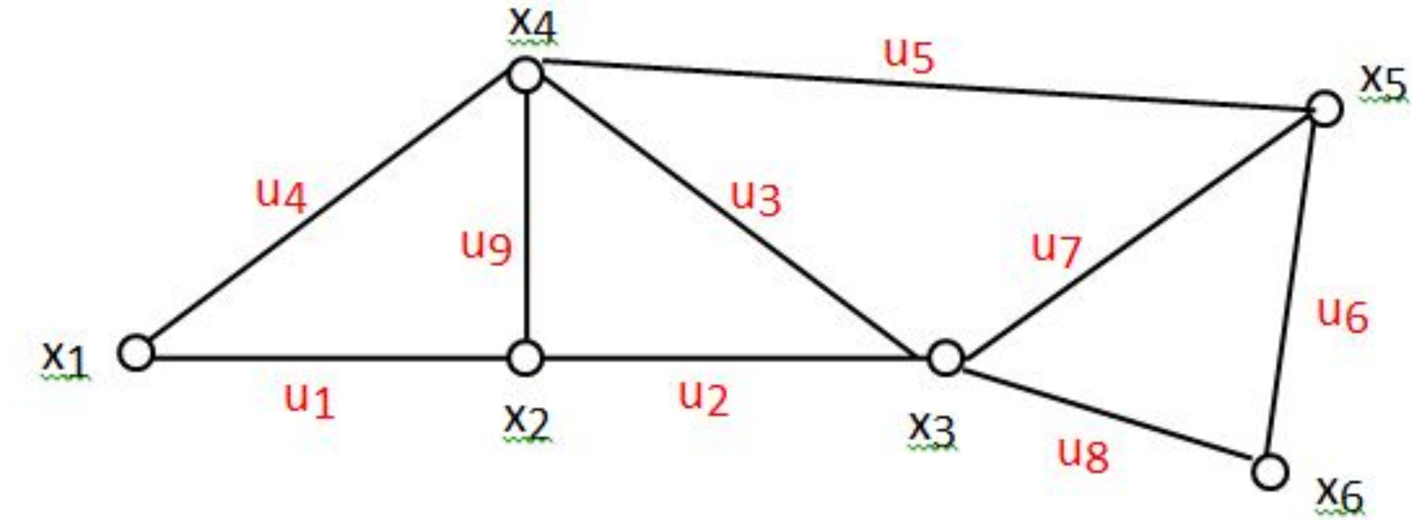
Замкнений ланцюг називають ***циклом.***

Ланцюг називають ***простим***, якщо всі його вершини є різні.

Простий цикл – це цикл, у якому всі вершини, окрім першої та останньої, є різні.

Граф без циклів називається ***ациклічним***, в іншому разі граф називається ***циклічним***.

Кожна вершина з’єднується сама з собою маршрутом довжини **0** і цей маршрут є простим циклом. Такий цикл називають ***нульовим*** (якщо сказано просто цикл, то мається на увазі, що він ***не є нульовий***).



Маршрут – $x_1\ u_1\ x_2\ u_1\ x_1\ u_4\ x_4\ u_3\ x_3\ u_3\ x_4\ u_5\ x_5$

Ланцюг (всі ребра різні) – $x_1\ u_4\ x_4\ u_9\ x_2\ u_2\ x_3\ u_3\ x_4\ u_5\ x_5$

Простий ланцюг (всі ребра і вершини різні) – $x_1\ u_4\ x_4\ u_9\ x_2\ u_2\ x_3\ u_7\ x_5$

Цикл – $x_1\ u_1\ x_2\ u_9\ x_4\ u_3\ x_3\ u_7\ x_5\ u_5\ x_4\ u_4\ x_1$

Простий цикл – $x_1\ u_4\ x_4\ u_9\ x_2\ u_1\ x_1$

§3 Орієнтовані графи

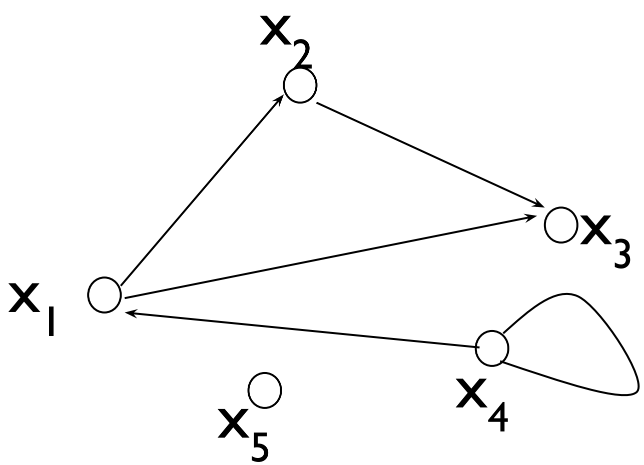
Поняття ***орієнтованого*** графа (***орграфа***) виникає, якщо ребрам графа надати напрямок (тобто орієнтацію) в такий спосіб, що один з кінців ребра буде початком, а інший – кінцем.

Стверджуватимемо, що задано орієнтований граф, якщо зазначено два об'єкти:

1) не порожня скінчена множина ***X*** – вершини графа;

2) множина ***U***, утворена з ***упорядкованих*** пар вершин.

Елементи множини ***U*** називають ***дугами***. Дуга орієнтованого графа зображується відрізком із зазначенням напрямку (стрілкою)



Орієнтований граф $G = (X,U)$, де
$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;
$U = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_4, x_1), (x_4, x_4)\}$.

Якщо $u_1=(x_1, x_2)$ – дуга орграфа, то стверджують, що дуга u_1 виходить з вершини x_1 і закінчується у вершині x_2 .

Для орієнтованих графів замість степеня вершини ***x*** вводять поняття ***півстепенів:*** додатні $d_+(x)$ й від'ємні $d_-(x)$ півстепені вершини ***x***:

$d_+(x)$ − число дуг, які входять до вершини ***x***;

$d_-(x)$ − число дуг, які виходять з вершини ***x***.

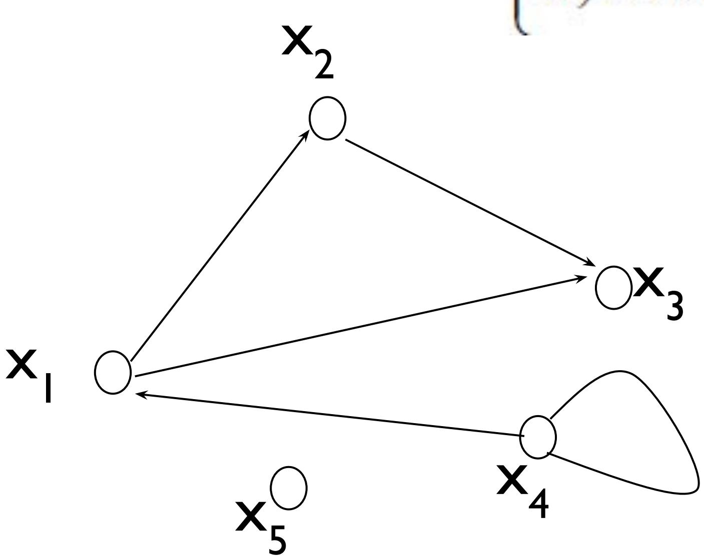
$d_+(x_1)=1 \quad d_-(x_1)=2$

§4 Способи задання орієнтованих графів

4.1 Матриця суміжності

Матрицею ***суміжності*** орграфа ***G*** називається квадратна матриця $A(\boldsymbol{G}) = [a_{ij}]$ порядку n, в якої:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \left(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\right) \in \boldsymbol{U}; \\ 0, \text{ якщо } \left(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j\right) \notin \boldsymbol{U}. \end{cases}$$



В

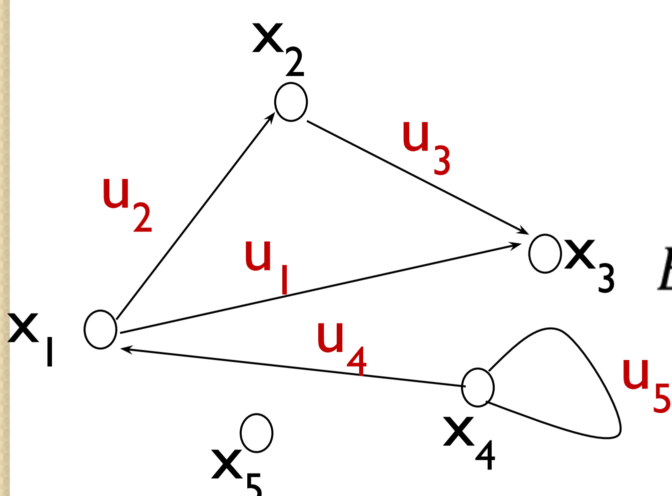
З

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4.2 Матриця інцидентності

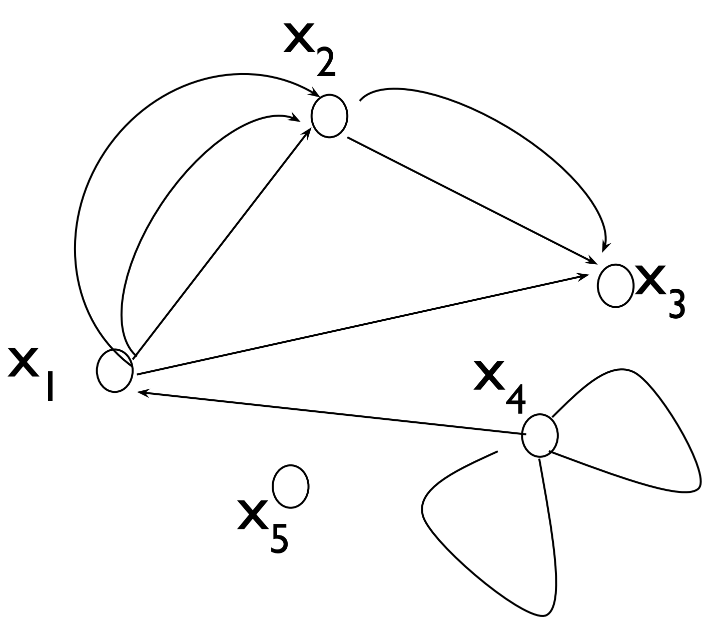
Матрицею ***інцидентності*** (або матрицею ***інциденцій***) орграфа ***G*** називається матриця *B*(***G***) = [b_{ij}] порядку *n*×*m*, в якої елементи:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є кінцем дуги } \boldsymbol{u}_j; \\ -1, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ є початком дуги } \boldsymbol{u}_j; \\ 0, \text{ якщо вершина } \boldsymbol{x}_i \text{ не є інцидентна до дуги } \boldsymbol{u}_j. \end{cases}$$



$$B = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u1 & u2 & u3 & u4 & u5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Матрицю суміжності можна визначити і для псевдографів. Тоді в разі орієнтованого (неорієнтованого) псевдографа $a_{ij}=k$, де k – кратність дуги (x_i,x_j) (ребра $\{x_i,x_j\}$) у цьому псевдографі.



В

З

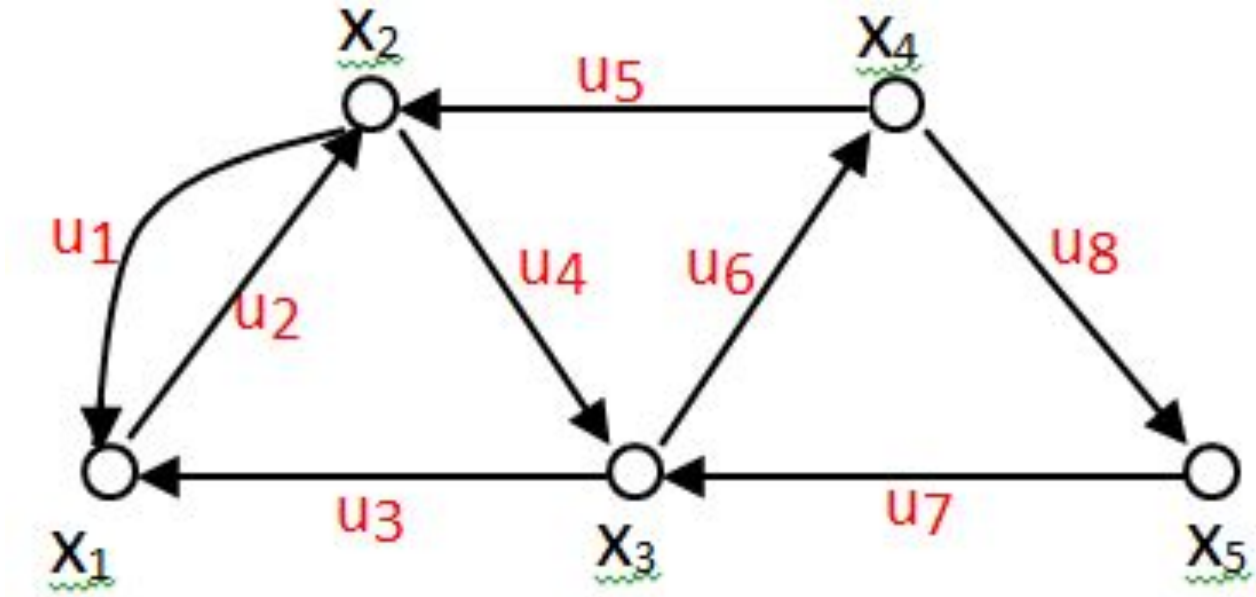
$$A = \begin{array}{c} \\ x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x1 & x2 & x3 & x4 & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

§5 Маршрути, шляхи та контури орієнтованого графа

Орієнтовані маршрути: в орграфі рух за маршрутом допускається лише в напрямках, зазначених стрілками.

Маршрут, який не містить повторних дуг, називається ***шляхом***, а той, що не містить повторних вершин, – ***простим шляхом***.
Замкнений шлях називається ***контуром***, а простий замкнений шлях – ***простим контуром***.

Граф без циклів називається ***безконтурним***, в іншому разі орграф називається ***контурним***.



Маршрут – x_1 u_2 x_2 u_4 x_3 u_6 x_4 u_5 x_2 u_4 x_3
Шлях (всі ребра різні) – x_3 u_6 x_4 u_8 x_5 u_7 x_3 u_3 x_1
Простий шлях (всі ребра і вершини різні) –
x_5 u_7 x_3 u_6 x_4 u_5 x_2 u_1 x_1
Контур – x_1 u_2 x_2 u_4 x_3 u_6 x_4 u_5 x_2 u_1 x_1
Простий контур – x_1 u_2 x_2 u_4 x_3 u_3 x_1