# Практическое применение интегралов в различных областях

Выполнил:

студент группы 1ИС Алексеев Александр.

# Краткая история интегрального исчисления

- Многие значительные достижения математиков Древней Греции в решении задач на нахождение площадей, а также объемов тел связаны с именем Архимеда(287-212 до н. э.) Развивая идеи предшественников Архимед определил длину окружности и площадь круга, объем и поверхность шара. В работах «О шаре и цилиндре», «О спиралях», «О коноидах и сферах», он показал, что определение объемов шара, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращения сводится к определению объема конуса и цилиндра. Архимед разработал и применил методы, предвосхитившие созданное в XVII в. интегральное исчисление. Потребовалось более полутора тысяч лет, прежде чем идеи Архимеда нашли четкое выражение и были доведены до уровня исчисления. В XVII в. математики уже умели вычислять площади многих фигур с кривыми границами и объемы многих тел. А общая теория была создана во второй половине XVII в. в трудах великого английского математика Иссака Ньютона(1643-1716) и великого немецкого математика Готфрида Лейбница(1646-1716). Ньютон и Лейбниц являются основателями интегрального исчисления. Они открыли важную теорему, носящую их имя:   где f(x) – функция, интегрируемая на отрезке [a;b], F(x) – одна из ее первообразных. Рассуждения, которые приводили Ньютон и Лейбниц, несовершенны с точки зрения современного математического анализа. В XVIII в. крупнейший представитель математического анализа Леонард Эйлер эти понятия обобщил в своих трудах. Только в начале XIX в. были окончательно созданы понятия интегрального исчисления. Обычно при этом отмечают заслуги французского математика Огюстена Коши и немецкого математика Георга Римана. Само слово интеграл придумал Я.Бернулли(1690г.). Оно происходит от латинского integro, которое переводится как приводить в прежнее состояние, восстанавливать. В1696г. появилось и название новой ветви математики – интегральное исчисление, которое ввел И.Бернулли. Употребляющееся сейчас название первообразная функция заменило более раннее «примитивная функция», которое ввел Лагранж (1797 г.). Обозначение определенного интеграла ввел Иосиф Бернулли, а нижние и верхние пределы Леонард Эйлер.

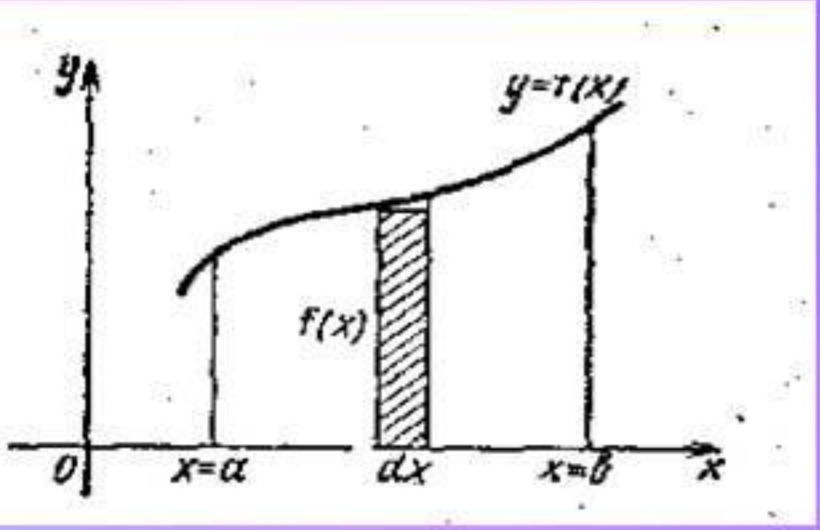
# Применение интеграла

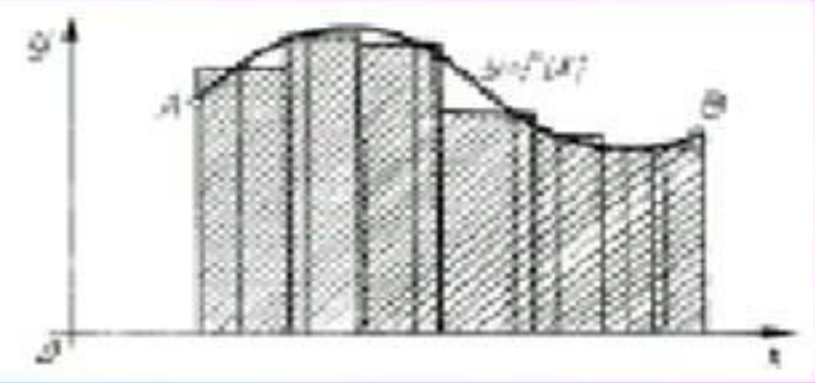
- Площадь фигуры
- Объем тела вращения
- Работа электрического заряда
- Работа переменной силы
- Масса
- Перемещение
- Дифференциальное уравнение
- Давление
- Количество теплоты

# Определенный интеграл

- Понятие определенного интеграла выводится через криволинейную трапецию. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x=a$, $x=b$. Площадь криволинейной трапеции выражается интегральной суммой или числом, которое называется определенным интегралом. Определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. = F (x)|ba= F(b) – F(a) Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними: определенный интеграл – это число, а неопределенный интеграл – совокупность первообразных функций. Связь между определенным и неопределенным интегралом выражается формулой Ньютона – Лейбница. Свойства определенного интеграла: Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл сохранит абсолютную величину, но изменит свой знак на противоположный. Если верхняя и нижняя границы интегрирования равны, то определенный интеграл равен нулю. Если отрезок интегрирования [a;b] разбить на несколько частей, определенный интеграл на отрезке [a;b] будет равен сумме определенных интегралов этих отрезков. Определенный интеграл от суммы функций, заданных на отрезке [a;b] равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций. Постоянный множитель к подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла. Оценка определенного интеграла: если $m \le f(x) \le M$ на [a;b] , то $m (b – a) < < M (b – a)$

# Геометрический смысл определенного интеграла




Пусть функция *y=f(x)* непрерывна на отрезке [a; b] и *f(x) ≥ 0*. Фигура, ограниченная графиком *AB* функции *y=f(x)*, прямыми *x=a*, *x=b* и осью *Ox* (см. рисунок), называется *криволинейной трапецией*.

Интегральная сумма и ее слагаемые имеют простой геометрический смысл: произведение  равно площади прямоугольника с основанием  и высотой , а сумма  представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке. Очевидно, что эта площадь зависит от разбиения отрезка [a; b] на частичные отрезки и выбора количества точек разбиения.

**Чем меньше $\Delta$ x, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Следовательно, за точную площадь *S* криволинейной трапеции принимается предел**

## Неопределенный интеграл

- Математические операции образуют пары двух взаимно обратных действий, например, сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня. Дифференцирование дает возможность для заданной функции $F(x)$ находить ее производную $F'(x)$. Существует действие, обратное дифференцированию – это интегрирование – нахождение функции $F(x)$ по известной ее производной $f(x) = F'(x)$или дифференциалу $f(x)dx$. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x)=f(x)dx$.Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем все ее первообразные содержатся в выражении $F(x) +C$, где $C$ – постоянная. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$(или от выражения $f(x)dx$) называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение $\int f(x)dx = F(x) +C$. Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, $x$ – переменная интегрирования. Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции. Свойства неопределенного интеграла Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции: $(\int f(x)dx)' = f(x)$ Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: $d(\int f(x)dx) = f(x)\,dx$ Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной и дополнительному слагаемому C:$\int d(F(x)) = F(x) +C$ Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла: $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых: $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int [f_1(x)]\,dx \pm \int [f_2(x)]\,dx$

# Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$
5. $\int \cos x dx = \sin x + c$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| + c$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + c$
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a} arcctg\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c$
14. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} + c \\ -\arccos\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$
17. $\int shxdx = chx + c$
18. $\int chxdx = shx + c$
19. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + c$
20. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + c$

# Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств. Здесь могут представиться следующие случаи: 1) данный интеграл берется непосредственно по формуле соответствующего табличного интеграла; 2) данный интеграл после применения свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам; 3) данный интеграл после элементарных тождественных преобразований над подынтегральной функцией и применением свойств приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

2. Интегрирование методом замены переменной (способом подстановки) Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов: $x = \varphi (t)$, где $\varphi (t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной $t$. Формула замены переменной в этом случае имеет вид $\int f(x) = \int f [\varphi (t)] \varphi ' (t) d(t)$; 2) $u = \psi(x)$, где $u$ – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f [\psi(x)] \psi '(x) d(x) = \int f (u) du$

3. Интегрирование по частям Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv = uv - \int v du$, где $u = \varphi (x)$, $v = \psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v du$; ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за $u$ берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за $dv$ – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которого известен или может быть найден.

# Применение интеграла в физике

| Величины | Соотношение в дифференциалах | Вычисление производной | Вычисление интеграла |
|---|---|---|---|
| A – работа<br>F – сила | $dA = F(x)\,dx$ | $F(x) = \frac{dA}{dx}$ | $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$ |
| N -мощность | $dA = N(t)dt$ | $N(t) = \frac{dA}{dt}$ | $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$ |
| m – масса тонкого стержня<br>p – линейная плотность | $dm = p(x)\,dx$ | $\rho(x) = \frac{dm}{dx}$ | $m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx$ |
| q – электрический заряд<br>I – сила тока | $dq = I(t)\,dt$ | $I(t) = \frac{dq}{dt}$ | $q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt$ |
| s - перемещение<br>v - скорость | $ds = v(t)\,dt$ | $v(t) = \frac{ds}{dt}$ | $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ |

# Заключение

- Применение физических моделей при введении понятия интеграла, рассмотрении его свойств, отработке техники интегрирования и изучении приложений способствует осознанному качественному усвоению материала, развитию правильного представления об изучаемом понятии, его огромной значимости в различных науках, формированию мировоззрения, таких специальных качеств, как умение строить математические модели реальных процессов и явлений, исследовать и изучать их, а, следовательно, способствует развитию мышления, памяти, внимания и речи.
-