§4. Схема независимых испытаний Бернулли

п.1. Формула Бернулли.

Пусть проводится серия независимых испытаний, в каждом из которых возможно лишь 2 исхода:
либо некоторое событие A наступит (с вероятностью p),
либо событие A не наступит (с вероятностью

Такие испытания впервые были изучены Бернулли.

Пример. Производится 4 выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень поражена 2 раза.

Решение.

Тогда

Так как испытания независимы, то

и т.д.

Кроме того события $ППНН$, $ПНПН$, …, $ННПП$ несовместны. Поэтому, по свойству вероятности

Заметим, что количество слагаемых в сумме:

Теорема 1.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится ровно m раз, если вероятность появления события A в каждом из них равна p, находится по формуле:

— формула Бернулли.

Доказательство.

Рассмотрим событие, состоящее в том, что A появится в первых m испытаниях и не появится в остальных испытаниях:

Так как испытания независимы, то по теореме умножения вероятность этого события равна

Кроме того, вероятность появления события A снова m раз но в другом порядке будет той же:

Число таких исходов (в n испытаниях событие A появится m раз в определенном порядке) равно количеству способов разместить m множителей равных p по n местам, т.е.

Так как рассматриваемые исходы несовместны, то по свойству сложения вероятностей искомая вероятность равна:

Замечание.

Вероятность того, что событие A появится от
до раз включительно, равна:

Пример. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах мишень поражена не менее 3 раз.

Решение.

Пусть в схеме Бернулли проводится n испытаний.

Вероятность наступления события A в каком количестве испытаний будет самой высокой? (Какое наивероятнейшее число появлений события A?).

Найдем отношение:

фиксированное меняется

При увеличении m от 0 до n вероятность сначала растет, а затем убывает.

Таким образом, существует такое число

при котором вероятность достигает максимального значения (наивероятнейшее число).

Если

то

Если

то

Пример. Бросаем 10 раз кубик. Рассмотрим событие

Найти наивероятнейшее число появлений события A.

Решение.

Замечание.

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых возможно наступление равно одного из k событий причем в каждом испытании

Тогда вероятность того, что появится раз, появится раз, …, появится раз, находится по формуле

п.2. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Вычисления в схеме Бернулли при больших n проводятся с помощью приближенных формул.

Теорема 2 (Пуассона).

Пусть в схеме Бернулли

число испытаний n неограниченно возрастает,

вероятность p неограниченно уменьшается,

произведение является постоянной величиной.

Тогда для любого фиксированного m справедлива формула

— формула Пуассона.

Доказательство.

то

Заметим, что

Поэтому,

Замечание.

Из теоремы 2 следует приближенная формула

Ее обычно применяют, когда n велико, p мало, Пример. В грузовике перевозится 1000 бутылок. Вероятность того, что в дороге разобьется одна бутылка равна 0,001. Найти вероятность того, что: 1) разобьются равно 3 бутылки, 2) разобьется не более 3 бутылок.

Решение.

Применим формулу Пуассона.

1)

2)

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Пример.

Поток посетителей ресторана,

поток звонков на телефонную станцию,

поток обслуживания абонентов.

Интенсивностью потока называют среднее число событий, появляющихся в единицу времени.

Потоком называют стационарным, если его интенсивность является постоянной величиной, т.е.

Потоком называют ординарным, события появляются не группами, а по одиночке.

Говорят, что потоком обладает свойством отсутствия последствия, если вероятность появления событий на любом участке времени не зависит от того, сколько событий появилось на любом другом, непересекающимся с ним участке («будущее» не зависит от «прошлого»).

Поток стационарный, ординарный поток событий с отсутствием последствий называется простейшим (пуассоновским).

Вероятность появления m событий простейшего потока за время t продолжительностью находится по формуле

Пример. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт за одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит 4 вызова.

Решение.

Теорема 3 (Локальная теорема Муавра–Лапласа).

Пусть в схеме Бернулли

число испытаний n неограниченно возрастает,

вероятность постоянна.

Тогда

где

— функция Гаусса.

Замечание.

Значения функции находят по специальной таблице, при этом учитывая, что

Пример. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена 160 раз.

Решение.

Теорема 4 (Интегральная теорема Муавра–Лапласа).

Пусть в схеме Бернулли

число испытаний n неограниченно возрастает,

вероятность постоянна.

Тогда

Замечание.

Рассмотрим функцию

— нормированная функция Лапласа.

Значения этой функции находят по специальной таблице, при этом учитывая, что

Тогда

Поэтому,

Пример. Цех в среднем выпускает 4% брака. Приемщик проверяет партию из 200 изделий. Если в ней окажется более 10 бракованных изделий, то вся партия бракуется. Какова вероятность того, что партия будет принята?

Решение.

Замечание.

Пусть событие A в n испытаниях появилось m раз.

Тогда вероятность отклонения относительной частоты от вероятности p можно найти по формуле:

Доказательство.

Тогда

Применим теорему 4:

Замечание.

Переходя к пределу при в равенстве

получим

— закон больших чисел (одна из формулировок).