Целые и рациональные числа

Подготовила
Ширина Тамара Сергеевна

Контактные данные

- https://vk.com/club198390694 - группа, где будут выкладываться материалы по математике.
- https://vk.com/id79384193 - для связи с преподавателем

- Конференция Zoom Тамара Ширина

https://us04web.zoom.us/j/7450204213?pwd=ZHhCUjV5UjdRRmJSdmJEWHBDdWZjdz09

- Идентификатор конференции: 745 020 4213

Натуральные числа

ГЛАВА I. Линейные и квадратные уравнения и неравенства. Элементы вычислительной математики

§ 1. Рациональные числа. Иррациональные числа. Понятие о мнимых и комплексных числах

1. Натуральные числа. Одним из основных понятий математики является понятие *числá*. Исторически первыми возникли в практике и были введены в науку ***натуральные числа***.

Натуральные числа используют в связи со счетом количества отдельных предметов, например при подсчете количества книг на полке, количества деталей, изготовленных за смену, и т. д.

Натуральные числа образуют бесконечное множество, которое принято обозначать через N:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Дробные числа

2. Дробные числа. Для практических целей натуральных чисел оказалось недостаточно, в частности при делении чисел, при измерении длин отрезков и различных физических величин возникла необходимость расширения множества целых чисел введением долей единицы и количества этих долей.

Например, если некоторая величина разделена на n частей и взято m таких частей, то вводится новое так называемое ***дробное* число** $\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

Отрицательные числа

3. Отрицательные числа. Практическая потребность привела к введению отрицательных чисел, чтобы иметь возможность измерять величины, способные изменяться в двух противоположных направлениях от выбранной точки отсчета. Например, при измерении сил, действующих на пружину, растягивающие пружину силы можно считать положительными, а сжимающие пружину — отрицательными.

Таким образом, каждому числу, натуральному или дробному, сопоставляется ***отрицательное число***. Если число (положительное) обозначать буквой a (или $+a$), то соответствующее ему ***противоположное*** (отрицательное) число записывается как $-a$.

К этим числам присоединяется число 0, соответствующее началу отсчета как положительных, так и отрицательных чисел.

чисел. Натуральные числа, им противополож-

Множество целых чисел

чалу отсчета как ...

4. Множество целых чисел. Натуральные числа, им противоположные (отрицательные) и число 0 составляют множество ***Z* *целых чисел***.

Целые числа могут быть записаны в виде дробей, например $4 = \frac{4}{1}$, $-5 = -\frac{5}{1}$.

Множество рациональных чисел

5. Множество рациональных чисел. Множество, состоящее из положительных и отрицательных целых и дробных чисел и числа 0, называется множеством ***рациональных чисел***. Обозначим его через Q. Таким образом, всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — любое целое число, а n — натуральное число.

Следовательно, N содержится в Z, а Z в Q. Символически это записывается следующим образом: $N \subset Z \subset Q$. Знак $\subset$ обозначает включение или принадлежность одного множества другому.

Другими словами, Z есть расширенное множество N, Q — расширенное множество Z, и, таким образом, Q является расширенным множеством N.

Основные законы действий над рациональными числами

6. Основные законы действий над рациональными числами. Укажем основные законы действий над рациональными числами и некоторые отношения между ними. Основными действиями над числами являются сложение и умножение, а основным отношением между ними является сравнение чисел, т. е. установление того, какое из двух чисел больше (меньше), если такое сравнение возможно.

I. Переместительный или коммутативный закон сложения:

$$a + b = b + a.$$

II. Сочетательный или ассоциативный закон сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

III. Сложение рационального числа с нулем:

$$a + 0 = a.$$

IV. Сложение рационального числа с соответствующим ему числом противоположного знака:

$$a + (-a) = 0.$$

V. Переместительный или коммутативный закон умножения:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

VI. Сочетательный или ассоциативный закон умножения:

$$(a \cdot b) \cdot c = a\,(b \cdot c).$$

VII. Умножение рационального числа на единицу:

$$a \cdot 1 = a.$$

VIII. Умножение не равного нулю рационального числа на число, равное отношению единицы к этому числу (такие числа a и $\frac{1}{a}$ называются взаимно обратными):

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \text{ для } a \neq 0.$$

IX. Распределительный, или дистрибутивный, закон умножения относительно сложения:

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Введем знак $\Rightarrow$. Запись **A** $\Rightarrow$ **B** обозначает, что из **A** следует **B**.

X. Свойство транзитивности:

$$a < b,\ b < c \Rightarrow a < c.$$

XI. Правило сложения неравенств: для любого числа c

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$$

XII. Правило умножения неравенств на число, отличное от нуля:

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \text{ при } c > 0,$$
$$a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \text{ при } c < 0.$$

Представление рациональных чисел десятичными дробями

7. Представление рациональных чисел десятичными дробями. Любое положительное и отрицательное целое число можно представить в виде обыкновенной дроби со знаменателем, равным единице, например, $3 = \frac{3}{1}$, $-5 = -\frac{5}{1}$.

Число 0 можно представить в виде обыкновенной дроби с числителем, равным нулю: $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} \ldots$.

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, например, $\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{7}{35}$; $-\frac{1}{2} = -\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = -\frac{3}{6}$; $\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 6} = \frac{3}{4}$.

Если знаменатель обыкновенной дроби есть степень числа 10, то эту дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Например, $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{197}{100} = 1{,}97$; $\frac{187}{1000} = 0{,}187$; $-\frac{3}{10} = -0{,}3$;

$-\frac{13}{10} = -1{,}3$.

Если знаменатель обыкновенной дроби содержит в себе какие-либо простые множители, отличающиеся от 2 и 5, и эти множители не сокращаются с числителем, то такая дробь не обращается в десятичную.

Подобные дроби можно обращать лишь в приближенные десятичные: $\frac{11}{21} = \frac{11}{3 \cdot 7} = 0{,}52389\ldots$; $\frac{17}{63} = \frac{17}{3^2 \cdot 7} = 0{,}2648\ldots$.

Периодические дроби

8. Периодические дроби. Существуют рациональные числа, которые нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, например, $\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{7}$.

> Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или несколько цифр неизменно повторяются в одной и той же последовательности, называется периодической десятичной дробью, а совокупность повторяющихся цифр называется периодом этой дроби.

Периодические дроби бывают ***чистыми*** и ***смешанными***. ***Чистой*** периодической дробью называется дробь, у которой период начинается сразу же после запятой, например, 3,171717... . ***Смешанной*** называется дробь, у которой между запятой и первым периодом есть одна или несколько неповторяющихся цифр, например, 0,231919... .

Периодические дроби сокращенно записывают следующим образом: 3,171717... — 3(17); 0,231919... — 0,23(19), т. е. период дроби заключают в скобки. Например, число 3,(17) читается: три целых и 17 в периоде.

Бесконечная десятичная дробь, получающаяся при обращении обыкновенной дроби, должна быть периодической.

Каждое рациональное число можно представить в виде конечной периодической десятичной дроби.

Например, рациональное число $\frac{7}{11}$ делением 7 на 11 можно представить периодической десятичной дробью 0,(63).

Конечные десятичные дроби можно записывать в виде бесконечных десятичных дробей:

$0{,}27 = 0{,}27000... = 0{,}27(0)$; $-4{,}73 = -4{,}73000... = -4{,}73(0)$.

Целые числа также можно записывать в виде бесконечных десятичных дробей:

$$17 = 17{,}000... = 17(0);\ -8 = -8{,}000... = -8(0).$$

Можно утверждать, что каждое рациональное число представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Верно и обратное утверждение.

Любая бесконечная периодическая дробь является рациональным числом.

Обращение периодической десятичной дроби.

ным числом.

9. Обращение чистой периодической десятичной дроби в обыкновенную. Обыкновенная дробь, знаменатель которой после сокращения не содержит множителей 2 и 5, обращается в чистую периодическую десятичную дробь.

Чтобы обратить чистую периодическую десятичную дробь в обыкновенную, нужно ее период сделать числителем, а в знаменателе записать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например,

$$0,(6)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3};\ 3,05=3\frac{5}{99};\ 0,(057)=\frac{57}{999}=\frac{19}{333}.$$

10. Обращение смешанной периодической десятичной дроби в обыкновенную. Обыкновенная дробь, знаменатель которой после сокращения вместе с другими множителями содержит множители 2 или 5 или оба множителя, обращается в смешанную периодическую дробь. Например,

$$\frac{16}{30}=\frac{8}{15}=0,5(3);\ \frac{5}{6}=0,8(3);\ \frac{1}{70}=0,0(142857);\ \frac{17}{18}=0,9(4).$$

Чтобы обратить смешанную периодическую дробь в обыкновенную, достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность взять числителем, а знаменателем написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.

Например,

$$0{,}5(3) = \frac{53-5}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15};$$

$$0{,}8(3) = \frac{83-8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6};$$

$$0{,}0(142857) = \frac{142857-0}{9999990} = \frac{142857}{9999990} = \frac{1}{70};$$

$$0{,}9(4) = \frac{94-9}{90} = \frac{85}{90} = \frac{17}{18};$$

$$0{,}3(45) = \frac{345-3}{990} = \frac{342}{990} = \frac{19}{55}.$$

Исключение составляют бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9. Например:

$$0{,}6(9) = \frac{69-6}{90} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0{,}7;$$

$$0{,}76(9) = \frac{769-76}{900} = \frac{693}{900} = \frac{77}{100} = 0{,}77.$$

Любая бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 9 равна некоторой конечной десятичной дроби, поэтому при представлении рациональных чисел десятичными дробями необходимо исключить из рассмотрения бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9.

Иррациональные числа

11. Иррациональные числа. Потребности логического развития математики и ее практических приложений показали недостаточность множества рациональных чисел для решения многих задач.

Покажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Задача сводится к решению уравнения $x^2 = 2$. Очевидно, что не существует такого целого числа, квадрат которого равен 2, ибо $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$.

Допустим, что такое число найдется среди дробных чисел, поэтому будем считать, что дробь $x = \frac{m}{n}$ несократима, т. е. числа m и n взаимно простые. Предположим, что имеет место равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, тогда $m^2 = 2n^2$. Отсюда следует, что натуральное число m^2 — четное, так как $2n^2$ — число четное. Если m^2 — четное, то и m — четное, т. е. $m = 2p$, где p — натуральное число. Имеем: $(2p)^2 = 2n^2$ или $4p^2 = 2n^2$, $2p^2 = n^2$, т. е. число n^2 также четное, отсюда следует, что и n — четное.

Приходим к выводу, что числа m и n четные, т. е. не являются взаимно простыми. Это противоречит первоначальному предположению, что m и n — взаимно простые. Следовательно, не существует такого дробного числа, квадрат которого равен 2.

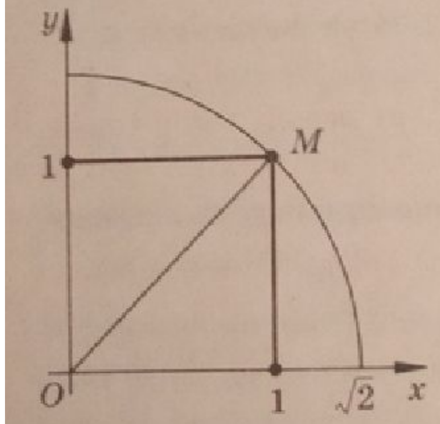

Рис. 1

Из доказанного вытекает, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, т. е. не имеет общей меры со стороной квадрата, равной 1 (рис. 1). Такой вывод противоречит нашему интуитивному представлению о том, что любой отрезок имеет длину. Длина диагонали квадрата со стороной, равной единице, не может быть выражена рациональным числом*.

На числовой оси при принятой единице измерения всякому рациональному числу соответствует одна и только одна точка.

Если каждую из этих рациональных точек представить непрозрачными (черными), а все другие точки прозрачными, то на числовой оси образуется множество просветов, которые будут соответствовать числам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π и множеству других чисел, не являющихся рациональными. В отличие от рациональных чисел эти числа называются ***иррациональными***. Таким образом, числовая ось полностью заполняется точками, соответствующими рациональным и иррациональным числам, и просветов на числовой оси не будет.

---

* Данное открытие приписывают греческому философу *Пифагору* [Πυθαγορας], жившему около 2500 лет тому назад. Не исключено, что сведения о существовании несоизмеримых отрезков восходят к глубинам ассиро-вавилонской культуры.

Иррациональные числа представляют собой множество I всех бесконечных непериодических десятичных дробей.

Иррациональное число больше всякого приближения по недостатку и меньше всякого приближения по избытку. Приведем примеры иррациональных чисел:

$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$ $(1{,}414213 < \sqrt{2} < 1{,}414214)$,

$\pi = 3{,}141592653589\ldots$,

$e = 2{,}718281828459045\ldots$ (e — основание натуральных логарифмов),

$\lg 5 = 0{,}6989700\ldots$.

Вопросы для повторения

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. Какие числа называются натуральными? Какое обозначение введено для множества натуральных чисел?
2. Какие числа входят в множество целых чисел? Какое обозначение принято для этого множества?
3. Какое множество называется множеством рациональных чисел и как это множество обозначается?
4. Перечислите основные законы действий над рациональными числами.
5. Какие обыкновенные дроби обращаются в конечные десятичные?
6. Какие обыкновенные дроби выражаются только приближенными десятичными?
7. Какие десятичные дроби называются бесконечными периодическими?
8. Что называется периодом бесконечной периодической десятичной дроби?
9. Какие периодические дроби называются чистыми и смешанными и как сокращенно они записываются?
10. Как записываются целые числа и конечные десятичные дроби в виде бесконечных периодических дробей?
11. Любая ли бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом?
12. Как обратить чистую периодическую десятичную дробь в обыкновенную?
13. Как обратить смешанную периодическую десятичную дробь в обыкновенную?
14. Какое исключение представляет собой бесконечная периодическая десятичная дробь с периодом 9?
15. Какие числа называются иррациональными и как обозначается множество иррациональных чисел?
16. Докажите, что не существует числа, квадрат которого равен 2.
17. Какие числа называются