Добро пожаловать в Физику!

Welcome to Physics!

Zapraszamy do Fizyki!

Fizik`e hoş geldiniz!

Chào mừng bạn đến Vật lý!

Bienvenido a la física!

পদার্থবিদ্যা স্বাগতম!

Willkommen in Physik!

Лектор: Доцент, кандидат физ.-мат. наук, Андрей ОЛЬЧАК
Lecturer: Andrey OLCHAK, Professor Associate, DSc

Лекция 8
Механика твердого тела

Лектор:
доцент НИЯУ МИФИ, к.ф.-м.н.,
Ольчак Андрей Станиславович

Вращательное движение
Момент импульса.
(повторение)

Механика твердого тела

Виды движения твердого тела

1. Поступательное движение

Поступательное движение - такое движение твердого тела, при котором любая прямая проведенная между любыми двумя материальными точками твердого тела при движении всегда остается параллельной самой себе.

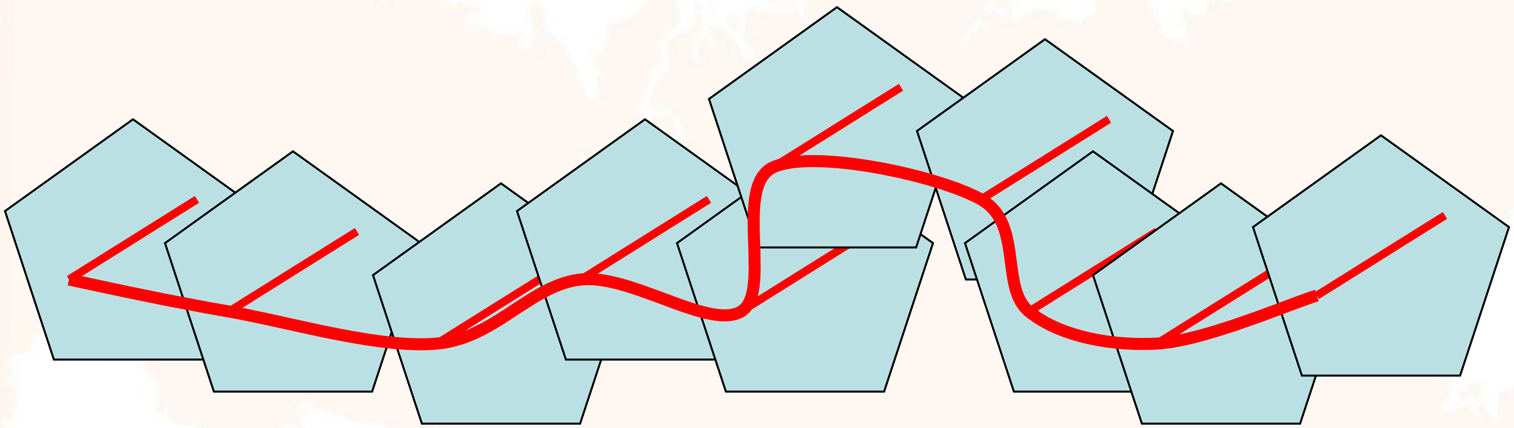
Центр масс твердого тела ВСЕГДА движется так же, как двигалась бы материальная точка равной массы под действием всех приложенных к телу внешних сил.

При поступательном движении все остальные точки тела движутся параллельно центру масс.

Виды движения твердого тела

1. Поступательное движение

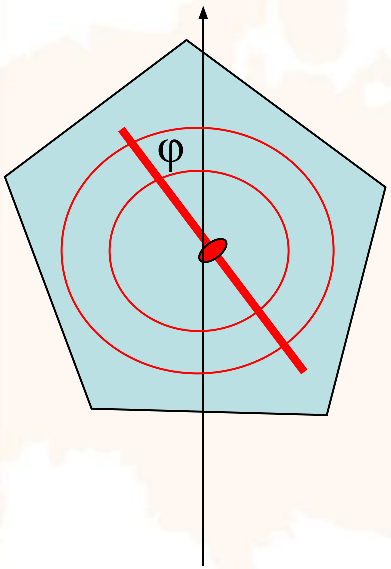
Поступательное движение твердого тела: любая прямая проведенная между любыми двумя точками твердого тела при движении всегда остается параллельной самой себе.



При поступательном движении достаточно следить за любой одной точкой тела. Остальные движутся параллельно. Описание такого движения ***ничем не отличается*** от описания движения одной материальной точки.
Надо следить за не более, чем тремя ее координатами..

Вращательное движения твердого тела

2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

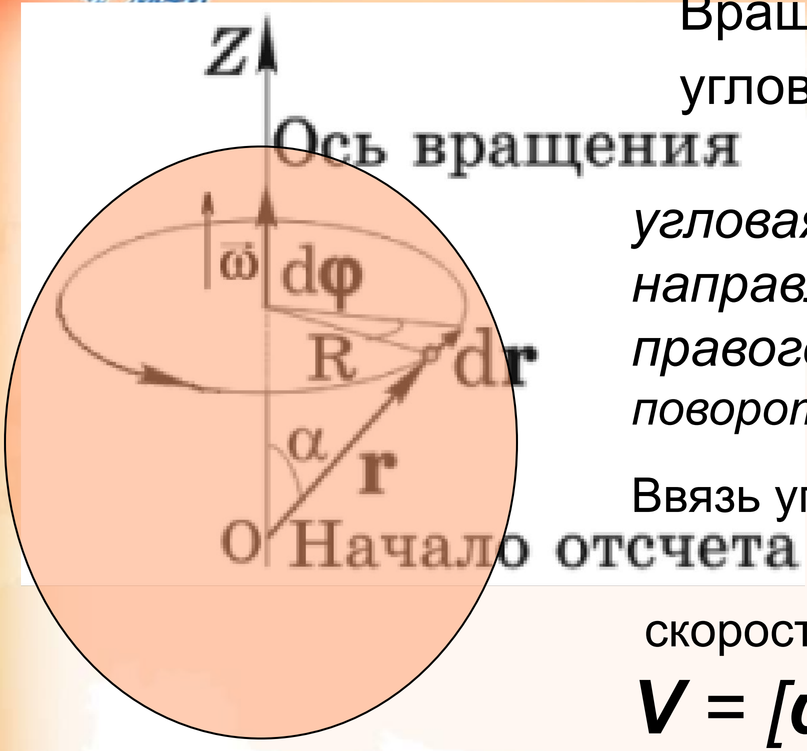


При вращении твердого тела вокруг закрепленной оси все его точки движутся по окружностям с центрами на оси вращения.

Тело при этом не обязательно должно совершать полные обороты. Возможны просто колебания.

Достаточно следить за одной координатой - углом поворота φ по отношению к некоторой опорной оси..

Связь угловой и линейной скорости



Вращательное движение характеризуется угловой скоростью: $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\varphi}/dt$ [c^{-1}]

угловая скорость – (псевдо)вектор, направленный вдоль оси вращения - по правилу правого винта. «Псавдо» = направление условно, а повороты вокруг разных осей не коммутируют

Ввязь угловой скорости общения $\boldsymbol{\omega}$ и линейной

скорости $\boldsymbol{V}$ точки, с радиус-вектором $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}] \Rightarrow V = \omega\, r \sin(\alpha) = R\,\omega$$

Линейная скорость точки при вращательном движении всегда направлена по касательной к траектории движения (окружности).

Угловое ускорение: $\boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ [rad/s^2] = [s^{-2}]

Момент импульса частицы относительно некоторой точки.

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{v}, \vec{p}] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]$$

$$\vec{p} \parallel \vec{v} \Rightarrow [\vec{v}, \vec{p}] = 0 \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{N}$$

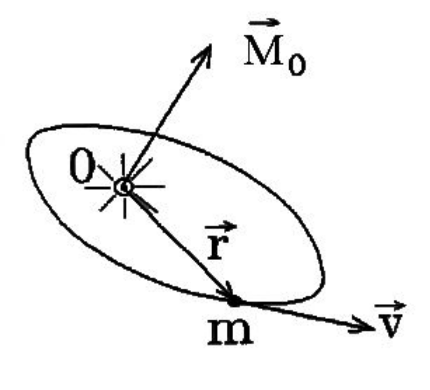
Производная по времени момента импульса частицы относительно некоторой точки равна моменту силы относительно той же точки.

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{M}_{сист}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i$$

При отсутствии внешних сил $d\vec{M}/dt = 0 \Rightarrow$ **Для замкнутой системы момент импульса постоянен**

Момент импульса остается постоянным и для незамкнутой системы, если суммарный момент внешних сил равен нулю.

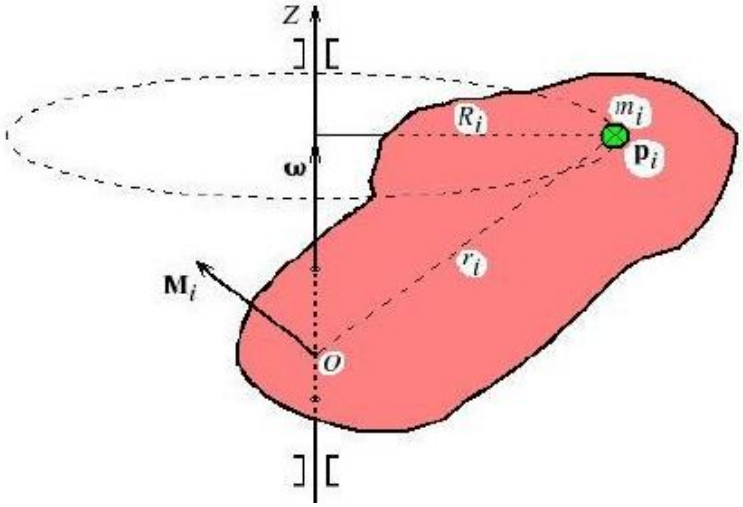


Для отдельной материальной точки, движущейся в центральном поле сил, момент импульса тоже остается постоянным относительно точки - центра поля.

Механика твердого тела

Момент импульса элементарной массы m_i относительно оси OZ:

$$M_i = R_i P_i = R_i \omega_z m_i R_i = \omega_z m_i R_i^2$$



Момент импульса всего тела массы M
относительно оси OZ :

$$M_z = \omega_z \Sigma m_i R_i^2 = \omega_z I_z$$, где

$I_z = \Sigma m_i R_i^2$ =>, момент инерции твердого тела относительно оси OZ

Переходя от суммирования к интегрированию по объему тела, момент инерции можно записать в виде:

$$I_z = \Sigma\, m_i R_i^2 = \int \rho(r) r_z^2 dV$$

Уравнение движения для вращающегося твердого тела

Это уравнение является аналогом второго закона Ньютона для поступательного движения.

$$\frac{d\vec{M}_{сист}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i$$

Подставим в него момент импульса, выраженный через момент инерции тела в проекции на ось вращения OZ:

$$d(\omega_z I_z)/dt = I_z\beta_z = \Sigma N_{iz}$$

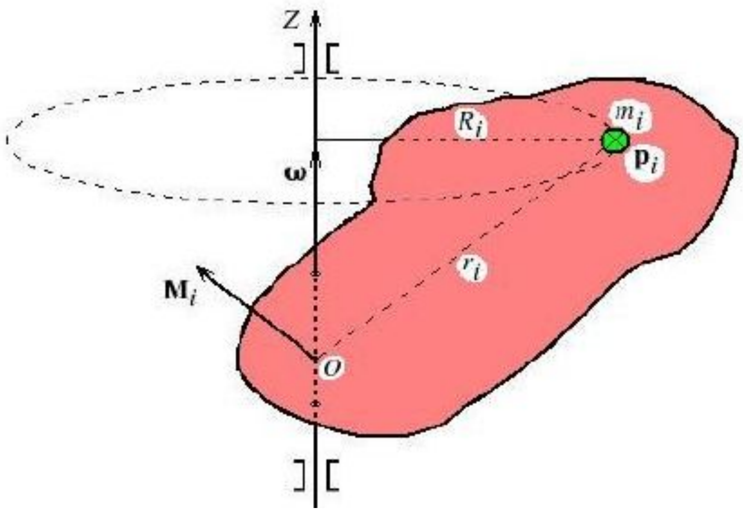
Здесь β_z - угловое ускорение вращающегося тела в проекции на ось вращения OZ; ΣN_{iz} - сумма проекций всех моментов внешних сил на ось вращения OZ.

Это уравнение движения для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Моменты инерции для некоторых симметричных тел

Момент инерции твердого тела относительно оси вращения OZ можно представить в виде суммы или интеграла

$$I_z = \Sigma\, m_i R_i^2 = \int \rho(r) r^2 dV$$

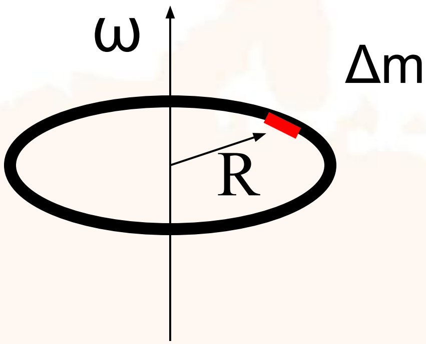


Для отдельной элементарной массы m,
(материальной точки) вращающейся на расстоянии R от оси,
момент инерции очевидно равен

$$I_z = mR^2$$

Найдем далее моменты инерции для некоторых симметричных тел

1. Тонкое кольцо, вращающееся относительно оси, проходящей через его центр, перпендикулярно его плоскости.

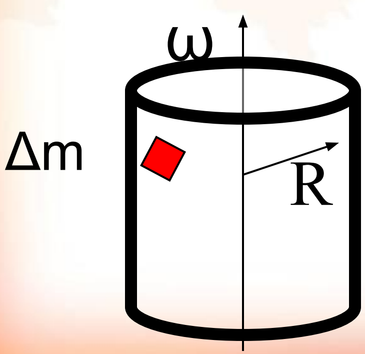


Каждая элементарная масса Δm имеет момент инерции $\Delta I_z = \Delta m R^2$

Очевидно, что все кольцо массы M имеет момент инерции

$$I_z = \Sigma \Delta m R^2 = MR^2$$

2. Тонкостенный цилиндр, вращающийся относительно оси симметрии

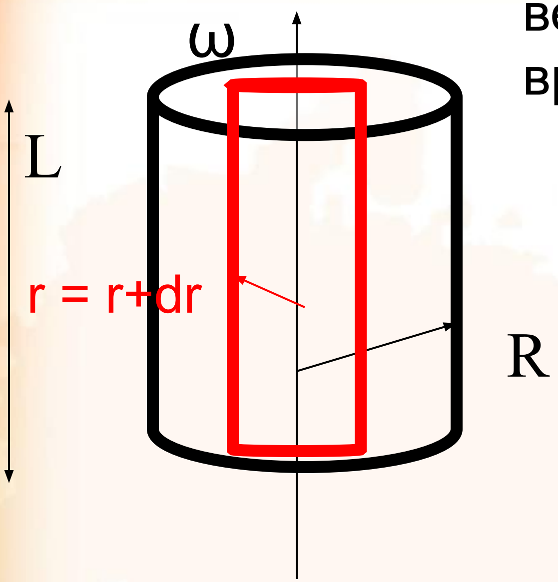


Каждая элементарная масса Δm имеет момент инерции $\Delta I_z = \Delta m R^2$

Очевидно, что весь цилиндр массы M имеет момент инерции

$$I_z = \Sigma \Delta m R^2 = MR^2$$

3. Однородный цилиндр с плотностью вещества ρ,
вращающийся вокруг оси симметрии.



Возьмем вложенный тонкостенный цилиндр с массой $dm = \rho L 2\pi r dr$

Его момент инерции $dI_z = dmr^2 = \rho L 2\pi r^3 dr$

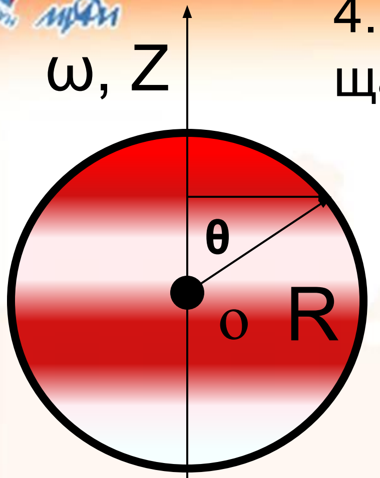
Момент инерции всего цилиндра находим, интегрируя по всем тонкостенным цилиндрам
с радиусами от 0 до R:

$M = \rho L \pi R^2$

$$I_z = 2\pi L\rho \int r \, dr = \pi L\rho R^4/2 =$$

$$= MR^2/2$$

Моменты инерции для некоторых симметричных тел



4. Тонкостенная сфера массы M и радиуса R, вращающаяся вокруг оси OZ, проходящей через ее центр.

Разобьем сферу мысленно на множество тонких перпендикулярных оси OZ колец шириной $Rd\theta$ и с радиусами $r = R\sin\theta$, зависящими от угла θ, под которым кольцо видно из центра сферы.

Каждое кольцо имеет момент инерции, равный

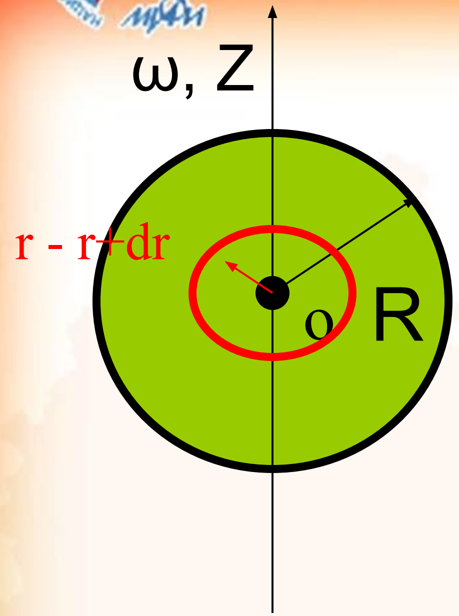
$$dI_z = (dm)R^2\sin^2\theta$$

Массы колец пропорциональны их площадям поверхности:

$$dm = M\,2\pi R|\sin\theta|\,Rd\theta\,/\,4\pi R^2 = M|\sin\theta|d\theta\,/\,2$$

Интегрируя по всем кольцам (2 раза по $d\theta$ от 0 до $\pi/2$), находим:

$$I_z = MR^2\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta = MR^2\int_{-1}^{0}(1 - \cos^2\theta)d(-\cos\theta) = 2MR^2/3$$



5. Однородный шар с плотностью вещества ρ, вращающийся вокруг оси симметрии.
Возьмем вложенную тонкостенную сферу с массой $dm = \rho 4\pi r^2 dr$

Ее момент инерции $dI_z = 2(dm)r^2/3 = 8\pi\rho r^4(dr)/3$

Момент инерции всего шара находим, интегрируя по всем тонкостенным сферам с радиусами от 0 до R:

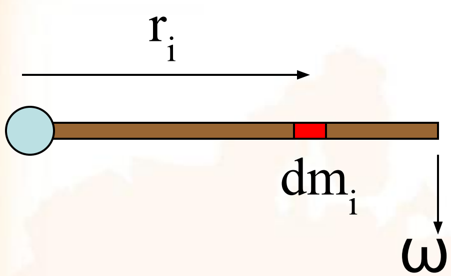
$$I_z = (8/3)\pi\rho \int r^4 dr = 8\pi\rho R^5/15 =$$

$$M = \rho 4\pi R^3/3$$

$$= 2MR^2/5$$

Моменты инерции для некоторых симметричных тел

6. Однородный тонкий стержень длины и массы M,
вращающийся вокруг оси перпендикулярной ему
и проходящей через конец стержня



Разобьем мысленно стержень на элементарные массы $dm_i = Mdr/L$

Каждая элементарная масса имеет момент инерции $dI_z = (dm)r^2 = Mr^2dr/L$

Момент инерции всего стержня находим, интегрируя по всем элементарным массам с расстояниями до центра вращения от 0 до L:

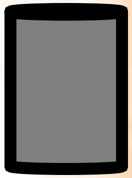
$$I_z = (M/L)\int r^2dr = ML^2/3$$

Моменты инерции для некоторых симметричных тел

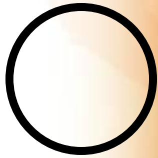
1. Материальная точка, вращающаяся вокруг оси на расстоянии R от нее: $I_z = MR^2$

2. Кольцо и тонкостенный цилиндр, радиуса R, вращающиеся вокруг оси симметрии: $I_z = MR^2$

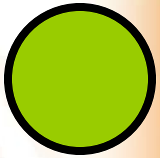
3. Однородный цилиндр радиуса R, вращающийся вокруг оси симметрии: $I_z = MR^2/2$



4. Тонкостенная сфера радиуса R, вращающаяся вокруг оси симметрии: $I_z = 2MR^2/3$

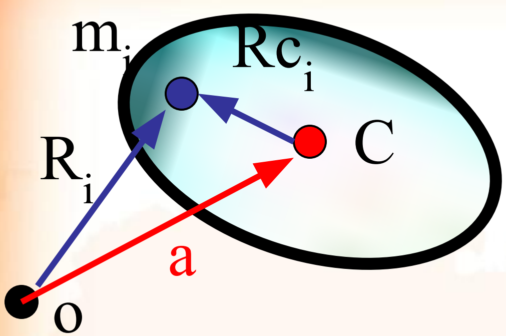


5. Однородный шар радиуса R, вращающийся вокруг оси симметрии: $I_z = 2MR^2/5$



6. Однородный тонкий стержень длины L, вращающийся вокруг оси перпендикулярной ему и проходящей через конец стержня: $I_z = MR^2/3$

Теорема Штайнера



Пусть нам известен момент инерции тела массы М относительно оси, проходящей через центр масс С. Найдем его момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через точку О, отстоящую от С на радиус - вектор а.

$$I_O = \Sigma m_i R_i^2 = \Sigma m_i(\mathbf{Rc_i} + \mathbf{a})^2 = \Sigma m_i Rc_i^2 + 2\mathbf{a}\Sigma m_i \mathbf{Rc_i} + (\Sigma m_i)a^2$$

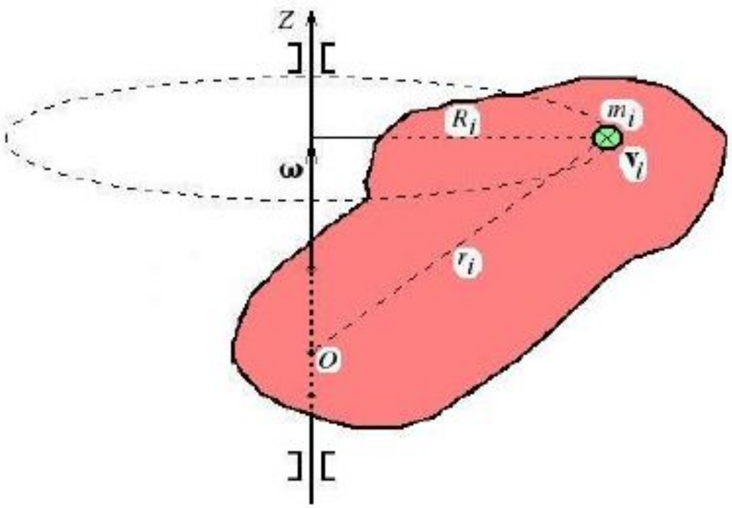
$$\Sigma m_i Rc_i^2 = I_C\ ;\ 2\mathbf{a}\Sigma m_i \mathbf{Rc_i} = 0\ ;\ (\Sigma m_i)a^2 = Ma^2$$

$$I_O = I_C + Ma^2$$

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен его моменту
инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс,
плюс произведению массы тела на квадрат расстояния между осями.

Кинетическая энергия твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси

Кинетическая энергия твердого тела: $T = \Sigma m_i v_i^{\,2}/2$



Линейная скорость i-ой точки:

$\boldsymbol{v_i} = [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r_i}]\ ;\ v_i = \omega R_i$

$T = \Sigma m_i v_i^{\,2}/2 = \omega^2 \Sigma m_i R_i^{\,2}/2$

$\Sigma m_i R_i^{\,2} = I_z$

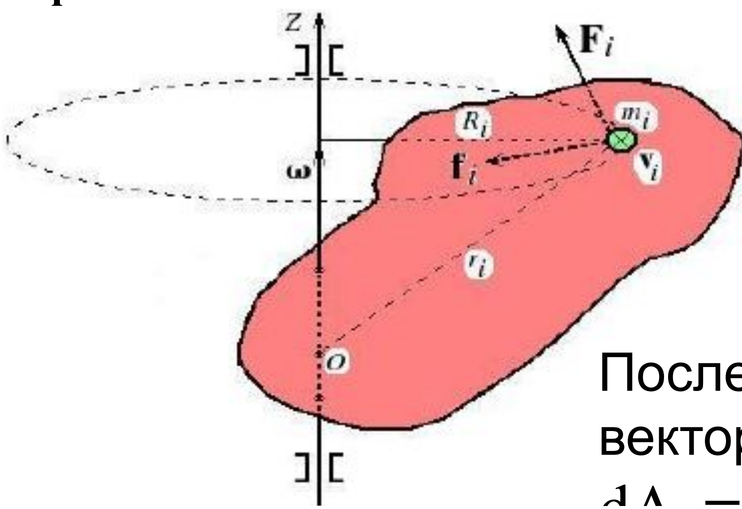
Окончательно для кинетической энергии находим: $T = I_z \omega^2/2$

Работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

$\mathbf{f}_i$- равнодействующая всех внутренних сил, действующих на m_i

$\mathbf{F}_i$- равнодействующая всех внешних сил, действующих на m_i

$\mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i$ - равнодействующая всех сил, лежащая в плоскости вращения



$dA_i = (\mathbf{f}_i+\mathbf{F}_i)\mathbf{dr}_i$ - элементарная работа всех сил:

Так как $\mathbf{dr}_i = [\mathbf{d\varphi},\mathbf{r}_i]$

$dA_i = (\mathbf{f}_i[\mathbf{d\varphi},\mathbf{r}_i]) + (\mathbf{F}_i[\mathbf{d\varphi},\mathbf{r}_i])$

После циклической перестановки векторов:

$dA_i = (\mathbf{d\varphi}[\mathbf{f}_i,\mathbf{r}_i]) + (\mathbf{d\varphi}[\mathbf{F}_i,\mathbf{r}_i])$

Суммируем по всем элементарным массам:

$$dA=\Sigma dA_i=(\mathbf{d\varphi},\Sigma[\mathbf{f}_i,\mathbf{r}_i]) + (\mathbf{d\varphi},\Sigma[\mathbf{F}_i,\mathbf{r}_i])=(\mathbf{d\varphi},\Sigma\mathbf{N}_{i\,\text{внутр}}) + (\mathbf{d\varphi},\Sigma\mathbf{N}_{i\,\text{внеш}})$$

Окончательно: $dA = (\mathbf{d\varphi},\Sigma\mathbf{N}_{i\,\text{внеш}}) = N_{Z\,\text{внеш}}d\varphi$

При повороте на конечный угол: $A = \int N_{Z\,\text{внеш}}d\varphi$

Сопоставление формул механики вращательного движения с аналогичными формулами механики поступательного движения

Поступательное движение	Вращательное движение
$\mathbf{V}$ – линейная скорость	$\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость
$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{V}}$ - линейное ускорение	$\boldsymbol{\beta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ - угловое ускорение
m - масса	I_Z – момент инерции относительно оси Z
$\mathbf{p} = m\mathbf{V}$ - импульс	$M_Z = I_Z \omega_Z$ – момент импульса
$\mathbf{F}$ - сила	$\mathbf{N}$ – момент силы
$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$	$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{N}$
$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$	$I_Z \beta_Z = N_Z$
$T = m\mathrm{V}^2/2$	$T = I_Z \omega_Z^2/2$
$dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$	$dA = \mathbf{N}\, \mathbf{d}\boldsymbol{\varphi}$

Спасибо за внимание!