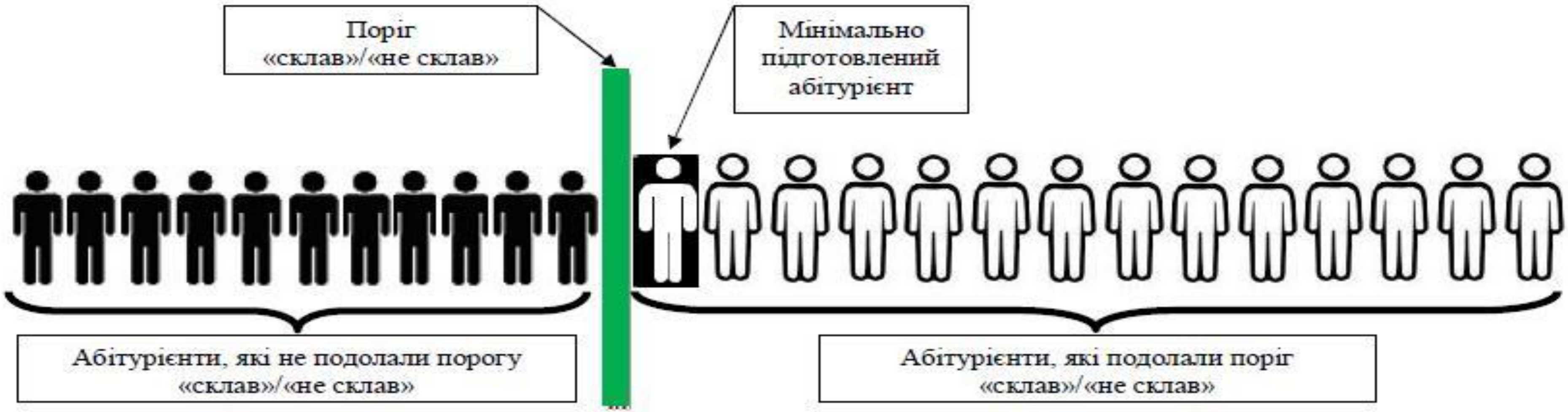
Особливості підготовки до ЗНО 2016 з математики

Система визначення результатів ЗНО-2016

- учасники, які не набрали «порогового бала» (категорія «не склав»), не мають права використати результат ЗНО з відповідного предмета для участі у конкурсному вступі до ВНЗ
- результати учасників, які отримали «пороговий бал» (категорія «склав») дають право брати участь у конкурсному вступі до ВНЗ і шкалюються від 100 до 200 балів (окремо за кожен рівень складності)



ЗНО 2015

Розподіл тестових завдань **базового рівня**
за змістовними лініями в 2015 р. наведено в таблиці
Відповідно до специфікації тест складався з 30 завдань.
Максимальний бал за правильне виконання всіх завдань 48 балів

Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань			Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором однієї правильної відповіді	На встановлення відповідності	З короткою відповіддю	
20 Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	2	23,33
	Рівняння і нерівності	5	–	1	20
	Функції	4	1	1	20
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	–	3,33
10 Геометрія	Планіметрія	3	1	1	16,67
	Стереометрія	3	1	1	16,67
	Усього	20	4	6	100

ЗНО 2015

Розподіл тестових завдань **поглибленого рівня** за змістовними лініями в 2015 р. наведено в таблиці

Відповідно до специфікації тест складався з 36 завдань.

Максимальний бал за правильне виконання всіх завдань 66 балів

Розділи програми	Змістові лінії	Кількість завдань				Частка від загальної кількості завдань (%)
		З вибором однієї правильної відповіді	На встановлення відповідності	З короткою відповіддю	З розгорнутою відповіддю	
24 Алгебра і початки аналізу	Числа і вирази	4	1	3	–	22,22
	Рівняння і нерівності	5	–	1	1	19,44
	Функції	4	1	2	–	19,44
	Елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики	1	–	1	–	5,56
12 Геометрія	Планіметрія	3	1	1	1	16,67
	Стереометрія	3	1	2	–	16,67
	Усього	**20**	**4**	**10**	**2**	**100**

Характеристика сертифікаційної роботи ЗНО-2016 з математики

Загальна кількість **завдань – 33.**

На виконання роботи відведено **180 хвилин.**

Сертифікаційна робота з математики **складається із завдань чотирьох форм:**

- Завдання з вибором однієї правильної відповіді (1-20).
- Завдання на встановлення відповідності (21-24).
- Завдання відкритої форми з короткою відповіддю (25-30).
- Завдання з розгорнутою відповіддю (31-33).

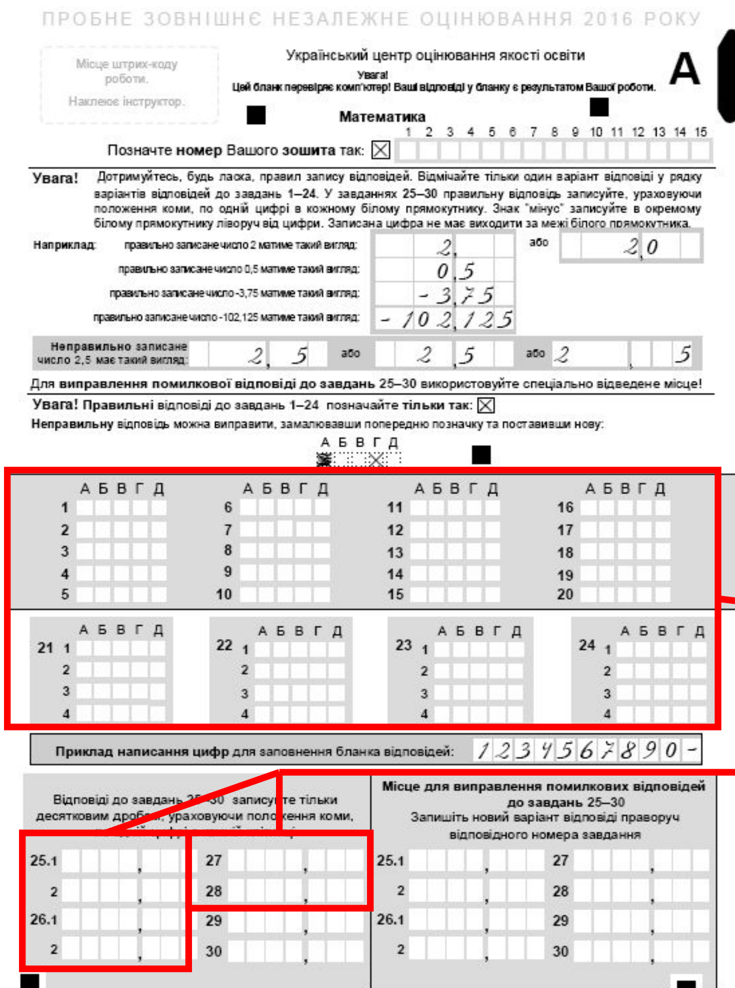
Завдання з розгорнутою відповіддю виконуються **на бланку Б.**

Результат виконання завдань 1-28, 31, 32 буде зараховуватися **як ДПА.**

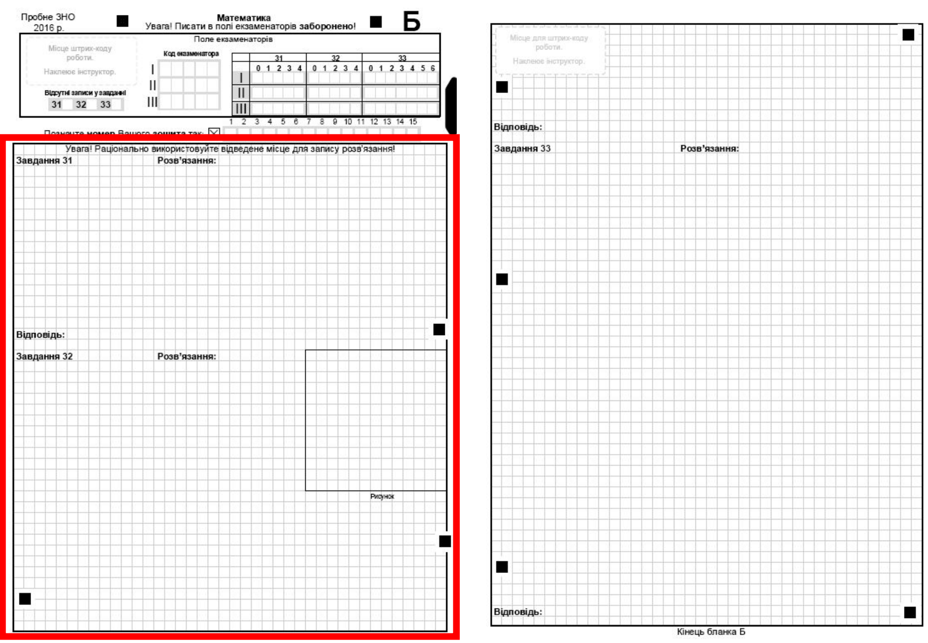
Результат виконання всієї сертифікаційної роботи буде використовуватися **під час прийому до ВНЗ.**

Бланк сертифікаційної роботи з математики

для комп’ютерної перевірки



для перевірки екзаменаторами



Результат виконання завдань 1-28, 31, 32 буде зараховуватися **як ДПА**

Основна сесія

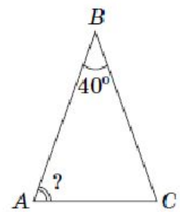
БАЗОВИЙ РІВЕНЬ

1. $2(5x + 6) =$

А	Б	В	Г	Д
$10x + 12$	$10x + 6$	$7x + 8$	$7x + 12$	$5x + 8$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А*	Б	В	Г	Д				
86,94	7,12	1,47	1,58	2,79	0,11	86,94	38,23	0,35

2. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Визначте градусну міру кута BAC, якщо $\angle B = 40^\circ$.



А	Б	В	Г	Д
80°	70°	60°	50°	40°

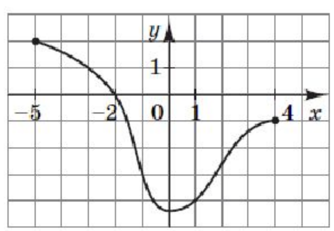
Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б*	В	Г	Д				
8,09	66,62	15,62	3,99	5,55	0,13	66,62	72,32	0,51

3. Розв'яжіть нерівність $0{,}2x - 54 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 27)$	$(270; +\infty)$	$(-\infty; 2{,}7)$	$(-\infty; 270)$	$(10{,}8; +\infty)$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г*	Д				
17,36	9,38	24,40	39,13	9,46	0,26	39,13	75,97	0,61

4. Графік функції, визначеної на проміжку $[-5; 4]$, проходить через одну з наведених точок (див. рисунок). Укажіть цю точку.



А	Б	В	Г	Д
$(-5; -2)$	$(1; -3)$	$(-1; 4)$	$(-3; 1)$	$(0; -2)$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г*	Д				
23,80	3,45	4,96	42,27	25,31	0,2	42,27	80,63	0,63

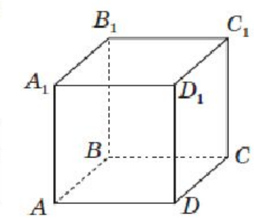
* – правильна відповідь у завданні

5. Сергій і Петро збирали яблука. Сергій зібрав яблук у 5 разів більше, ніж Петро. Яку частину всіх яблук зібрав Петро?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б*	В	Г	Д				
47,32	34,93	5,37	8,87	3,29	0,21	34,93	61,72	0,51

6. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка з наведених прямих паралельна площині (AA_1B_1)?



А	Б	В	Г	Д
BC	BD	C_1D	CB_1	A_1B

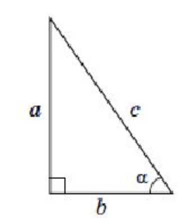
Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В*	Г	Д				
5,78	3,16	83,35	3,37	4,22	0,12	83,35	35,86	0,31

7. Розв'яжіть рівняння $4^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	32

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В*	Г	Д				
21,15	6,96	40,86	22,14	8,71	0,18	40,86	84,51	0,66

8. На рисунку зображено прямокутний трикутник з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha = \frac{a}{b}$	$\cos\alpha = \frac{c}{b}$	$\cos\alpha = \frac{a}{c}$	$\cos\alpha = \frac{c}{a}$	$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г	Д*				
16,67	22,30	13,27	7,04	40,50	0,24	40,50	69,45	0,55

9. Випущено партію з 300 лотерейних білетів. Імовірність того, що навмання вибраний білет із цієї партії буде виграшним, дорівнює 0,2. Визначте кількість білетів *без виграшу* серед цих 300 білетів.

А	Б	В	Г	Д
6	60	294	150	240

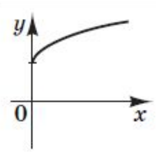
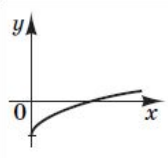
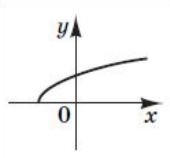
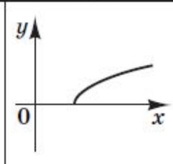
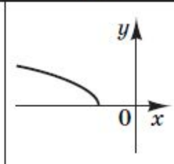
Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г	Д*				
4,87	15,23	23,92	15,77	40,02	0,18	40,02	64,88	0,51

10. Спростіть вираз $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\operatorname{tg}^2\alpha$	$\operatorname{ctg}^2\alpha$	1

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А*	Б	В	Г	Д				
25,50	16,50	27,13	20,14	10,30	0,43	25,50	51,53	0,49

11. На якому рисунку зображено ескіз графіка функції $y=\sqrt{x-2}$?

А	Б	В	Г	Д
				

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г*	Д				
6,48	23,62	23,13	34,82	11,80	0,15	34,82	71,14	0,59

12. На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює 2 *см* і 6 *см* відповідно. Визначте периметр квадрата $ABCD$.

А	Б	В	Г	Д
16 *см*	24 *см*	32 *см*	48 *см*	64 *см*

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В*	Г	Д				
21,19	14,44	46,35	8,74	9,03	0,25	46,35	60,17	0,44

13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}3\sqrt{x}=12,\\ x-2y=26.\end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0;\ y_0)$ системи обчисліть суму x_0+y_0.

А	Б	В	Г	Д
11	21	−7	−10	−14

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А*	Б	В	Г	Д				
37,42	18,07	14,64	15,37	13,86	0,65	37,42	65,01	0,52

14. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 *см*, а сторона її основи – 12 *см*. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди.

А	Б	В	Г	Д
6 *см*	$3\sqrt{5}$ *см*	$5\sqrt{3}$ *см*	9 *см*	15 *см*

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г*	Д				
13,70	20,33	15,30	39,49	10,66	0,52	39,49	41,62	0,34

15. Яку властивість із наведених має функція $y=2x-9$?

А	Б	В	Г	Д
є парною	є непарною	є періодичною	є спадною	є зростаючою

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г	Д*				
7,53	20,84	9,43	24,19	37,76	0,24	37,76	69,67	0,56

16. Розв'яжіть рівняння $\frac{|x|}{10}=2$.

А	Б	В	Г	Д
−5; 5	−20; 20	20	5	−0,2; 0,2

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б*	В	Г	Д				
11,97	47,39	21,86	12,73	5,87	0,19	47,39	74,79	0,56

17. Лист заліза, що має форму прямокутника $ABCD$ ($AB = 50$ *см*), згортають таким чином, щоб отримати циліндричну трубу (див. рисунки 1 і 2). Краї AB і CD зварюють між собою без накладання одного краю на інший. Обчисліть площу бічної поверхні отриманого циліндра (труби), якщо діаметр його основи дорівнює 20 *см*. Виберіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною листа заліза та швом від зварювання знехтуйте.

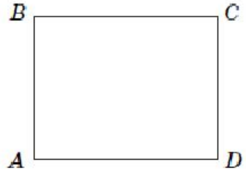


Рис. 1


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
1570 $см^2$	3150 $см^2$	5240 $см^2$	6300 $см^2$	1000 $см^2$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б*	В	Г	Д				
12,95	26,66	13,47	5,37	41,19	0,36	26,66	30,71	0,29

18. Укажіть проміжок, якому належить число $\log_5 4$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А*	Б	В	Г	Д				
33,10	15,37	12,49	9,65	28,94	0,45	33,10	64,76	0,55

19. Укажіть рівняння прямої, яка *може* бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, якщо $f'(2) = -3$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{3}{2}x + 1$	$y = 3x - 2$	$y = 2x + 3$	$y = \frac{3}{2}x - 1$	$y = -3x + 2$

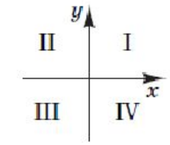
Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А	Б	В	Г	Д*				
15,85	14,30	20,42	12,64	36,14	0,65	36,14	43,17	0,35

20. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-6)(x+2)^2}{x-3} \leqslant 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-2\} \cup (3; 6]$	$(-\infty; -2] \cup (3; 6]$	$[-2; 6]$	$(-\infty; 6]$	$(-\infty; 3) \cup (3; 6]$

Відповіді учасників (%)					Не відповіли на завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
А*	Б	В	Г	Д				
23,38	30,76	15,08	9,86	20,31	0,61	23,38	44,63	0,47

21. Установіть відповідність між функцією (1–4) та координатними чвертями (А–Д), у яких розміщений графік цієї функції (координатні чверті показано на рисунку).



Функція

1 $y = -x^2 - 1$

2 $y = x + 1$

3 $y = -\frac{1}{x}$

4 $y = \cos x$

Координатні чверті

А II та IV

Б III та IV

В I, II та III

Г I, III та IV

Д I, II, III та IV

Правильна відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1	2	3	4			
1 – Б 2 – В 3 – А 4 – Д	18,43	24,30	19,28	11,13	26,86	50,92	66,45	0,65

22. Установіть відповідність між твердженням про дріб (1–4) та дробом (А–Д), для якого це твердження є правильним.

Твердження про дріб

1 є скоротним

2 є неправильним

3 менший за 0,5

4 є оберненим до дробу $1\frac{2}{5}$

Дріб

А $\frac{5}{7}$

Б $\frac{13}{27}$

В $\frac{41}{10}$

Г $\frac{7}{10}$

Д $\frac{34}{51}$

Правильна відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1	2	3	4			
1 – Д 2 – В 3 – Б 4 – А	10,75	18,67	23,22	19,45	27,91	58,77	60,61	0,60

23. Установіть відповідність між геометричною фігурою (1–4) та її площею (А–Д).

Геометрична фігура		*Площа геометричної фігури*	
1	круг радіуса 4 *см* (рис. 1)	А	12π *см*^{2}
2	півкруг радіуса 6 *см* (рис. 2)	Б	16π *см*^{2}
3	сектор радіуса 12 *см* з градусною мірою центрального кута 30° (рис. 3)	В	18π *см*^{2}
4	кільце, обмежене колами радіусів 4 *см* і 6 *см* (рис. 4)	Г	20π *см*^{2}
		Д	24π *см*^{2}

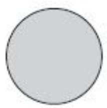


Рис. 1


Рис. 2

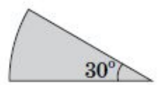


Рис. 3

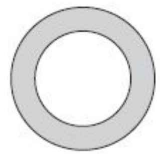


Рис. 4

Правильна відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1	2	3	4			
1 – Б 2 – В 3 – А 4 – Г	10,13	26,69	21,68	19,53	21,98	54,14	60,61	0,66

24. У прямокутній декартовій системі координат у просторі xyz задано точки $A(2; 0; 0)$ і $B(-4; 2; 6)$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення		*Закінчення речення*	
1	Серединою відрізка AB є точка	А	$(-1; 1; 3)$.
2	Вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати	Б	$(0; 2; 0)$.
3	Проекцією точки B на площину xz є точка	В	$(-4; 0; 6)$.
4	Проекцією точки B на вісь y є точка	Г	$(-6; 2; 6)$.
		Д	$(-2; 2; 6)$.

Правильна відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1	2	3	4			
1 – А 2 – Г 3 – В 4 – Б	23,44	26,71	19,49	14,90	15,47	43,06	59,33	0,63

25. У магазині в продажу є лише музичні диски, диски з науково-популярними фільмами та диски з художніми фільмами. Кількість дисків із науково-популярними фільмами в п’ять разів більша за кількість музичних дисків і вдвічі менша за кількість дисків із художніми фільмами. Загальна кількість дисків у цьому магазині дорівнює 192.

1. Скільки відсотків становить кількість музичних дисків від загальної кількості всіх дисків у магазині?

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1			
6,25	85,61	14,39	14,39	44,89	0,58

2. Визначте кількість дисків із науково-популярними фільмами в цьому магазині.

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1			
60	68,86	31,14	31,14	73,57	0,64

26. З вершини тупого кута B паралелограма $ABCD$ опущено перпендикуляр BO на сторону AD. Коло з центром у точці A проходить через вершину B та перетинає сторону AD в точці K. Відомо, що $AK = 6$ *см*, $KD = 4$ *см*, $AO = 5$ *см*.

1. Визначте периметр паралелограма $ABCD$ (у *см*).

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1			
32	71,46	28,54	28,54	74,53	0,67

2. Обчисліть довжину діагоналі BD (у *см*).

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	1			
6	78,39	21,61	21,61	62,19	0,64

27. Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 *м*. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 *м* більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату – 1000 *м* за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 *м*. Скільки всього *кілометрів* плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
26.7	82,58	17,42	17,42	37,61	0,39

28. Розв’яжіть рівняння $\log_5^2 x + \log_5 x = 2$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповіді, якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їхню *суму*. Якщо рівняння не має коренів, запишіть у відповіді число 100.

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
5.04	92,26	7,74	7,74	28,02	0,52

29. Обчисліть значення виразу $\frac{10a+b}{b^2-4a^2}+\frac{4a+2b}{b^2+4ab+4a^2}$ при $a = 0{,}25$, $b = 4{,}5$.

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
0.75	86,64	13,36	13,36	44,61	0,59

30. Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи – 50. Визначте об’єм V цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть *значення* $\frac{V}{\pi}$.

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
8	93,94	6,06	6,06	21,03	0,47

ПОГЛИБЛЕНИЙ РІВЕНЬ

31. Обчисліть значення виразу $\frac{1}{70}\cdot 2^{3\log_2 7}$.

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
4,9	56,80	43,20	43,20	86,60	0,65

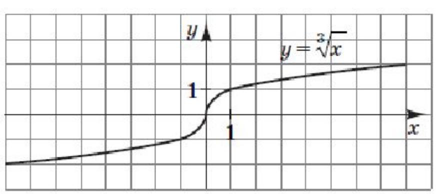
32. У школі є два одинадцятих класи. В 11-А класі навчається 12 хлопців та 8 дівчат, а в 11-Б – 9 хлопців та 15 дівчат. З учнів цих двох класів потрібно обрати двох ведучих для проведення святкового вечора, причому хлопець має бути з 11-А класу, а дівчина – з 11-Б. Скільки всього існує варіантів вибору таких пар ведучих?

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
180	50,03	49,97	49,97	66,60	0,46

33. Основою прямої чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник зі сторонами 4 *см* і $4\sqrt{3}$ *см*. Площина, що проходить через вершини A, B_1 і C призми, утворює з площиною її основи кут 60°. Визначте висоту призми (у *см*).

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
6	80,97	19,03	19,03	47,76	0,40

34. Визначте *додатнє* значення параметра a, за якого площа фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt[3]{x}$ (див. рисунок), $y=0$ та $x=a$, дорівнює 192 *кв. од.*



Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
64	78,84	21,16	21,16	59,91	0,49

35. У прямокутному трикутнику ABC точка M є серединою гіпотенузи AB, довжина якої дорівнює 26 *см*. Точка O віддалена від вершин B і C на 15 *см*, а від сторони BC – на $10\sqrt{2}$ *см*. З точки O на катет BC опущено перпендикуляр OK, точка K належить відрізку OM.

1. Доведіть, що чотирикутник $KMAC$ є трапецією.
2. Визначте площу трапеції $KMAC$.

Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
0	1	2	3	4			
57,13	6,75	7,30	11,96	16,85	31,16	72,28	0,63

36. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x^2-2(a+1)x+6a-3)(\operatorname{tg}\pi x-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0$ на проміжку $[0;\,1]$ має рівно два різні корені?

Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів							Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
0	1	2	3	4	5	6			
86,06	7,78	2,12	1,41	1,24	1,14	0,25	4,73	16,61	0,36

Зовнішнє незалежне оцінювання 2015 року з математики

Схеми оцінювання відкритих завдань з розгорнутою відповіддю з математики (поглиблений рівень)

35. **У прямокутному трикутнику ABC точка M є серединою гіпотенузи AB, довжина якої дорівнює 26 *см*. Точка O віддалена від вершин B і C на 15 *см*, а від сторони BC – на $10\sqrt{2}$ *см*. З точки O на катет BC опущено перпендикуляр OK, точка K належить відрізку OM.**

1. Доведіть, що чотирикутник $KMAC$ є трапецією.
2. Визначте площу трапеції $KMAC$.

Схема оцінювання

1. Якщо учасник довів, що чотирикутник $KMAC$ – трапеція (достатньо довести, що відрізки MK і AC паралельні), то він одержує **1 бал**.
2. Якщо учасник обґрунтовано знайшов довжину відрізка CK або відрізка BK, то він одержує ще **1 бал**.
3. Якщо учасник обґрунтовано знайшов довжину відрізка MK чи відрізка AC або обґрунтовано визначив відношення площ трикутників MKB і ABC, то він одержує ще **1 бал.**
4. Якщо учасник визначив площу трапеції $KMAC$, то він одержує ще **1 бал.**

Отже, за повністю правильно розв'язане завдання №35 учасник отримує 4 бали.

Зауваження

1. За наведену правильну відповідь без розв'язання учасник отримує **0 балів**.
2. Якщо учасник припустився помилки при зображенні точки O (відмітив її на промені KM), то кількість балів, отриманих за пункти 2–4, зменшується на **1 бал**.
3. Якщо учасник припустився арифметичної помилки, але з урахуванням своєї помилки розв'язав завдання, то з нього знімається лише **1 бал**.

36. **При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{(x^2-2(a+1)x+6a-3)(\operatorname{tg}\pi x-1)}{\sqrt[4]{49x^2-84xa+36a^2}}=0$ на проміжку $[0;1]$ має рівно два різні корені?**

Схема оцінювання

1. Якщо учасник знайшов корені $x_1=3$ та $x_2=2a-1$ квадратного рівняння $x^2-2(a+1)x+6a-3=0$ і вказав, що $x_1=3\notin[0;1]$, а $x_2=2a-1\in[0;1]$, якщо $a\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, то він отримує **1 бал**.
2. Якщо учасник правильно знайшов корені рівняння $\operatorname{tg}\pi x-1=0$: $x=\frac{1}{4}+k, k\in Z$ і вказав, що проміжку $[0;1]$ належить лише значення $x_3=\frac{1}{4}$, то він отримує ще **1 бал**.
3. Якщо учасник обґрунтовано отримав обмеження $a\neq\frac{5}{8}$, то він отримує ще **1 бал**.
4. Якщо учасник обґрунтовано отримав обмеження $a\neq\frac{7}{8}$, то він отримує ще **1 бал.**
5. Якщо учасник перевірив умову $\frac{1}{4}\neq\frac{6}{7}a$, то він отримує ще **1 бал.**
6. Якщо учасник обґрунтовано отримав обмеження $a\neq\frac{3}{4}$ і записав правильну відповідь, то він отримує ще **1 бал.**

Отже, за повністю правильно розв'язане завдання №36 учасник отримує 6 балів.

Зауваження

1. За наведену правильну відповідь без розв'язання учасник отримує **0 балів.**
2. Якщо учасник лише правильно розв'язав квадратне рівняння $x^2-2(a+1)x+6a-3=0$ і тригонометричне рівняння $\operatorname{tg}\pi x-1=0$, то він отримує тільки **1 бал**.
3. Якщо учасник лише обґрунтовано зафіксував обмеження $x\neq\frac{6}{7}a$ і правильно розв'язав квадратне рівняння $x^2-2(a+1)x+6a-3=0$ або тригонометричне рівняння $\operatorname{tg}\pi x-1=0$, то він отримує лише **1 бал**.
4. Зауваження 2,3 враховуються лише у випадку, коли за наведеною схемою оцінювання учасник отримує **0 балів**.
5. Якщо учасник припустився арифметичної помилки, але з урахуванням своєї помилки розв'язав завдання, то з нього знімається лише **1 бал**.

- Підготовку до ЗНО 2016 доцільно проводити за змістовно-методичними лініями курсу математики

ЧИСЛА І ВИРАЗИ

1. Визначте m із співвідношення $\frac{m}{2}=\frac{3}{n}$, де $n \neq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$m=6n$	$m=\frac{6}{n}$	$m=\frac{2n}{3}$	$m=\frac{3}{2n}$	$m=\frac{n}{6}$

2. Обчисліть $\frac{5}{9}\cdot 0{,}3$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{1}{30}$

3. За видачу свідоцтва про право на спадщину стягується державне мито в розмірі 0,5% від вартості майна, що успадковується. Скільки державного мита повинен сплатити спадкоємець, якщо вартість майна, що успадковується, становить 32 000 *грн*?

25. Додатне число A більше додатного числа B у 3,8 раза. На скільки відсотків число A більше за число B?

5. Спростіть вираз $\frac{b^2 \cdot b^{10}}{b^4}$, де $b \neq 0$

А	Б	В	Г	Д
b^{16}	b^8	b^5	b^4	b^3

9. Обчисліть $\log_3 18 - \log_3 2$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	$\log_3 16$	6	9

12. Спростіть вираз $(1-\cos^2\alpha)\mathrm{ctg}^2\alpha$.

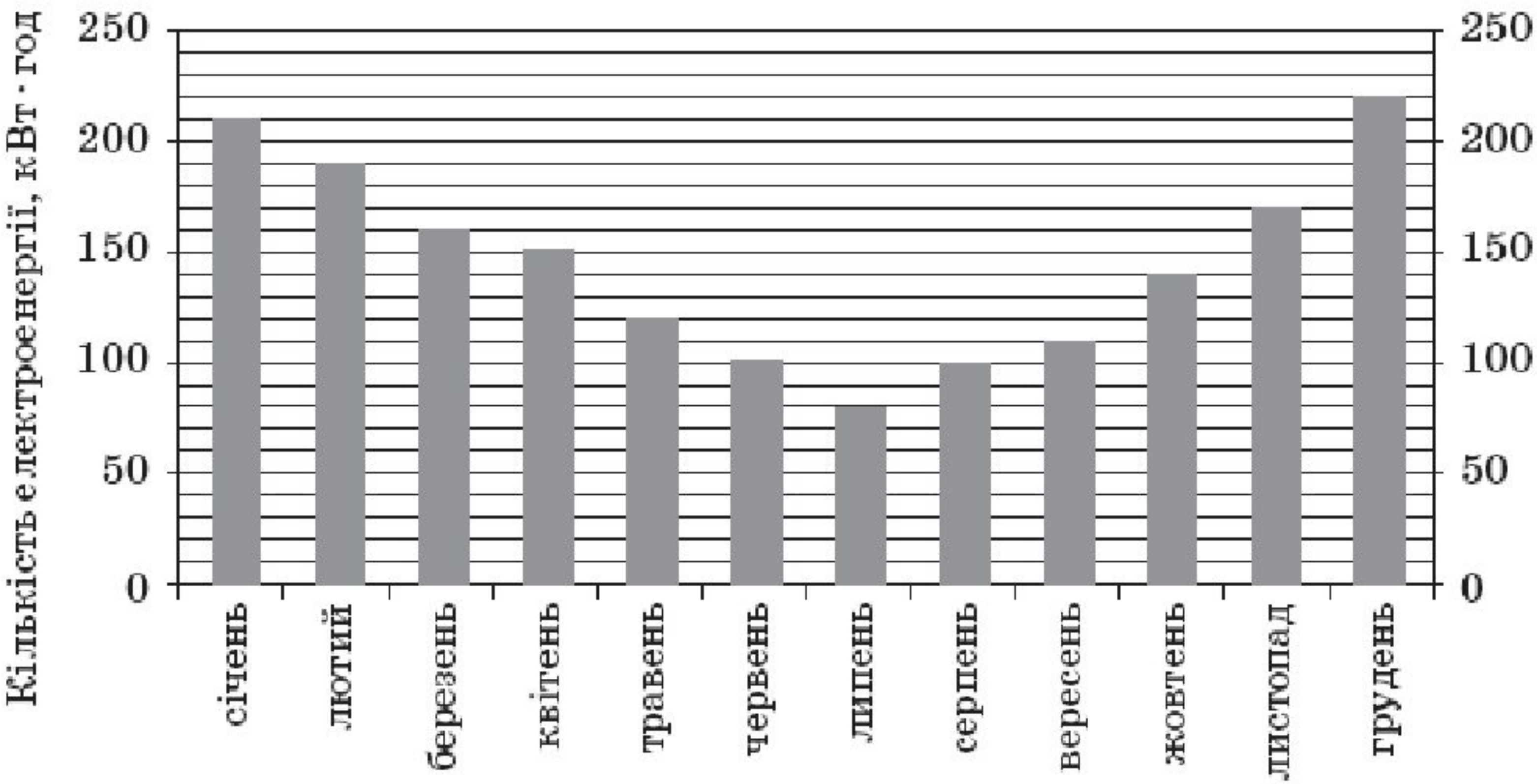
А	Б	В	Г	Д
$\cos^2\alpha$	$\sin 2\alpha$	$\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$	$\sin^2\alpha$	$\mathrm{tg}^2\alpha$

2. Діаграма, зображена на рисунку, містить інформацію про кількість електроенергії (у кВт · год), спожитої певною сім'єю в кожному місяці 2012 року. Користуючись діаграмою, установіть, які з наведених тверджень є правильними.

I. У грудні порівняно з липнем спожито електроенергії більше, ніж у 2 рази.

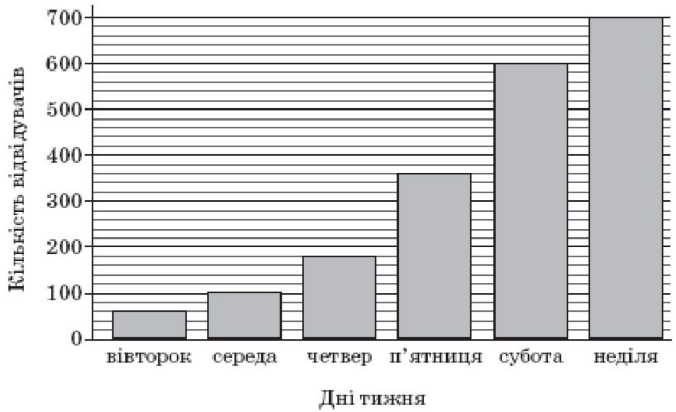
II. За всі літні місяці спожито електроенергії на 150 кВт · год менше, ніж за всі весняні місяці.

III. Середньомісячне споживання електроенергії за рік є більшим за 120 кВт · год.



А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і II	лише I і III	лише II і III	I, II і III

3. На діаграмі відображено кількість відвідувачів Музею Води протягом одного робочого тижня (з вівторка до неділі). У який день тижня кількість відвідувачів була вдвічі більшою, ніж у попередній день?



А	Б	В	Г	Д
середа	четвер	п'ятниця	субота	неділя

8. Запишіть числа $\sqrt[3]{2}$, 1, $\sqrt[5]{3}$ в порядку зростання.

А	Б	В	Г	Д
$1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}$	$1, \sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}, 1$	$\sqrt[5]{3}, 1, \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[5]{3}$

19. Укажіть множину всіх значень a, при яких виконується рівність $|a^3 - a^2| = a^3 - a^2$.

А	Б	В	Г	Д
$[1; +\infty)$	$\{0\} \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup \{0\}$	$[0; 1]$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

2. Учитель роздав учням певного класу 72 зошити. Кожен учень отримав однакову кількість зошитів. Якому з поданих нижче чисел може дорівнювати кількість учнів у цьому класі?

А	Б	В	Г	Д
7	9	10	11	14

21. До кожного виразу (1 – 4) при $a > 0$ доберіть тотожно йому рівний (А – Д).

1	$\dfrac{2a^5}{a^6}$	**А**	$32a^{11}$
2	$(2a)^5 \cdot a^6$	**Б**	$2a^{\frac{5}{6}}$
3	$(2a^6)^5$	**В**	$2a^{\frac{6}{5}}$
4	$\sqrt[6]{64a^5}$	**Г**	$2a^{-1}$
		Д	$32a^{30}$

28. Установіть відповідність між виразами (1 – 4) та їхніми значеннями, якщо $x - 0{,}5$ (А – Д).

Вираз		*Значення виразу*	
1	$\dfrac{x^2 - 9}{3 + x}$	**А**	$-2{,}5$
2	$(x - 5)^2 + 5(2x - 5)$	**Б**	$-0{,}25$
3	$\dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$	**В**	$0{,}25$
4	$\dfrac{3x - 6}{8x} \cdot \dfrac{x}{x^2 - 4x + 4}$	**Г**	$1{,}5$
		Д	$2{,}5$

---

26. Установіть відповідність між числом (1 – 4) та множиною, до якої воно належить (А –Д).

Число		*Множина*	
1	3,4	**А**	множина натуральних чисел
2	$\sqrt{8}$	**Б**	множина складених чисел
3	$\dfrac{10}{2}$	**В**	множина цілих чисел, що не є натуральними числами
4	-13	**Г**	множина дробових чисел
		Д	множина ірраціональних чисел

Задачі, які вимагають логічних міркувань і найпростіших обчислень

25. Петро, Микола та Василь уранці відвідали кафе і кожен із них замовив собі на сніданок бутерброд та гарячий напій. Відомо, що Василь не п'є чорного чаю, а Микола замовив собі бутерброд із шинкою. Скориставшись таблицею, визначте, скільки грошей (у *грн*) буде коштувати Миколі, Василю і Петру разом *найдешевше* замовлення в цьому кафе.

Страви	Ціна, *грн*
Бутерброд із сиром	7.00
Бутерброд із шинкою	15.00
Бутерброд із рибою	17.00
Кава з молоком	13.00
Кава	12.00
Чай чорний	8.00
Чай зелений	9.00

23. Дві однакові автоматичні лінії виготовляють 16 т шоколадної глазурі за 4 дні. Установіть відповідність між запитанням (1–4) та правильною відповіддю на нього (А–Д). Уважайте, що кожна лінія виготовляє однакову кількість глазурі щодня.

Запитання		*Відповідь на запитання*	
1	Скільки тонн шоколадної глазурі дві лінії виготовляють за 3 дні?	А	2
2	За скільки днів одна лінія виготовить 16 т шоколадної глазурі?	Б	4
3	Скільки тонн шоколадної глазурі виготовить одна лінія за 2 дні?	В	6
4	Скільки таких ліній потрібно для виготовлення 48 т шоколадної глазурі за 4 дні?	Г	8
		Д	12

Головний принцип ефективної підготовки до розв’язування завдань ЗНО

- Формування загальних методів розв’язування,

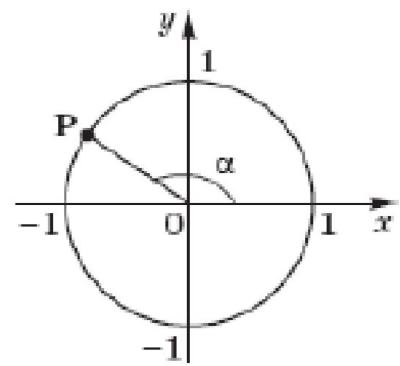
  а не розв’язування окремих завдань

ФУНКЦІЇ

27. Установіть відповідність між функціями, заданими формулами (1 – 4), та їхніми властивостями (А – Д).

Функція	*Властивість функції*
1 $y = \cos x$	**А** областю визначення функції є інтервал $(0; +\infty)$
2 $y = \operatorname{ctg} x$	**Б** областю значень функції є відрізок $[-1; 1]$
3 $y = 4$	**В** функція спадає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$
4 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	**Г** непарна функція
	Д періодична функція, що не має найменшого додатного періоду

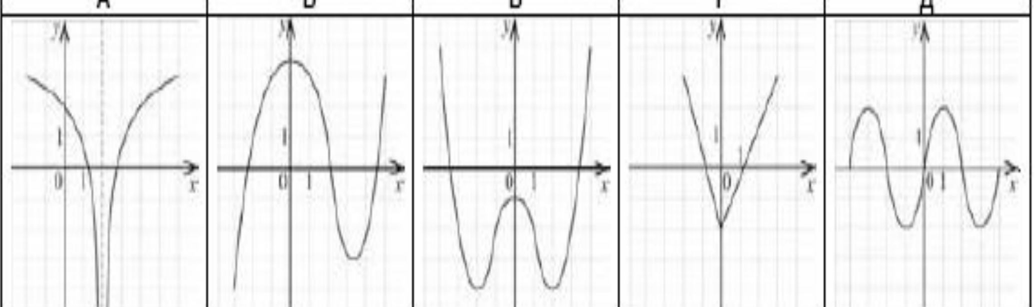
9. На одиничному колі зображено точку $P(-0,8;\ 0,6)$ і кут α (див. рисунок). Визначте $\cos \alpha$.



А	Б	В	Г	Д
$-0,8$	$0,6$	$0,8$	$-0,6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. Укажіть рисунок, на якому зображено графік парної функції.

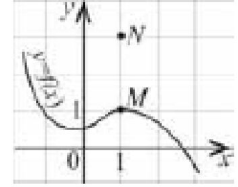
А	Б	В	Г	Д



14. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = 4^x$	$y = x$	$y = \sqrt{x}$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \lvert x \rvert$

16. Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку M (1;1) (див. рисунок). При якому значенні a графік функції $y = f(x) + a$ проходить через точку N (1;3)?



А	Б	В	Г	Д
$a = 2$	$a = -2$	такого значення не існує	$a = \frac{1}{3}$	$a = 3$

26. Установіть відповідність між функціями (1 – 4) та ескізами їхніх графіків (А – Д).

Функція

1 $y = \operatorname{tg} x$

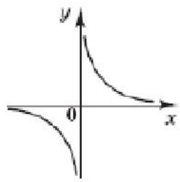
2 $y = \operatorname{ctg} x$

3 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

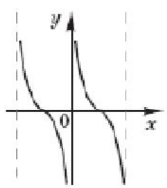
4 $y = \frac{1}{x}$

Ескіз графіка функції

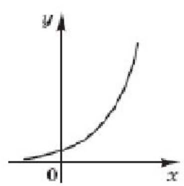
А



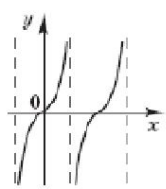
Б



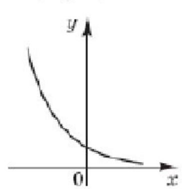
В



Г



Д



22. Установіть відповідність між твердженням (1–4) та функцією (А–Д), для якої це твердження є правильним.

Твердження

1 графік функції не перетинає жодну з осей координат

2 областю значень функції є проміжок $(0; +\infty)$

3 функція спадає на всій області визначення

4 на відрізку $[-1{,}5;\ 1{,}5]$ функція має два нулі

Функція

А $y = -x + 2$

Б $y = x^2 - 2$

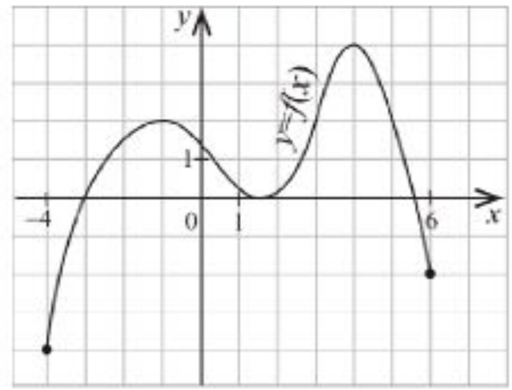
В $y = -\frac{1}{x}$

Г $y = 3^x$

Д $y = \cos x$

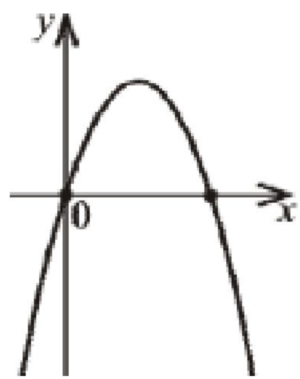
28. Знайдіть *найбільше* значення функції $y = \dfrac{(1 - 2\cos x)^4}{2}$.

23. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на відрізку $[-4; 6]$. Укажіть усі значення x, для яких виконується нерівність $f(x) \geq 2$?



А	Б	В	Г	Д
$\{2\} \cup [3; 5]$	$[-4; 3] \cup [5; 6]$	$[3; 5]$	$[2; 4]$	$\{-1\} \cup [3; 5]$

25. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = ax^2 + bx + c$. Укажіть правильне твердження щодо коефіцієнтів a, b, c.



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0, \\ c = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b < 0, \\ c > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ c = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0, \\ b > 0, \\ c = 0 \end{cases}$

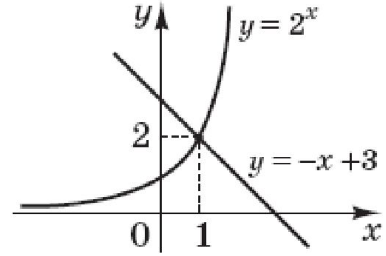
17. Знайдіть значення похідної функції $f(x) = 4\cos x + 5$ у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
– 4	– 1	1	4	5

32. Задано функції $f(x) = x^2 + 1$ і $g(x) = 7 - x$.

1. Знайдіть абсциси точок перетину графіків функцій $f(x)$ і $g(x)$. У прямокутній системі координат зобразіть фігуру, обмежену цими графіками.
2. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $f(x)$ і $g(x)$.

5. Використовуючи зображені на рисунку графіки функцій, розв'яжіть нерівність $2^x > -x + 3$.

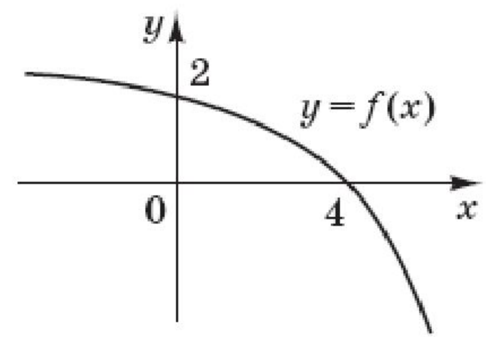


А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(1; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 1)$	$(2; +\infty)$

30. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t у секундах. Знайдіть значення t (у секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 *м/с*.

28. Знайдіть найменший додатний період функції $f(x) = 9 - 6\cos\left(20\pi x + 7\right)$.

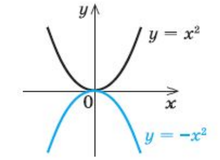
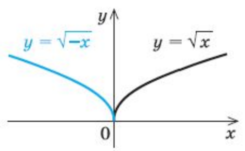
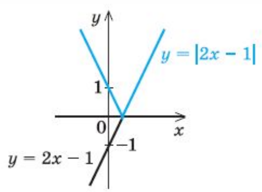
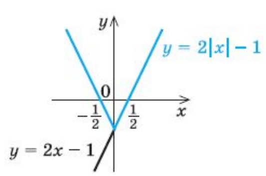
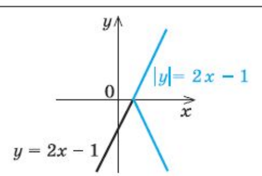
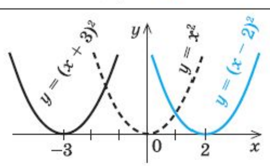
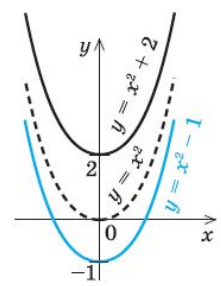
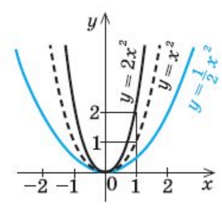
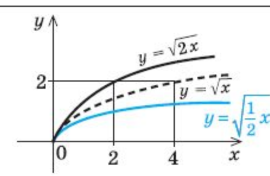
24. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, спадної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Установіть відповідність між функцією (1 – 4) та точкою перетину її графіка з віссю Ox (А – Д).



Функція		*Точка перетину*	
1	$y = f(x + 2)$	**А**	$(0; 0)$
2	$y = f(x - 2)$	**Б**	$(2; 0)$
3	$y = 2f(x)$	**В**	$(4; 0)$
4	$y = f(x) - 2$	**Г**	$(6; 0)$
		Д	$(8; 0)$

Таблиця 32

ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = f(x)$

№ з/п	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	$y = -f(x)$		Симетрія графіка відносно осі Ox
2	$y = f(-x)$		Симетрія графіка відносно осі Oy
3	$y = \vert f(x) \vert$		Вище від осі Ox (і на самій осі) графік залишають без зміни, нижче від осі Ox — відображають симетрично відносно осі Ox
4	$y = f(\vert x \vert)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік залишають без зміни і цю саму частину відображають симетрично відносно осі Oy
5	$\vert y \vert = f(x)$		Вище від осі Ox (і на самій осі) графік залишають без зміни і цю саму частину відображають симетрично відносно осі Ox
6	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox на a одиниць
7	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на c одиниць
8	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		Графік має той самий вигляд, що й графік функції $y = f(x)$, тільки його розтягнуто або стиснено вздовж осі Oy при $k > 1$ — розтягнуто, при $0 < k < 1$ — стиснено)
9	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		Графік має той самий вигляд, що й графік функції $y = f(x)$, тільки його розтягнуто або стиснено вздовж осі Ox (при $\alpha > 1$ — стиснено, при $0 < \alpha < 1$ — розтягнуто)

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

17. Розв'яжіть рівняння $2\sin x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$	$(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$	$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

29. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x-2y} = \frac{1}{3}, \\ 3^x + 3^{2y} = 4\sqrt{3}. \end{cases}$

12. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{1-x} = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-20; -10)$	$(-10; -5)$	$(-5; 5)$	$(5; 10)$	$(10; 20)$

25. Розв'яжіть рівняння $\log_6(x-3)+\log_6(x-8)=2$.

Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо воно має два корені, то у відповідь запишіть їх суму.

34. Розв'яжіть рівняння $\left||2x-1|-3\right| = 5$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше одного кореня, то у відповідь запишіть *добуток* усіх коренів.

17. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x < \left(\frac{4}{\pi}\right)^3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; 3)$	$(-\infty; -3)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

16. Розв'яжіть нерівність $2^x \leqslant 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; \log_2 3]$	$(0; \log_2 3]$	$\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$	$(-\infty; \log_3 2]$	$[\log_2 3; +\infty)$

23. Розв'яжіть рівняння (1 – 4). Установіть відповідність між кожним рівнянням та кількістю його коренів (А – Д) на відрізку $[-5; 5]$.

Рівняння		*Кількість коренів на відрізку* $[-5; 5]$	
1	$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$	**А**	жодного
2	$\log_3 x = -2$	**Б**	один
3	$\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 8} = 0$	**В**	два
4	$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	**Г**	три
		Д	чотири

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою рівнянь-наслідків

1 ↓ 2 — Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння

за допомогою рівносильних перетворень

Врахувати ОДЗ початкового рівняння

1 ↑↓ 2 — Зберігати на ОДЗ правильну рівність при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій*

1 — початкове рівняння;

2 — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою рівносильних перетворень

Врахувати ОДЗ початкової нерівності

1 ↓↑ 2 — Зберігати на ОДЗ правильну нерівність при прямих і зворотних перетвореннях

за допомогою методу інтервалів ($f(x) \gtrless 0$)

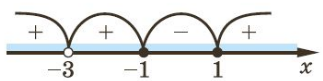
1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції: $f(x)=0$.
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

1 — початкова нерівність;

2 — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План	Приклад
1. Знайти ОДЗ. **2. Знайти нулі функції $f(x)=0$.** **3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.** **4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.**	Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0.$ ▶ Нехай $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}.$ 1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$. 2. Нулі функції: $f(x)=0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2}=0,\ x^2-1=0,$ $x_1=-1,\ x_2=1$ (входять до ОДЗ). 3.  *Відповідь:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

Якщо виконується розв’язування рівняння, то до ключових моментів можна віднести основні етапи відповідного розв’язування. Зокрема, якщо для розв’язування використовуються рівняння-наслідки, то до запису розв’язання повинна входити перевірка одержаних коренів, а

якщо використовуються рівносильні перетворення рівняння, то до запису розв’язання повинно входити врахування ОДЗ заданого рівняння.

Слід мати на увазі, що врахувати ОДЗ заданого рівняння можна одним із трьох способів: 1) записати ОДЗ і розв’язати всі одержані обмеження; 2) записати ОДЗ, не розв’язувати одержані обмеження, але в кінці підставити одержані корені в обмеження ОДЗ і з’ясувати, задовольняє чи не задовольняє розглядуваний корінь усім обмеженням ОДЗ; 3) зовсім не записувати обмеження ОДЗ до розв’язання, але записати пояснення, що ОДЗ заданого рівняння було враховано автоматично в наведеному розв’язуванні.

Також слід враховувати, що іноді рівносильні перетворення доводиться виконувати не на всій ОДЗ заданого рівняння, а на тій її частині, в якій знаходяться корені заданого рівняння — в цьому випадку про це також повинно бути записано в розв’язанні.

Якщо для розв’язування рівняння використовуються властивості функцій, то до запису розв’язання слід включити обґрунтування відповідних властивостей функцій; при цьому, для обґрунтування зростання або спадання функції чи для оцінки області значень функції може використовуватися похідна.

Аналогічно, при записі розв’язування нерівності ключові моменти розв’язування пов’язані з вибраним методом розв’язування (рівносильні перетворення чи загальний метод інтервалів).

27. Розв'яжіть нерівність $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x}\geqslant 1$.

У відповіді запишіть *суму* всіх цілих її розв'язків.

31. Розв'яжіть нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x}>8^{x-5}$. У відповідь запишіть *суму* всіх цілих розв'язків цієї нерівності. Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

27. Знайдіть КІЛЬКІСТЬ усіх цілих розв'язків нерівності $\frac{x^2-x-12}{(x+1)^2}\leq 0$.

Якщо нерівність має безліч цілих розв'язків, то у відповідь запишіть число 100.

33. Розв'яжіть нерівність $2\cdot\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{(x-1)^2+4x}\leq x$.

30. Робітники отримали замовлення викопати криницю. За перший викопаний у глибину метр криниці їм платять 50 *грн*, а за кожний наступний – на 20 *грн* більше, ніж за попередній. Скільки грошей (у *грн*) сплатять робітникам за викопану криницю завглибшки 12 *м*?

§ 8 РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ, ЩО МІСТЯТЬ ЗНАК МОДУЛЯ

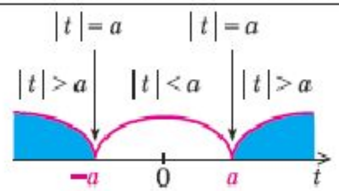
Таблиця 15

1. Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля

за означенням	за геометричним змістом	за загальною схемою
$\lvert a\rvert=\begin{cases}a, \text{ при } a>0,\\ 0, \text{ при } a=0,\\ -a, \text{ при } a<0.\end{cases}$	$\lvert a\rvert$ — *відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a.* 1. $\lvert f(x)\rvert = a$. 2. $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$. 3. $\lvert f(x)\rvert > a$. 4. $\lvert f(x)\rvert < a$.	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі всіх підмодульних функцій. 3. Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки. 4. Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок).

з використанням спеціальних співвідношень

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)



1. $\lvert f(x)\rvert = a \Leftrightarrow f(x) = a$ або $f(x) = -a$.
2. $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ або $f(x) = -g(x)$.
3. $\lvert f(x)\rvert > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ або $f(x) > a$.
4. $\lvert f(x)\rvert < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) > -a,\\ f(x) < a.\end{cases}$

Узагальнення

5. $\lvert f(x)\rvert = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}g(x) \geqslant 0,\\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x).\end{cases}$
6. $\lvert f(x)\rvert > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ або $f(x) > g(x)$.
7. $\lvert f(x)\rvert < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x) > -g(x),\\ f(x) < g(x).\end{cases}$

Продовження табл. 15

3. Використання спеціальних співвідношень

1. $\lvert u\rvert = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $\lvert u\rvert = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $\lvert u\rvert = \lvert v\rvert \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $\lvert u\rvert > \lvert v\rvert \Leftrightarrow u^2 > v^2$. Тоді $\lvert u\rvert - \lvert v\rvert > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$;
   знак різниці модулів двох виразів збігається зі знаком різниці їх квадратів.
5. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = u + v \Leftrightarrow \begin{cases}u \geqslant 0,\\ v \geqslant 0.\end{cases}$
6. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases}u \leqslant 0,\\ v \leqslant 0.\end{cases}$
7. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = \lvert u + v\rvert \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $\lvert u\rvert + \lvert v\rvert = \lvert u - v\rvert \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $\lvert x - a\rvert + \lvert x - b\rvert = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, де $a < b$.

Приклади й обґрунтування

Розв'язувати будь-яке рівняння або нерівність, що містить знак модуля, можна одним з трьох основних способів: за означенням модуля, виходячи з геометричного змісту модуля або за загальною схемою. Деякі рівняння або нерівність, що містить знак модуля, можуть бути розв'язані також з використанням спеціальних співвідношень (табл. 15).

Залежно від обраного способу одержуємо різні записи розв'язання.

Приклад Розв'яжіть рівняння $\lvert 2x - 4\rvert = 6$.

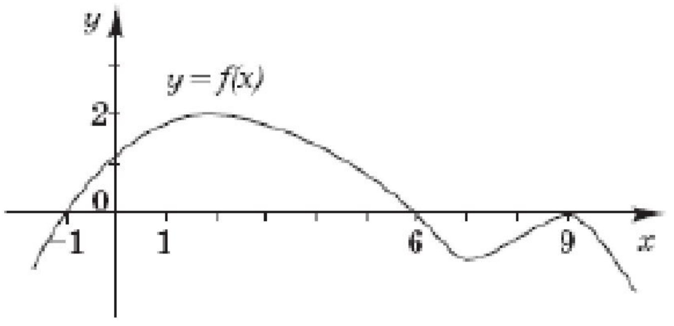
I спосіб (за означенням модуля)

Розв'язання	*Коментар*
► 1) Якщо $2x - 4 \geqslant 0,$ (1) то одержуємо рівняння $2x - 4 = 6.$ Тоді $x = 5$, що задовольняє умові (1). 2) Якщо $2x - 4 < 0,$ (2) то одержуємо рівняння $-(2x - 4) = 6.$ Тоді $x = -1$, що задовольняє також умові (2). *Відповідь:* 5; −1. ◁	Ураховуючи означення модуля, розглянемо два випадки: $2x - 4 \geqslant 0$ і $2x - 4 < 0$. За означенням *модулем додатного (невід'ємного) числа є саме це число, а модулем від'ємного числа є протилежне йому число*. Тому при $2x - 4 \geqslant 0$ $\lvert 2x - 4\rvert = 2x - 4$, а при $2x - 4 < 0$ $\lvert 2x - 4\rvert = -(2x - 4)$. У кожному випадку розв'язуємо одержане рівняння і з'ясовуємо, чи задовольняє кожен із знайдених коренів умові, за якої ми його знаходили.

34. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, що визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і має лише три нулі.

Розв'яжіть систему $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ x^2 + x - 6 > 0 \end{cases}$.

У відповіді запишіть *суму* всіх цілих розв'язків системи.



36. Розв'яжіть систему $\begin{cases} 5\cos\dfrac{\pi y}{2} = x^2 - 8x + 21, \\ y + 5x - 4 = 0. \end{cases}$

Якщо система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, то у відповідь запишіть *суму* $x_0 + y_0$; якщо система має більше, ніж один розв'язок, то у відповідь запишіть *кількість* усіх розв'язків.

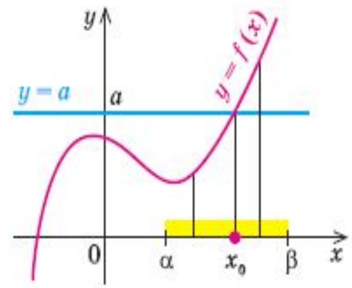
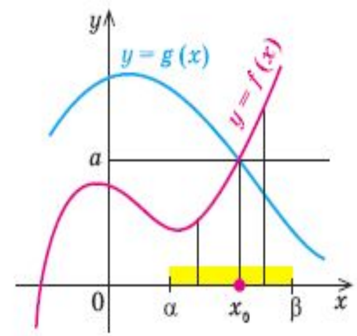
36. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть *суму* всіх коренів.

3.2. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь

Таблиця 10

Орієнтир	Приклад
1. Скінченна ОДЗ	
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування достатньо перевірити всі ці значення	$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ 2-2x^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geqslant 1,\\ x^2\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$. *Перевірка.* $x=1$ — корінь $\left(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0}, 1=1\right)$, $x=-1$ — не корінь $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$. *Відповідь:* 1. ◁
2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння	
$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)=a,\\ g(x)=a\end{cases}$ **Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a**	$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}$. ▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$, $g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (бо $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$). Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}1-x^2=1,\\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ *Відповідь:* 0. ◁
$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x)+f_2(x)+\\ \quad+\ldots+f_n(x)=0\\ \hline f_1(x)\geqslant 0,\\ f_2(x)\geqslant 0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)\geqslant 0\end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases}f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)=0.\end{cases}$ *Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю*	$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+(x^2-4)^2=0$. ▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sqrt{x-2}=0,\\ \lvert x^2-2x\rvert=0,\\ (x^2-4)^2=0.\end{cases}$ З першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє всій системі *Відповідь:* 2. ◁

Продовження табл. 10

3. Використання зростання та спадання функцій	
Схема розв'язування рівняння	
1. ***Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*** 2. ***Доводимо, що інших коренів це рівняння не має*** (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння)	
	Теореми про корені рівняння
	**1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.** Приклад Рівняння $\sqrt{x}+2x^3=3$ має єдиний корінь $x=1$ $\left(\sqrt{1}+2\cdot 1^3=3\right.$, тобто $3=3$), оскільки функція $f(x)=\sqrt{x}+2x^3$ зростає на всій області визначення $x\geqslant 0$
	**2. Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.** Приклад Рівняння $\sqrt{x}+x^3=3-x$ має єдиний корінь $x=1$ $\left(\sqrt{1}+1^3=3-1\right.$, тобто $2=2$), оскільки $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ зростає на всій області визначення $x\geqslant 0$, а $g(x)=3-x$ спадає (на множині R, а отже, і при $x\geqslant 0$)

Пояснення й обґрунтування

1. **Скінченна ОДЗ.** Нагадаємо, що у разі, коли задано рівняння $f(x)=g(x)$, спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається *областю допустимих значень* цього рівняння. Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$. Отже, *кожен корінь рівняння*

Завдання з параметрами

32. При якому *найменшому цілому* значенні параметра a рівняння

$\sqrt{2x+15}\cdot\left(\sqrt{x^2+18x+81}-\sqrt{x^2-10x+25}\right)=a\sqrt{2x+15}$ має лише два різні корені?

32. При якому *найменшому* значенні a рівняння

$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}}+(14-2a)\cdot\sqrt[4]{x-3}+32=6a$ має хоча б один корінь?

31. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому має розв'язки рівняння

$$\sin x-\cos^2 x=a-1.$$

31. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому має розв'язки рівняння

$$\sin x-\cos^2 x=a-1.$$

33. При якому *найбільшому* від'ємному значенні параметра a рівняння

$\sqrt[4]{|x|-1}-2x=a$ має один корінь?

Правильна відповідь: **–1,625.**

33. Знайдіть значення параметра a, при якому корінь рівняння

$\lg(\sin 5\pi x)=\sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $\left(\frac{3}{2};\,2\right)$.

Правильна відповідь: **–14,3.**

Два види
(за вимогою)

“Розв’яжіть …”

“Дослідіть …”

“Дослідіть …”

Розв’язати і дослідити одержані розв’язки

Дослідження кількості розв ’язків – графічна ілюстрація

Застосування властивостей функцій

Застосування властивостей квадратного тричлена

Завдання 6 балів

- Розв’яжіть рівняння

$$2(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 2) + a^2 = 3a(\mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x),$$

якщо $x \neq \frac{\pi n}{2}$, де $n \in Z$

$$2(\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x+2) + a^2 = 3a(\text{tg}\ x + \text{ctg}\ x),$$

якщо де $x \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in$

Розв'язання

Нехай $tgx + ctgx = t$ (*),

тоді $t^2 = (tgx + ctgx)^2 = tg^2 x + 2tgxctgx + ctg^2 x = tg^2 x + ctg^2 x + 2$.

Отже задане в умові рівняння можна записати у такому вигляді:

$2t^2 - 3at + a^2 = 0$ (**).

Розв'яжемо квадратне рівняння відносно t.

$$t_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{4} = \frac{3a \pm a}{4};$$

$$t_1 = \frac{a}{2};\quad t_2 = a.$$

Оскільки $|t| \geq 2$, то:

1) якщо $t_1 = \frac{a}{2}$, то $\left|\frac{a}{2}\right| \geq 2$, тобто $|a| \geq 4$;

2) якщо $t_2 = a$, то $|a| \geq 2$.

Виконаємо зворотну заміну й розглянемо два рівняння:

$$\boxed{tgx + ctgx = \frac{a}{2}\ \ (1)\ \ \text{та}\ \ tgx + ctgx = a\ \ (2).}$$

Розв'яжемо ці рівняння.

Рівняння (1): Нехай $tgx + ctgx = \frac{a}{2}$,

$tgx + \frac{1}{tgx} = \frac{a}{2}$, тоді $2tg^2 x - atgx + 2 = 0$.

Отже $tgx = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{4}$,

$x = arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{4} + \pi k$, де $k \in Z$ при умові, що $|a| \geq 4$.

Або:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{a}{2}, \\ \sin(2x) = \frac{4}{a}, \\ x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{4}{a} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z. \end{array}\right]$$

Рівняння (2): Нехай $tgx + ctgx = a$, $tgx + \frac{1}{tgx} = a$, тоді $tg^2 x - atgx + 1 = 0$.

Отже $tgx = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$, $x = arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi k$, де $k \in Z$ при умові, що $|a| \geq 2$.

Або:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = a, \\ \sin(2x) = \frac{2}{a}, \\ x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2}{a} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z. \end{array}\right]$$

Отже **відповідь:**

якщо $a \in (-2; 2)$, то $x = \varnothing$;

якщо $2 \leq |a| < 4$, то $x = arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi k$, де $k \in Z$;

якщо $|a| \geq 4$, то $x = arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} + \pi k$, де $k \in Z$ та

$x = arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{4} + \pi k$, де $k \in Z$.

Або:

якщо $a \in (-2; 2)$, то $x = \varnothing$;

якщо $2 \leq |a| < 4$, то $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2}{a} + \frac{\pi k}{2}$, де $k \in Z$;

якщо $|a| \geq 4$, то $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2}{a} + \frac{\pi k}{2}$, де $k \in Z$ та

$x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{4}{a} + \frac{\pi k}{2}$, де $k \in Z$.

Завдання 38. Знайдіть всі значення параметра a, при яких нерівність
$a \cdot 9^x + 4(a-1) \cdot 3^x + a > 1$ виконується при всіх дійсних значеннях x.

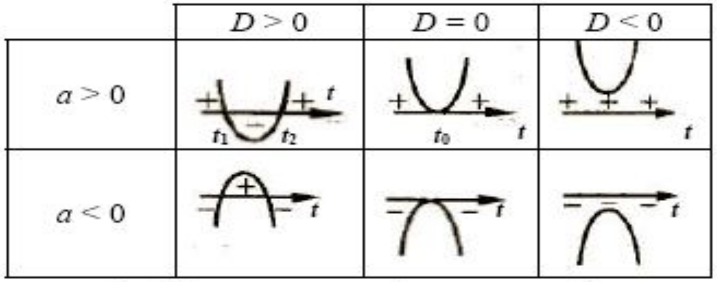
Розв'язання.

Задана нерівність рівносильна нерівності $a \cdot 3^{2x} + 4(a-1) \cdot 3^x + a - 1 > 0$, з якої після заміни $3^x = t$, де $t > 0$ одержуємо рівносильну нерівність $at^2 + 4(a-1)\,t + a - 1 > 0$. (1)

Для нерівності (1) вимога задачі означає, що потрібно знайти всі значення a, при яких ця нерівність виконується для всіх значень $t > 0$.

При $a = 0$ одержуємо нерівність $-4t - 1 > 0$, тобто $t < -0{,}25$, яка не виконується для всіх $t > 0$. Отже, $a = 0$ не задовольняє умову задачі.

Позначимо $f(t) = at^2 + 4(a-1)\,t + a - 1$. При $a \neq 0$ це квадратична функція і її графіком є парабола. Згадуємо всі можливі варіанти розміщення параболи відносно осі абсцис (див. таблицю) ($D = 16(a-1)^2 - 4a(a-1) = 4(a-1)(3a-4)$).



Як бачимо, **при $a < 0$** нерівність (1) (тобто $f(t) > 0$) не може виконуватися для всіх $t > 0$.

При $a > 0$ нерівність $f(t) > 0$ буде виконуватися для всіх $t > 0$ в трьох випадках.

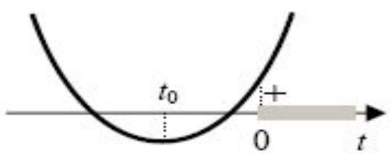
1. Якщо **$a > 0$ і $D < 0$**, то нерівність $f(t) > 0$ буде виконуватися для всіх дійсних значень t, а, значить, буде виконуватися і при $t > 0$. Одержуємо систему $\begin{cases} a > 0, \\ 4(a-1)(3a-4) < 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} a > 0, \\ 1 < a < \frac{4}{3}. \end{cases}$ Отже, $1 < a < \frac{4}{3}$.

2. Якщо **$D = 0$**, то нерівність $f(t) > 0$ буде виконуватися для всіх $t \neq t_0$, тобто для всіх $t \neq \frac{2(1-a)}{a}$.

$D = 0$ при $4(a-1)(3a-4) = 0$, тобто при $a = 1$ або $a = \frac{4}{3}$. Якщо $a = 1$, то $t_0 = 0$ і умова задачі виконується.

Якщо $a = \frac{4}{3}$, то $t_0 = -\frac{1}{2}$ і умова задачі теж виконується. Отже, $a = 1$ і $a = \frac{4}{3}$ задовольняють умову задачі.

3. Якщо **$D > 0$**, то нерівність $f(t) > 0$ буде виконуватися для всіх $t > 0$, тоді і тільки тоді, коли обидва корені t_1 і t_2 квадратного тричлена $f(t)$ не будуть додатними (див. рисунок). А це буде тоді і тільки тоді, коли буде виконуватися система умов $\begin{cases} a > 0, \\ D > 0, \\ f(0) \geq 0, \\ t_0 < 0. \end{cases}$



Одержуємо систему $\begin{cases} a > 0, \\ 4(a-1)(3a-4) > 0, \\ a - 1 \geq 0, \\ \frac{2(1-a)}{a} < 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} a > 0, \\ a < 1 \text{ або } a > \frac{4}{3}, \\ a \geq 1, \\ a < 0 \text{ або } a > 1, \end{cases}$ тобто $a > \frac{4}{3}$.

Об'єднуючи всі одержані значення параметра, одержуємо *відповідь*: $a \geq 1$.

6.2. Дослідницькі задачі з параметрами

Деякі дослідницькі задачі з параметрами вдається розв'язати за такою схемою: 1) *розв'язати задане рівняння чи нерівність;* 2) *дослідити одержаний розв'язок.*

Приклад 1. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7}=0$ має єдиний корінь.

Розв'язання	*Коментар*
▶ ОДЗ: $x \neq -7$. На ОДЗ одержуємо рівносильне рівняння $(x+a)(x-5a)=0$. Тоді $x+a=0$ або $x-5a=0$. Одержуємо $x=-a$ або $x=5a$. Урахуємо ОДЗ. Для цього з'ясуємо, коли $x=-7$: $-a=-7$ при $a=7$, $5a=-7$ при $a=-\frac{7}{5}$. Тоді при $a=7$ одержуємо: $x=-a=-7$ — сторонній корінь; $x=5a=35$ – єдиний корінь. При $a=-\frac{7}{5}$ одержуємо: $x=5a=-7$ — сторонній корінь; $x=-a=\frac{7}{5}$ — єдиний корінь. Також задане рівняння матиме єдиний корінь, якщо $-a=5a$, тобто при $a=0$ (тоді $x=-a=0$ та $x=5a=0 \neq$ $\neq -7$). *Відповідь*: $a=7$, $a=-\frac{7}{5}$, $a=0$. ◁	Оскільки дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, то на ОДЗ ($x+7 \neq 0$) задане рівняння рівносильне рівнянню $(x+a)(x-5a)=0$. Далі враховуємо, що добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю (а другий має зміст). Після цього з'ясуємо, при яких значеннях a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто $x=-7$: прирівнюємо корені до -7 і знаходимо відповідні значення a. При знайдених значеннях a один із двох одержаних коренів буде стороннім ($x=-7$) і рівняння матиме єдиний корінь (одне значення кореня). Крім того, задане рівняння матиме єдиний корінь ще й у тому випадку, коли два одержані корені ($x=-a$ та $x=5a$) збігатимуться (і входитимуть до ОДЗ).

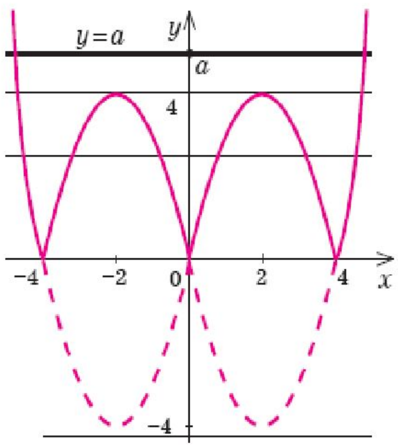
Дослідження кількості розв'язків рівнянь та їх систем. При розв'язуванні деяких завдань із параметрами можна користуватися таким орієнтиром: *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації часто зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.*

Достатньо простим є відповідне дослідження в тому випадку, коли задане рівняння можна подати у вигляді $f(x)=a$, оскільки графік функції $y=a$ — це пряма, паралельна осі Ox (яка перетинає вісь Oy у точці a). Відзначимо, що, замінюючи задане рівняння на рівняння $f(x)=a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й задане, а отже, і кількість коренів у них буде однаковою. Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x)=a$, достатньо визначити, скільки точок перетину має графік функції $y=f(x)$ з прямою $y=a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Приклад 2. Скільки коренів має рівняння $|x^2-4|x||=a$ залежно від значення параметра a?

Розв'язання	*Коментар*
▶ Побудуємо графіки функцій $y=\|x^2-4\|x\|\|$ та $y=a$. Аналізуючи взаємне розміщення одержаних графіків, отримуємо *відповідь*:	Оскільки в цьому завданні мова йде про кількість розв'язків рівняння, то для аналізу заданої ситуації спробуємо використати графічну ілюстрацію розв'язування.

1) при $a < 0$ рівняння коренів не має;
2) при $a = 0$ рівняння має 3 корені;
3) при $a < 0 < 4$ рівняння має 6 коренів;
4) при $a = 4$ рівняння має 4 корені;
5) при $a > 4$ рівняння має 2 корені.



1. Будуємо графік функції
$$y = |\, x^2 - 4\,|\,x\,|\,|$$
(ураховуючи, що $x^2 = |\,x\,|^2$, побудова може відбуватися, наприклад, за такими етапами:
$$x^2 - 4x \to |\,x\,|^2 - 4\,|\,x\,| \to$$
$$\to |\,x^2 - 4\,|\,x\,|\,|).$$
2. Будуємо графік функції $y = a$.
3. Аналізуємо взаємне розміщення одержаних графіків і записуємо відповідь (кількість коренів рівняння $f(x) = a$ дорівнює кількості точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з прямою $y = a$).

◁

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-a} > x+1$.

Коментар

Спочатку скористаємося рівносильними перетвореннями:

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Якщо в одержані системи параметр а входить лінійно, то в таких випадках іноді буває зручно виразити параметр через змінну, розглянути параметр як функцію від цієї змінної і використати графічну ілюстрацію розв'язування нерівностей (у системі координат xOa).

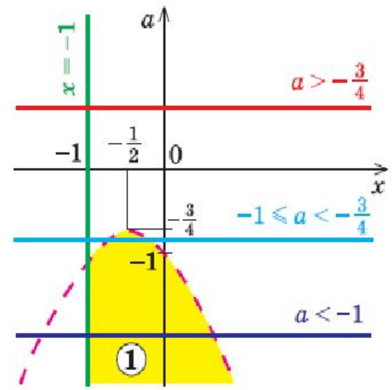
Зазначимо, що для зображення розв'язків сукупності нерівностей зручно використовувати дві системи координат, у яких осі Ox розташовані на одній прямій, і на кожній виділяти штриховкою відповідні розв'язки.

При різних значеннях a пряма $a = \text{const}$ або не перетинає заштриховані області (при $a \geqslant -\frac{3}{4}$), або перетинає їх по відрізках. Абсциси точок перетину є розв'язками систем (1) і (2), а отже, і розв'язками заданої нерівності.

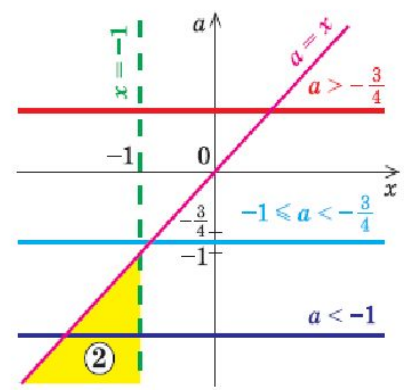
Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна сукупності систем:
$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$
Тоді
$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \qquad (1)$$
або
$$\begin{cases} a \leqslant x, \\ x < -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Зобразимо графічно розв'язки систем нерівностей (1) і (2) у системі координат xOa (на рис. 103, *а*, *б* зафарбовано відповідні області ① і ②).



а



б

Рис. 103

Бачимо, що: $\boxed{\text{при } a \geqslant -\frac{3}{4}}$ розв'язків немає (немає зафарбованих точок); $\boxed{\text{якщо } -1 \leqslant a < -\frac{3}{4},}$ то пряма $a = \text{const}$ перетинає тільки заштри-

Зазначимо, що значну кількість дослідницьких завдань не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими). Тому часто доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння або нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, давати відповідь на запитання задачі.

Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, можна використовувати такий орієнтир.

Якщо в рівнянні $f(x) = 0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом з будь-яким коренем α ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад 3. Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння

$$x^4 - a\,|x|^3 + a^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

має єдиний корінь.

Розв'язання

Функція $f(x) = x^4 - a\,|x|^3 + a^2 - 4$ є парною ($D(f) = R$, $f(-x) = f(x)$).

Якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння (1), то $x = -\alpha$ теж є коренем цього рівняння. Тому єдиний корінь у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли $\alpha = -\alpha$, тобто $\alpha = 0$. Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки $x = 0$. Якщо $x = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2 - 4 = 0$, тоді $a = 2$ або $a = -2$.

При $a = 2$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4 - 2\,|x|^3 = 0$. Тоді $|x|^4 - 2\,|x|^3 = 0$, $|x|^3 \cdot (|x| - 2) = 0$. Одержуємо $|x|^3 = 0$ (тоді $|x| = 0$, тобто $x = 0$) або $|x| - 2 = 0$ (тоді $|x| = 2$, тобто $x = \pm 2$). Отже, при $a = 2$ рівняння (1) має три корені, тобто умова задачі не виконується.

При $a = -2$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^4 + 2\,|x|^3 = 0$. Тоді $|x|^4 + 2\,|x|^3 = 0$, $|x|^3 \cdot (|x| + 2) = 0$. Оскільки $|x| + 2 \neq 0$, то одержуємо $|x|^3 = 0$. Тоді $|x| = 0$, тобто $x = 0$ — єдиний корінь. Отже, $a = -2$ задовольняє умові задачі.

Відповідь: a = −2. ◁

Коментар

Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — правильна числова рівність. Ураховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Отже, $x = -\alpha$ — теж корінь рівняння $f(x) = 0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ збігаються. Тоді $x = \alpha = -\alpha = 0$.

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x = 0$ є коренем рівняння (1). (Це значення $a = 2$ і $a = -2$.)

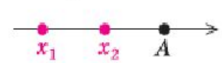
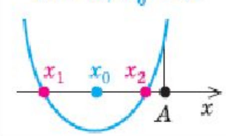
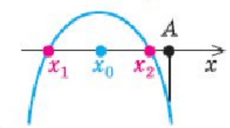
Оскільки значення $a = 2$ і $a = -2$ ми одержали з умови, що $x = 0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

При розв'язуванні одержаних рівнянь доцільно використати, що $x^4 = |x|^4$.

6.3. Використання умов розміщення коренів квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) відносно заданих чисел A і B

Розв'язування деяких дослідницьких задач з параметрами можна звести до використання необхідних і достатніх умов розміщення коренів квадратного тричлена. Основні з цих умов наведено в таблиці 16 (у таблиці використано традиційні позначення: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$).

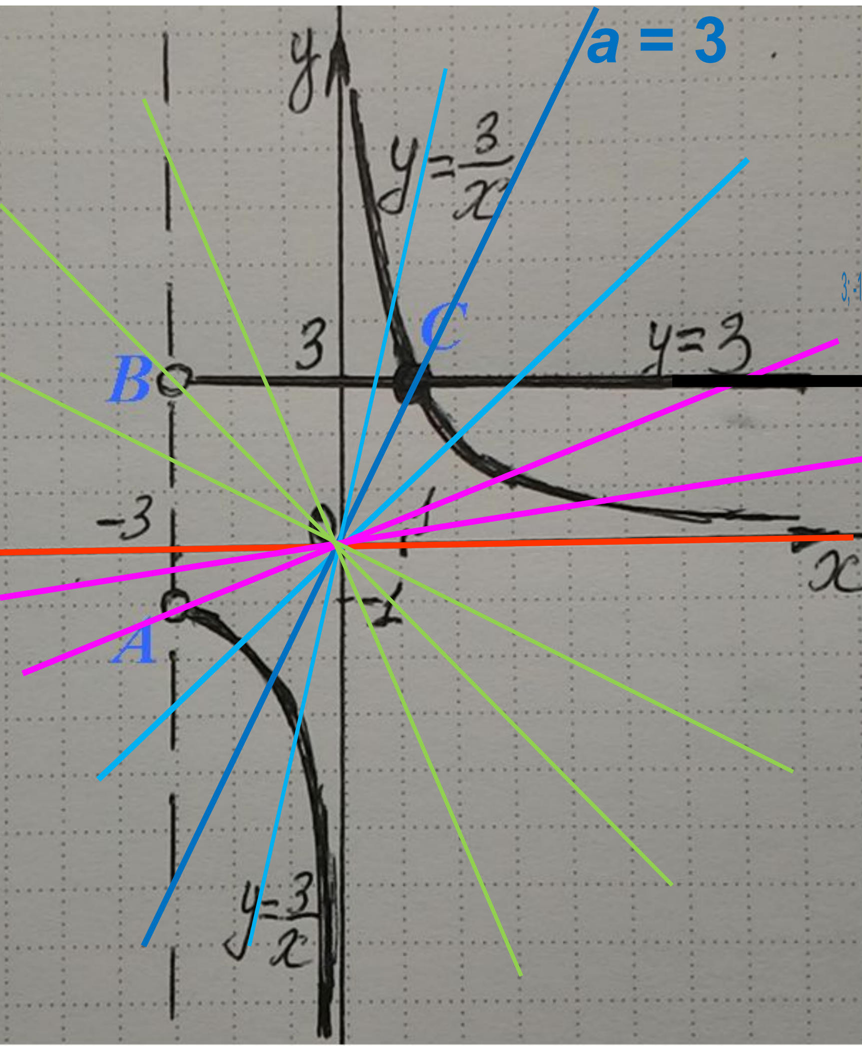
Таблиця 16

Розміщення коренів	Необхідні і достатні умови розміщення коренів		
	при $a > 0$	при $a < 0$	у загальному випадку ($a \neq 0$)
1. $x_1 < A$, $x_2 < A$ 	$f(A) > 0$, $D \geq 0$; $x_0 < A$ 	$f(A) < 0$, $D \geq 0$; $x_0 < A$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geq 0, \\ x_0 < A \end{cases}$

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0 \\ y=ax \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ y=3 \text{ или } y=\dfrac{3}{x}, \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения



3; -1) Прямая y = ax проходит через A.
-1 = -3a, a = 1/3

A(- 3; -1) Прямая $y = ax$ проходит через A.

$-1 = -3a, \quad a = \frac{1}{3}$

C(1; 3) Прямая $y = ax$ проходит через C.

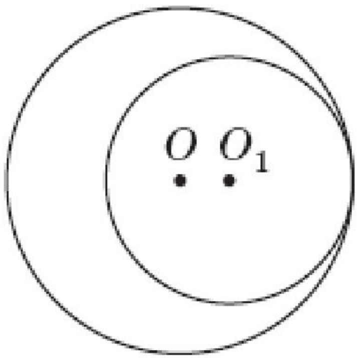
$3 = 1a, \quad a = 3.$

A(- 3; -1) Прямая $y = ax$ проходит через A.

$-1 = -3a, \quad a = \frac{1}{3}$

ГЕОМЕТРІЯ

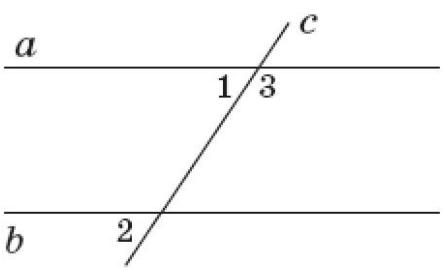
1. Два кола з центрами в точках O і O_1 мають внутрішній дотик (див. рисунок). Обчисліть відстань OO_1, якщо радіуси кіл дорівнюють 12 *см* і 8 *см*.



А	Б	В	Г	Д
1,5 *см*	2 *см*	3 *см*	4 *см*	8 *см*

7. Пряма c перетинає паралельні прямі a і b (див. рисунок). Які з наведених тверджень є правильними для кутів 1, 2, 3?

I. $\angle 1$ і $\angle 3$ – суміжні.
II. $\angle 1 = \angle 2$.
III. $\angle 2 + \angle 3 = 180^{\circ}$.



А	Б	В	Г	Д
лише I	лише I і III	лише III	лише I і II	I, II та III

8. Укажіть *хибне* твердження.

А Протилежні сторони паралелограма рівні.

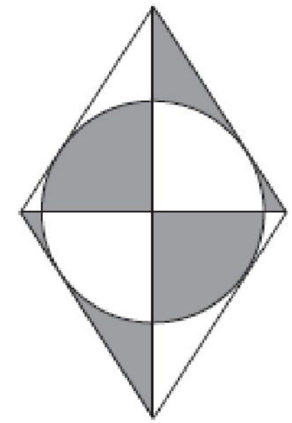
Б Сума двох кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°.

В Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Г Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус кута між ними.

Д Площа паралелограма дорівнює половині добутку його сторони на висоту,

14. На рисунку зображено ромб, площа якого дорівнює 96 $см^2$. У ромб вписано коло. Визначте площу зафарбованої фігури.

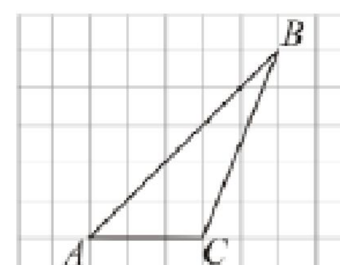


А	Б	В	Г	Д
24 $см^2$	32 $см^2$	48 $см^2$	64 $см^2$	72 $см^2$

6. При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3; 5)$ і $\vec{b}(6; y)$ колінеарні?

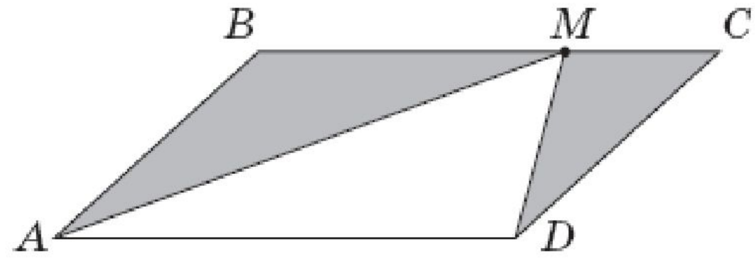
А	Б	В	Г	Д
−10	−2,5	2,5	3,6	10

16. На папері у клітинку зображено трикутник ABC, вершини якого збігаються з вершинами клітинок (див. рисунок). Знайдіть площу трикутника ABC, якщо кожна клітинка є квадратом зі стороною завдовжки 1 *см*.



А	Б	В	Г	Д
15 $см^2$	8,5 $см^2$	8 $см^2$	7,5 $см^2$	7 $см^2$

16. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює 60 $см^2$. Точка M належить стороні BC. Визначте площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників.



А	Б	В	Г	Д
45 $см^2$	40 $см^2$	35 $см^2$	30 $см^2$	20 $см^2$

6. При якому значенні y вектори $\vec{a}(-3; 5)$ і $\vec{b}(6; y)$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
−10	−2,5	2,5	3,6	10

15. Укажіть УСІ ПРАВИЛЬНІ твердження.

I. Через точку A, що не належить площині α, можна провести лише одну пряму, паралельну площині α.

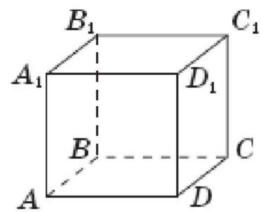
II. Через точку A, що не належить площині α, можна провести лише одну площину, паралельну площині α.

III. Через точку A, що не належить площині α, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до площини α.

IV. Через точку A, що не належить площині α, можна провести лише одну площину, перпендикулярну до площини α.

А	Б	В	Г	Д
II	II, III	I, IV	I, III, IV	II, III, IV

24. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення		*Закінчення речення*	
1	Пряма CB	**А**	паралельна площині AA_1B_1B.
2	Пряма CD_1	**Б**	перпендикулярна площині AA_1B_1B.
3	Пряма AC	**В**	належить площині AA_1B_1B.
4	Пряма A_1B	**Г**	має з площиною AA_1B_1B лише дві спільні точки.
		Д	утворює з площиною AA_1B_1B кут 45°.

35. **Основою піраміди є прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює $4\sqrt{3}$ *см*, гострий кут – 30°.**

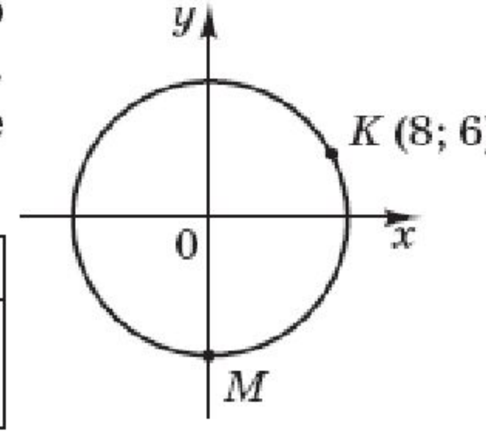
Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм піраміди (у $см^3$).

31. Радіус основи конуса R, твірна нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Ця площина перетинає основу конуса по хорді. Знайдіть площу утвореного перерізу.

31. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, де $AB = BC = 25$ *см*, $AC = 30$ *см*. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC. Визначте об'єм призми (у $см^3$), якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 $см^2$.

33. У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 *см* і основами 18 *см* і 8 *см*, вписано конус. Знайдіть площу бічної поверхні конуса $S_{бічне}$(у $см^2$), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. У відповіді запишіть значення $\frac{S_{бічне}}{\ }$.

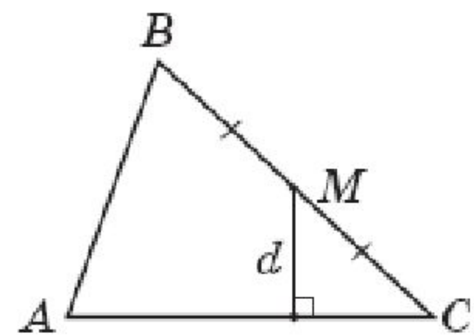
15. На координатній площині xy зображено коло, центр якого збігається з початком координат (див. рисунок). Точки $K(8;\ 6)$ і $M(x;\ y)$ належать цьому колу. Визначте координати точки M.



А	Б	В	Г	Д
(−10; 0)	(10; 0)	(0; −14)	(0; −10)	(0; 10)

Правильна відповідь: Г.

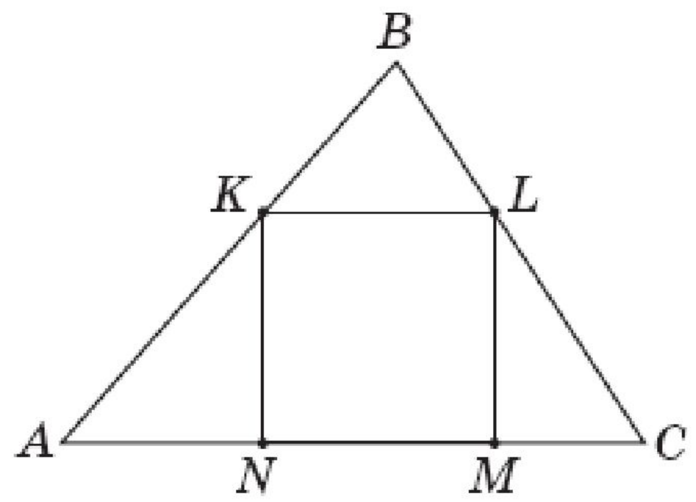
16. У трикутнику ABC точка M – середина сторони BC, $AC = 24$ *см* (див. рисунок). Знайдіть відстань d від точки M до сторони AC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 *см*^{2}.



А	Б	В	Г	Д
2 *см*	3 *см*	4 *см*	6 *см*	8 *см*

Правильна відповідь: В.

20. У трикутник ABC вписано квадрат $KLMN$ (див. рисунок). Висота цього трикутника, проведена до сторони AC, дорівнює 6 *см*. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AC = 10$ *см*.



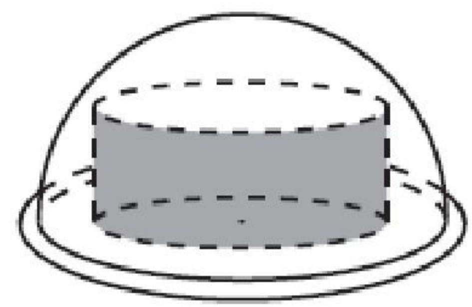
А	Б	В	Г	Д
7,5 *см*	12,5 *см*	17,5 *см*	15 *см*	20 *см*

28. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його більшу сторону BC в точці M. Визначте радіус кола (у *см*), описаного навколо прямокутника, якщо $BC = 24$ *см*, $AM = 10\sqrt{2}$ *см*.

17. Переріз кулі площиною має площу 81π *см*^{2}. Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу, якщо радіус кулі дорівнює 15 *см*.

А	Б	В	Г	Д
6 *см*	8 *см*	9 *см*	12 *см*	15 *см*

20. Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 *см*. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (див. рисунок). Радіус півсфери дорівнює 12 *см* і є меншим за радіус круга. Укажіть *найбільше* з наведених значень, якому *може* дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки.



А	Б	В	Г	Д
3 *см*	5 *см*	6 *см*	7 *см*	8 *см*

16. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 *см*, а бічне ребро – 5 *см*. Визначте косинус кута між бічним ребром і площиною основи.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$

32. Основою піраміди $SABCD$ є трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), довжина середньої лінії якої дорівнює 5 *см*. Бічне ребро SB перпендикулярне до площини основи піраміди і вдвічі більше від середньої лінії трапеції $ABCD$. Знайдіть відстань від середини ребра SD до площини SBC (у *см*), якщо об'єм піраміди дорівнює $210\ см^3$.

31. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, де $AB = BC = 25$ *см*, $AC = 30$ *см*. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC. Визначте об'єм призми (у $см^3$), якщо площа утвореного перерізу дорівнює $72\ см^2$.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

21. Кодовий замок на дверях має десять кнопок, на яких нанесено десять різних цифр (див. рисунок). Щоб відчинити двері, потрібно одночасно натиснути дві кнопки, цифри на яких складають код замка. Скільки всього існує різних варіантів коду замка? Уважайте, що коди, утворені перестановкою цифр (наприклад, 1-2 і 2-1), є однаковими.

А	Б	В	Г	Д
100	90	45	20	10

26. Скільки всього різних двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 5, 7 і 8 так, щоб у кожному числі всі цифри не повторювалися?

15. Пасічник зберігає мед в однакових закритих металевих бідонах. Їх у нього дванадцять: у трьох бідонах міститься квітковий мед, у чотирьох – мед із липи, у п'яти – мед із гречки. Знайдіть імовірність того, що перший навмання відкритий бідон буде містити квітковий мед.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$

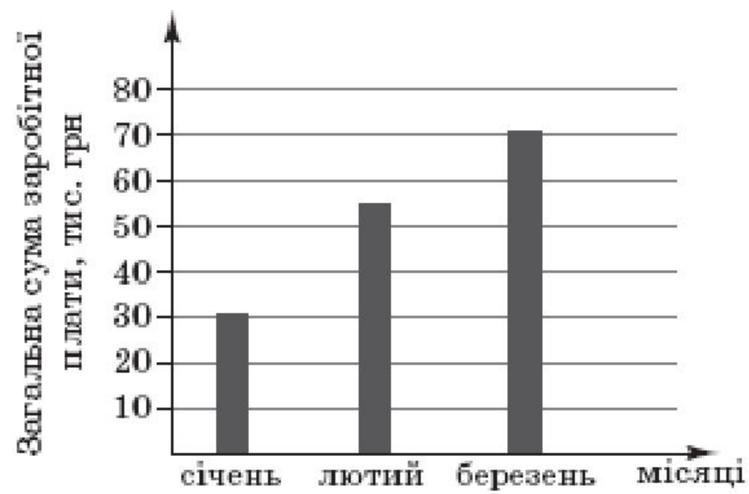
31. У відділі працює певна кількість чоловіків і жінок. Для анкетування навмання вибрали одного із співробітників. Імовірність того, що це чоловік, дорівнює $\frac{2}{7}$. Знайдіть відношення кількості жінок до кількості чоловіків, які працюють у цьому відділі.

29. В автобусному парку налічується n автобусів, шосту частину яких було обладнано інформаційними табло. Пізніше інформаційні табло встановили ще на 4 автобуси з наявних у парку. Після проведеного переобладнання навмання вибирають один з n автобусів парку. Ймовірність того, що це буде автобус з інформаційним табло, становить 0,25. Визначте n. Уважайте, що кожен автобус обладнується лише одним табло.

31. У фестивалі беруть участь 25 гуртів, серед яких є по одному гурту з України і Чехії. Порядок виступу гуртів визначається жеребкуванням, за яким кожен із гуртів має однакові шанси отримати будь-який порядковий номер від 1 до 25. Знайдіть імовірність того, що на цьому фестивалі гурт з України виступатиме першим, а порядковий номер виступу гурту з Чехії буде парним.

Правильна відповідь: 0,02.

10. На діаграмі відображено нараховану фірмою загальну суму заробітної плати усім своїм працівникам у січні, лютому та березні 2011 року. У січні на фірмі працювали 15 співробітників, у лютому – 18, а в березні – 25. Як змінилася *середня* нарахована заробітна плата в цій фірмі в березні порівняно з січнем?



А	Б	В	Г	Д
зменшилась більше ніж на 1000 *грн*	зменшилась менше ніж на 1000 *грн*	не змінилась	збільшилась менше ніж на 1000 *грн*	збільшилась більше ніж на 1000 *грн*

Особливості підготовки учнів до розв’язування відкритих завдань з розгорнутою відповіддю з стереометрії

Геометрія

СТЕРЕОМЕТРІЯ

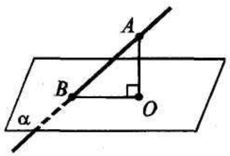
Обгрунтовується тільки те, що буде використано в розв’язанні

Задачі, пов’язані з многогранниками

- **1. Обґрунтувати положення висоти многогранника.**
- **2. Обґрунтувати, що просторові кути і просторові відстані позначені правильно.**
- **3. Якщо розглядається переріз многогранника, то обґрунтувати його форму (якщо ця форма використовується для розв‘язування)**
- **4. Якщо розглядається комбінація многогранника та тіла обертання, то описати взаємне розміщення їх елементів.**
- **5. На кожному кроці розв’язування вказуємо, з якого трикутника визначаємо елементи і, якщо він прямокутний, пояснюємо чому**

КУТИ У ПРОСТОРІ

1. Кут між прямою і площиною



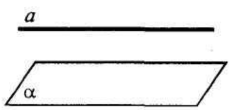
Означення: кутом між прямою і площиною, що її перетинає, називається кут між цією прямою та її проекцією на площину.

$\angle ABO$ — кут між прямою AB і площиною α

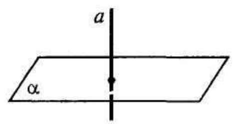
(BO — проекція AB на площину α, $AO \perp \alpha$)

Особливі випадки

1) $a \parallel \alpha$ / a лежить в α $\Leftrightarrow$ $\angle(a, \alpha) = 0$

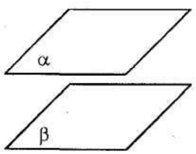


2) $a \perp \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\angle(a, \alpha) = 90°$



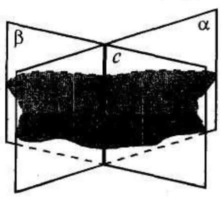
2. Кут між площинами

1) $\alpha \parallel \beta$ / $\alpha = \beta$ $\Leftrightarrow$ $\angle(\alpha, \beta) = 0$



2) α перетинає β по прямій c. Проведемо площину $\gamma \perp$

Означення: кутом між площинами α і β, що перенаються, називається кут між прями по яких площина γ перетинає площи α і β.

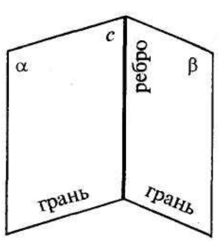


$\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$

(γ перетинає α по прямій
γ перетинає β по прямій

$0° \leqslant \angle(\alpha, \beta) \leqslant 90°$

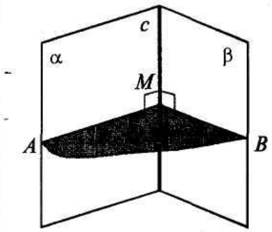
3. Двогранний кут (кут між півплощинами)



Означення: двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує.

Півплощини α і β — грані двогранного кута,
c — ребро двогранного кута.

Лінійний кут двогранного кута



Означення: лінійним кутом двогранного кута називається кут між променями, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані.

$\angle AMB$ — лінійний кут

($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA, γ перетинає β по променю MB)

$0° \leqslant \angle AMB \leqslant 180°$

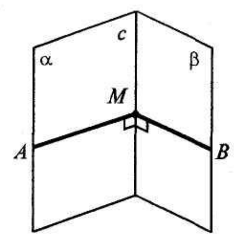
Властивість

Оскільки пл. $AMB \perp c$, то пл. $AMB \perp \alpha$ і пл. $AMB \perp \beta$, тобто ***площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута.***

Практичні способи побудови лінійного кута

$M \in c$,
$MA \perp c$ (у грані α),
$MB \perp c$ (у грані β).

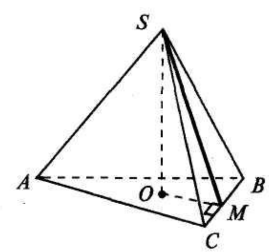
$\angle AMB$ — лінійний



$SO \perp$ пл. ABC
(SO — висота піраміди).

Проводимо $OM \perp BC$ і з'єднуємо точки S і M. Тоді $SM \perp BC$ за теоремою про три перпендикуляри, тому

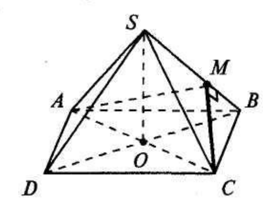
$\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC



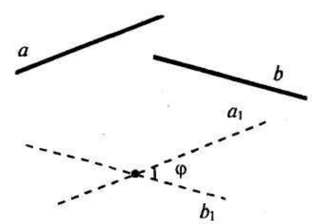
$SABCD$ — правильна піраміда.

Проводимо $CM \perp SB$ і з'єднуємо точки A і M. Тоді
$\Delta AMB = \Delta CMB$
(за двома сторонами і кутом між ними), отже,
$\angle AMB = \angle CMB = 90°$,
тобто $AM \perp SB$ і

$\angle AMC$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі SB



4. Кут між мимобіжними прямими



Означення: кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.

$a_1 \parallel a$; $b_1 \parallel b$

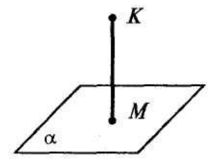
$\angle(a; b) = \angle(a_1; b_1) = \varphi$
(менший із суміжних кутів)

$0° < \angle(a; b) \leqslant 90°$

ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ
(способи, які використовуються для їх обчислення)

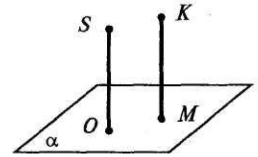
1. Відстань від точки до площини (ρ — відстань)

Проводимо $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$).



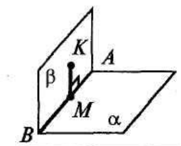
$KM = \rho\ (K;\ \alpha)$

$SO \perp \alpha$. Проводимо $KM \parallel SO$. Тоді $KM \perp \alpha$ і



$KM = \rho\ (K;\ \alpha)$

Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB). Проводимо $KM \perp AB$. Тоді $KM \perp \alpha$ і



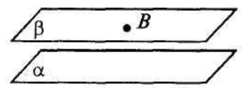
$KM = \rho\ (K;\ \alpha)$

2. Відстань між паралельними прямою і площиною

$a \parallel \alpha$	$A \in a$
$\rho\ (a;\ \alpha) = \rho\ (A;\ \alpha)$	

Вибираємо на прямій a довільну точку A і знаходимо відстань від цієї точки до площини α.

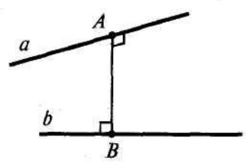
3. Відстань між паралельними площинами



$\beta \parallel \alpha$	$B \in \beta$
$\rho\ (\beta;\ \alpha) = \rho\ (B;\ \alpha)$	

Вибираємо у площині β довільну точку B і знаходимо відстань від цієї точки до площини α.

4. Відстань між мимобіжними прямими



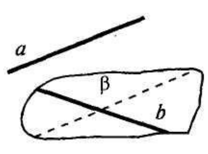
Означення: відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.

$AB \perp a,\ AB \perp b$
$\rho\ (a;\ b) = AB$

прямі a і b — мимобіжні.

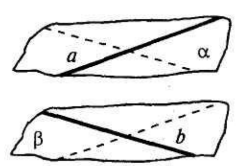
Способи обчислення відстані між мимобіжними прямими

Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.



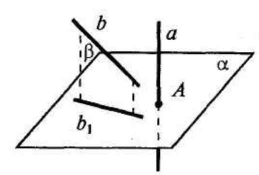
$\rho\ (a;\ b) = \rho\ (a;\ \beta)$

Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.



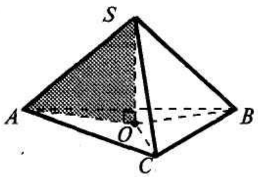
$\rho\ (a;\ b) = \rho\ (\alpha;\ \beta)$

Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проектуємо прямі a і b на цю площину: $a \to A$, $b \to b_1$.



$\rho\ (a;\ b) = \rho\ (A;\ b_1)$

ПОЛОЖЕННЯ ВИСОТИ В ДЕЯКИХ ВИДАХ ПІРАМІД

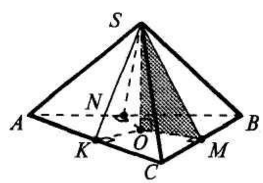


1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні або нахилені під одним кутом до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди,
то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи (і навпаки).

Якщо в піраміді $SABC$: $SA = SB = SC$, або $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$, або $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$ і $SO \perp$ пл. ABC, **то O — центр описаного навколо основи кола ($OA = OB = OC$).**	Якщо в піраміді $SABC$: $SO \perp$ пл. ABC і O — центр кола, описаного навколо основи, **то $SA = SB = SC$ і $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$ і $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$.**

Для розв'язування використовують прямокутний Δ SAO, в якому:

$SO \perp AO$, $AO = R_{\text{опис.}}$ навколо основи кола,
$\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи.



2. Якщо всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи,
то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).

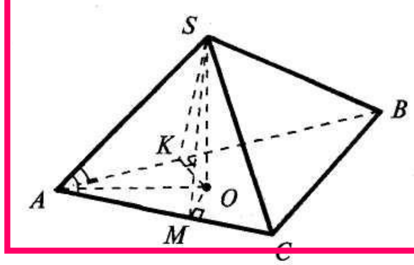
Якщо в піраміді $SABC$: грані SAB, SAC і SBC однаково нахилені до основи ABC (тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — відповідні лінійні кути рівні) і $SO \perp$ пл. ABC, **то O — центр кола, вписаного в основу ($OK = OM = ON = r_{\text{впис.}}$).**	Якщо в піраміді $SABC$: $SO \perp$ пл. ABC і O — центр кола, вписаного в основу, **то $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ (тобто всі бічні грані піраміди нахилені під одним кутом до основи піраміди).**

Для розв'язування використовують прямокутний Δ SOM, в якому:

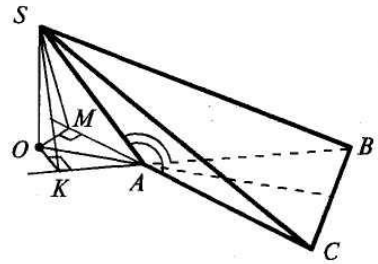
$SO \perp OM$, $OM = r_{\text{впис.}}$ в основу кола ($OM \perp BC$),
$\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані SBC до основи
($\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC).

Для такого виду пірамід виконується формула:

$\boxed{S_{\text{біч.}} = \dfrac{S_{\text{осн.}}}{\cos\varphi}}$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи.

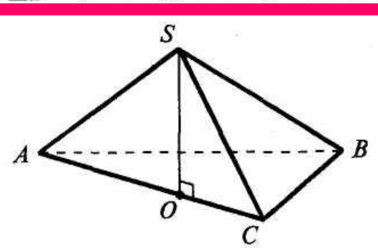


4. Якщо лише дві бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основи,
то це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними з цим ребром сторонами основи (і навпаки).



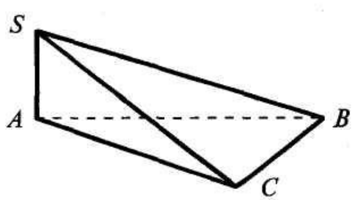
Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB і SAC однаково нахилені до основи ABC (тобто $\angle SKO = \angle SMO$) або $\angle SAB = \angle SAC$ і $SO \perp$ пл. ABC,
то AO — бісектриса $\angle BAC$ (або пряма AO містить бісектрису $\angle BAC$).

Якщо в піраміді $SABC$
$SO \perp$ пл. ABC і AO — бісектриса $\angle BAC$
(або пряма AO містить бісектрису $\angle BAC$),
то $\angle SKO = \angle SMO$ (грані SAB і SAC однаково нахилені до основи) і $\angle SAB = \angle SAC$.



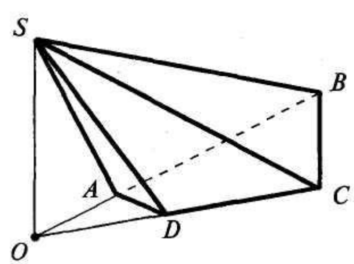
5. Якщо лише одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи,
то висотою піраміди буде висота цієї грані.

Якщо у піраміді $SABC$:
пл. $SAC \perp$ пл. ABC
і $SO \perp AC$ ($O \in AC$),
то SO — висота піраміди ($SO \perp$ пл. ABC).



6. Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,
то висотою піраміди буде їх спільне бічне ребро.

Якщо пл. $SAB \perp$ пл. ABC
і пл. $SAC \perp$ пл. ABC,
то SA — висота піраміди ($SA \perp$ пл. ABC).

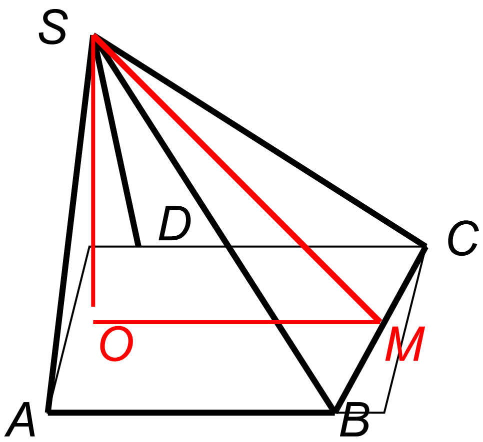


7. Якщо дві не суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,
то висотою піраміди буде відрізок прямої, по якій перетинаються площини цих граней.

Якщо пл. $SAB \perp$ пл. $ABCD$,
пл. $SCD \perp$ пл. $ABCD$
і пл. SAB перетинає пл. SCD по прямій SO ($O \in$ пл. $ABCD$),
то SO — висота піраміди.

36. Основою піраміди *SABCD* є квадрат *ABCD*. Грань *SAD* - правильний трикутник, площина якого перпендикулярна до площини основи. Знайдіть кут нахилу грані *SBC* до основи.

36. Основою піраміди *SABCD* є квадрат *ABCD.* Грань *SAD* - правильний трикутник, площина якого перпендикулярна до площини основи. Знайдіть кут нахилу грані *SBC* до основи.

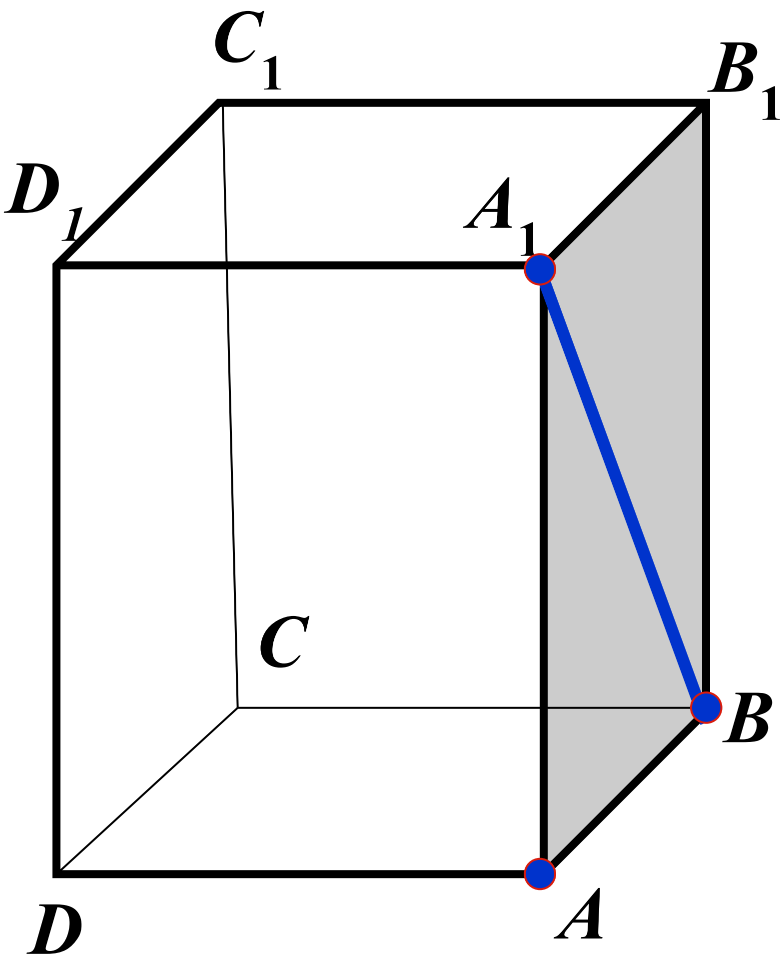


1. Пл. *SAD* ⊥ пл. *ABCD.* Проведемо *SO* ⊥ *AD,* тоді *SO* ⊥ пл. *ABCD,* тобто *SO* – висота піраміди.
2. Проведемо *OM* ⊥ *BC*, тоді *S M* ⊥ *BC* (за теоремою про три перпендикуляри), отже, ∠ *S M O* – лінійний кут двогранного кута при ребрі *BC*, тобто кут нахилу грані *SBC* до основи.
3. Нехай *AD* = *x* (*x* > 0). З правильного трикутника *SAD* його висота *SO* = $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Враховуючи, що *ABCD* - квадрат і *OM* ⊥ *BC*, одержуємо, що *OM* = *x.*

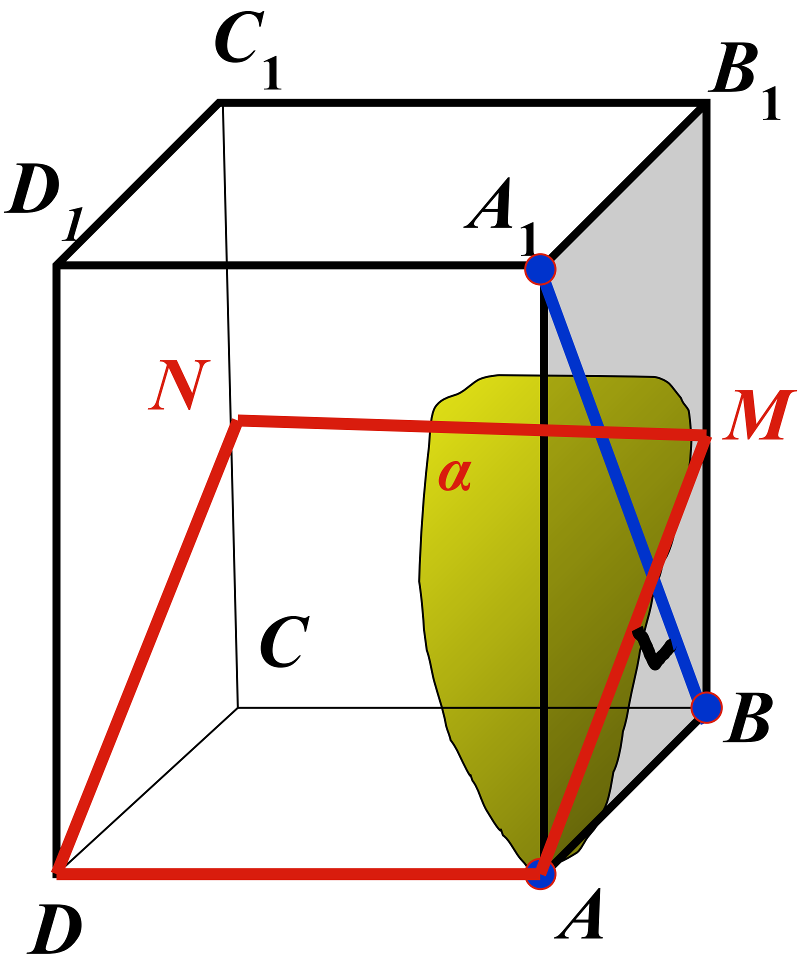
4. З прямокутного трикутника *SOM* (*SO* ⊥ пл. *ABCD*):

$$tg\angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ тоді $$\angle SMO = arctg\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат *ABCD* зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину *A перпендикулярно до прямої* BA_1



Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат *ABCD* зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину *A* перпендикулярно до прямої BA_1



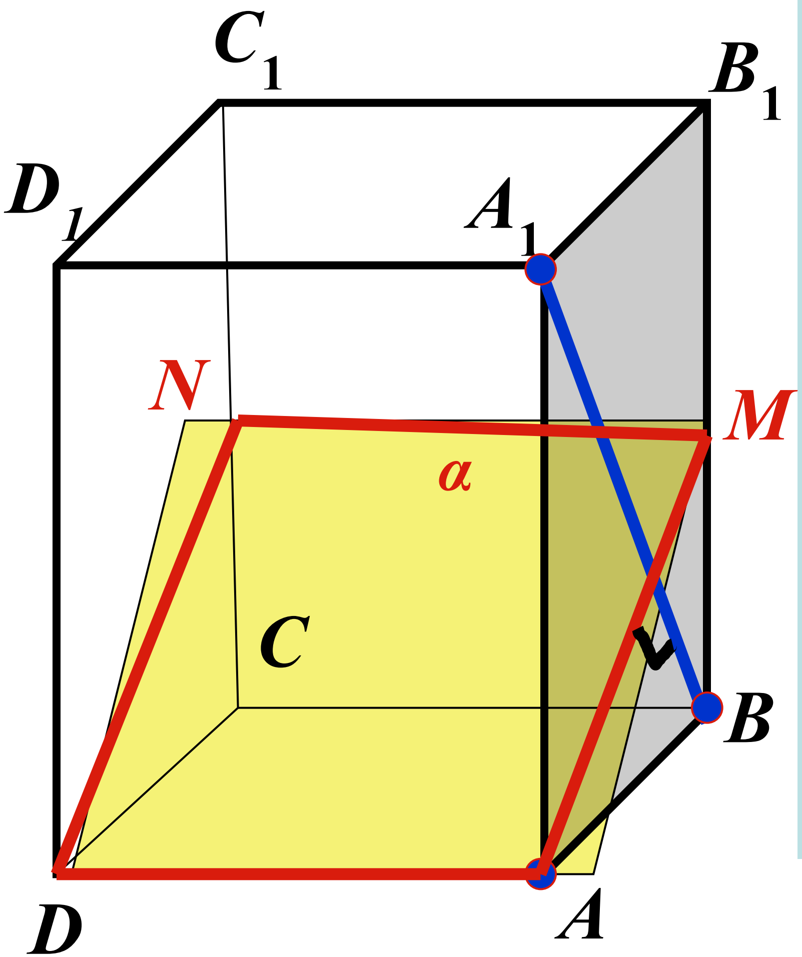
- **І Спосіб одержання перерізу**

1. **Користуючись тим, що** $\alpha \perp BA_1$, **одержуємо, що** α **проходить через** AD **і** $AM \perp BA_1$.

- **ІІ Спосіб одержання перерізу**

1. **Побудувати** $AM \perp BA_1$, **провести через** AM **і** AD **площину** α **і довести, що** $\alpha \perp BA_1$.

Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат *ABCD* зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину *A* *перпендикулярно до прямої* BA_1



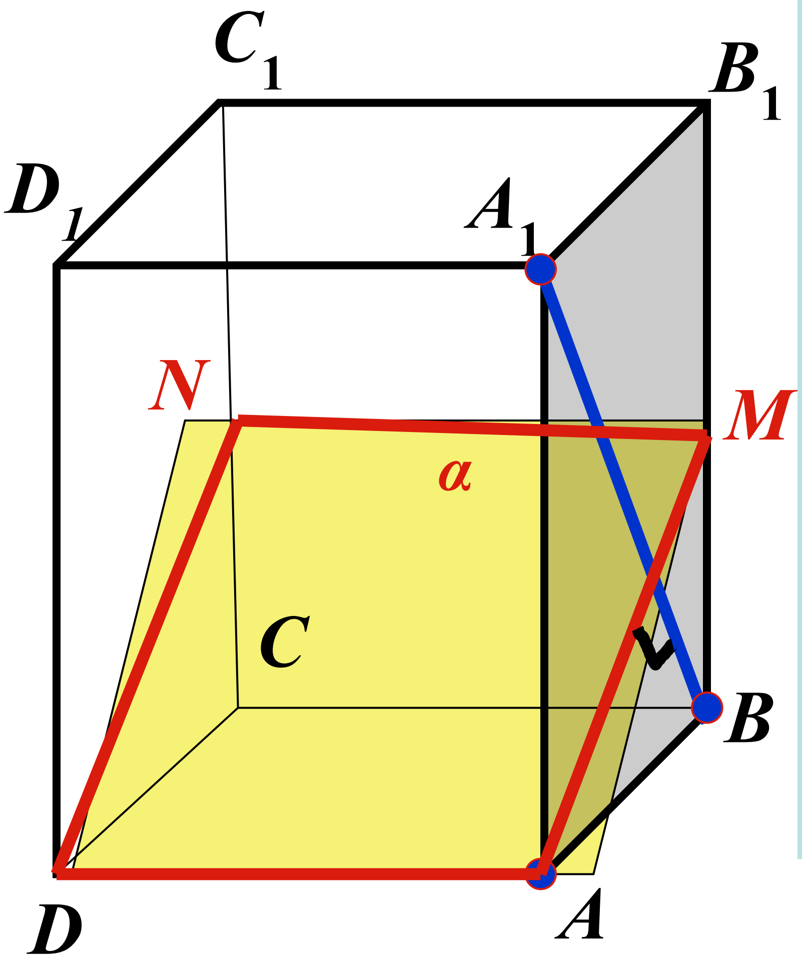
І Спосіб одержання перерізу

1. Оскільки $\alpha \perp BA_1$, то пряма AM перетину площин α і AA_1B_1B перпендикулярна до BA_1 ($AM \perp BA_1$). Враховуючи, що $AD \perp AA_1B_1B$, одержуємо $AD \perp BA_1$. Але $\alpha \perp BA_1$, отже, AD лежить в площині α (тобто α проходить через AD і $AM \perp BA_1$).

2. Оскільки площини протилежних бічних граней прямокутного паралелепіпеда попарно паралельні, то відповідні прямі їх перетину з площиною α теж будуть попарно паралельні: $MN \parallel AD$, $AM \parallel DN$. Отже, $AMND$ — паралелограм. Але $AD \perp AA_1B_1B$, отже, $AD \perp AM$, тобто $AMND$ — прямокутник.

Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат *ABCD* зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину *A* *перпендикулярно до прямої* BA_1

IIСпосіб одержання перерізу

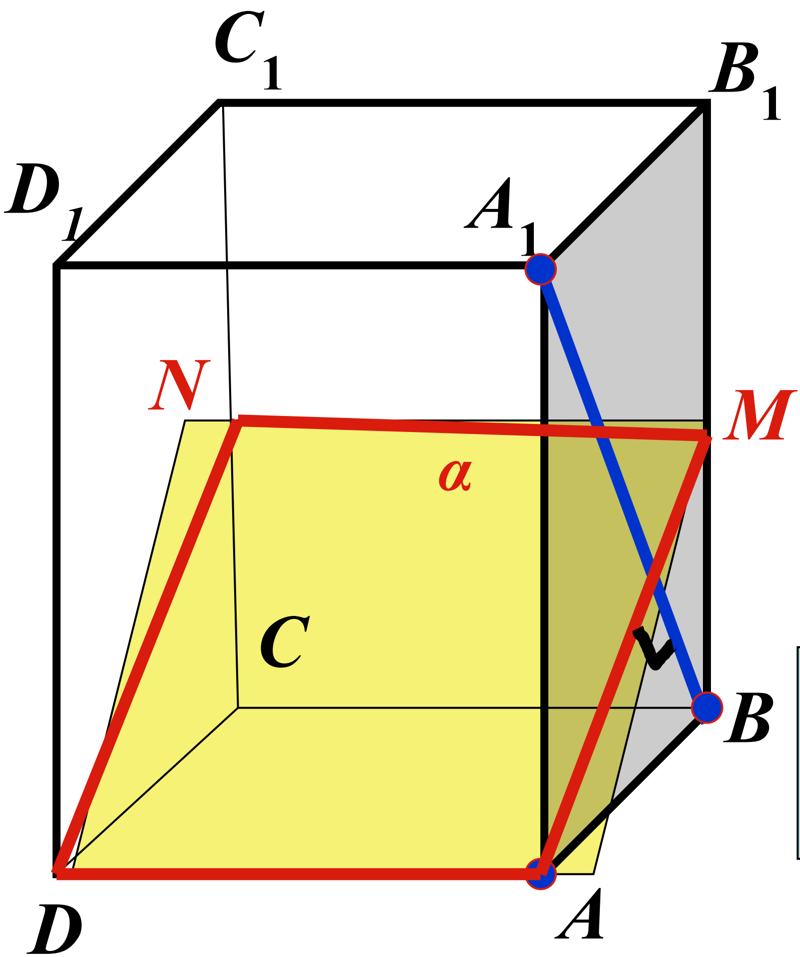


1. Проведемо в площині AA_1B_1B $AM \perp BA_1$

Через AM і AD проведемо площину α .
Доведемо, що $\alpha \perp BA_1$.
$AD \perp AA_1B_1B$, отже $AD \perp BA_1$. Враховуючи, що за побудовою $AM \perp BA_1$, одержуємо $\alpha \perp BA_1$

2. Оскільки площини протилежних бічних граней прямокутного паралелепіпеда попарно паралельні, то відповідні прямі їх перетину з площиною α теж будуть попарно паралельні: $MN \parallel AD$, $AM \parallel DN$. Отже, $AMND$ — паралелограм. Але $AD \perp AA_1B_1B$, отже, $AD \perp AM$, тобто
$AMND$ — прямокутник.

Основою прямокутного паралелепіпеда є квадрат *ABCD* зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину *A* перпендикулярно до прямої BA_1



- I спосіб обчислення площі

$$S_{\text{перерізу}} = S_{\text{прямокутника } AMND} = AD \cdot AM$$

- II спосіб обчислення площі

$$S_{\text{перерізу}} = \frac{S_{\text{ортог. проекц.}}}{\cos\varphi} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\angle MAB}$$

ГРАФІК ПРОВЕДЕННЯ ЗНО-2016

Реєстрація для участі в ЗНО-2016 триватиме з 1 лютого до 4 березня

УКРАЇНСЬКА МОВА І ЛІТЕРАТУРА
05.05.2016

МАТЕМАТИКА
11.05.2016

ІСТОРІЯ УКРАЇНИ
13.05.2016

РОСІЙСЬКА МОВА
03.06.2016

ІНОЗЕМНА МОВА
іспанська 06.06.2016
англійська 07.06.2016
німецька 08.06.2016
французька 09.06.2016

БІОЛОГІЯ
10.06.2016

ФІЗИКА
13.06.2016

ГЕОГРАФІЯ
15.06.2016

ХІМІЯ
17.06.2016

Можливість складання тестів не більше як із чотирьох предметів

Пробне ЗНО-2016

Реєстрація: з 05 до 30 січня 2016р.
Терміни проведення:

02 квітня 2016 р.	09 квітня 2016 р.*	
Українська мова і література	Математика Історія України Біологія Географія Фізика Хімія	Англійська мова Іспанська мова Німецька мова Французька мова Російська мова

* **Для проходження пробного ЗНО 09 квітня обирається лише один предмет**

- ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!

- БАЖАЮ УСПІХІВ!