Нормальные алгоритмы Маркова

Теория **нормальных алгоритмов** была разработана советским математиком Андреем Андреевичем Марковым в конце 1940-х годов.

При изучении разрешимости некоторых задач алгебры, он предложил новую модель вычислений, которую назвал **нормальными алгорифмами**.

Андрей Андреевич Марков (младший) (22.09.1903-11.10.1979) – советский математик, сын известного русского математика А.А.Маркова, основоположник советской школы конструктивной математики, автор понятия нормального алгоритма (1947 г.)

Нормальные алгорифмы Маркова (НАМ) — это строгая математическая форма записи алгоритмов обработки символьных строк, которую можно использовать для доказательства разрешимости или неразрешимости различных задач.

Эти алгоритмы представляют собой некоторые правила по переработке слов в каком-либо алфавите.

При этом исходные данные и результат работы алгоритма являются словами в этом алфавите.

Марков предположил, что ***любой алгоритм можно записать как НАМ***.

В отличие от машин Тьюринга **НАМ** — это "чистый" алгоритм, который не связан ни с каким "аппаратным обеспечением" (лентой, кареткой и т.п.).

НАМ преобразует одно слово (цепочку символов некоторого алфавита) в другое и задается *алфавитом* и *системой подстановок*.

Алфавитом будем называть любое непустое множество.
Его элементы называются **буквами**, а любая последовательность букв – **словами** в данном алфавите

Для удобства рассуждений допускается **пустое слово**, которые обозначим **Λ**

Слова будем обозначать буквами P, Q, R и с индексами

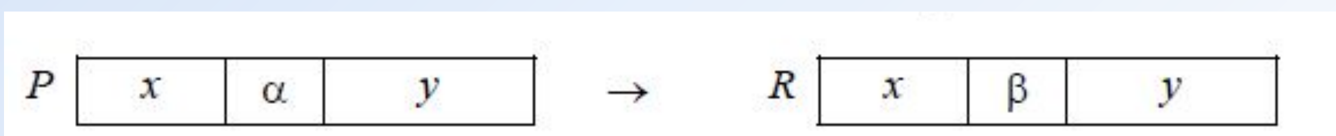
Формулой подстановки называется запись вида α→β (читается «α заменить на β»), где α и β – любые слова (возможно, и пустые).

При этом **α** называется левой частью формулы, а **β** – правой частью.

Сама ***подстановка (как действие) задается формулой подстановки и*** применяется к некоторому слову *P*.

Суть операции сводится к тому, что в слове P отыскивается часть, совпадающая с левой частью этой формулы (т.е. с α), и она заменяется на правую часть формулы (т.е. на β). При этом остальные части слова P (слева и справа от α) не меняются. Получившееся слово R называют **результатом подстановки.**

Условно это можно изобразить так:



Правила выполнения НАМ

Прежде всего, задается некоторое ***входное слово Р.***

Работа НАМ сводится к выполнению последовательности шагов. На каждом шаге входящие в НАМ формулы **подстановки просматриваются сверху вниз** и выбирается первая из формул, применимых к входному слову *P*, т.е. самая верхняя из тех, левая часть которых входит в *P.* Далее выполняется подстановка согласно найденной формуле. Получается новое слово *P'*.

На следующем шаге это слово *P' берется за исходное и к нему* применяется та же самая процедура, т.е. **формулы снова просматриваются сверху вниз начиная с самой верхней** и ищется первая формула, применимая к слову *P',* после чего выполняется соответствующая подстановка и получается новое слово *P''*. И так далее: $P \to P' \to P'' \to \ldots$

Следует обратить особое внимание на тот факт, что на каждом шаге формулы в НАМ всегда просматриваются начиная с самой первой.

Необходимые уточнения:

1. Если на очередном шаге была применена обычная формула ($\alpha \to \beta$), то работа НАМ продолжается.

2. Если же на очередном шаге была применена заключительная формула ($\alpha \mapsto \beta$), то после её применения работа НАМ прекращается. То слово, которое получилось в этот момент, и есть ***выходное слово,*** *т.е.* ***результат применения*** НАМ к входному слову.

Пусть дан алфавит $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,
слово $P = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$ и слово $Q = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}$

Под **объединением** слов PQ будем понимать слово:

$$PQ = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k}$$

В частности: $P\Lambda = \Lambda P = P$

Кроме этого: $(P_1 P_2) P_3 = P_1 (P_2 P_3)$

Слово P является **подсловом** слова Q, если слово P является составной частью слова Q, т.е. существуют такие (возможно пустые) слова R_1 и R_2, что $Q = R_1 P R_2$.

Рассмотрим упорядоченную пару слов (P,Q)

Марковской подстановкой (P,Q) называется следующая операция над словами:
в заданном слове R находят первое вхождение слова P и, не изменяя остальных частей слова R, заменяют в нем это вхождение словом Q

Замечание:

1) Полученное слово называется **результатом** применения марковской подстановки (P,Q) к слову R

2) Если первого вхождения слова P в слово R нет (и, следовательно, вообще нет ни одного вхождения P в R), то считается что марковская подстановка (P,Q) **не применима** к слову R

Частными случаями марковских подстановок являются подстановки с пустыми словами:

$$(\Lambda, Q), (P, \Lambda), (\Lambda, \Lambda)$$

Для обозначения марковской подстановки (P,Q) используют запись $P \to Q$

Эту запись называют **формулой подстановки** (P,Q)

Различают **простые подстановки** $P \to Q$ и **заключительные подстановки** $P \mapsto Q$

Пример

Данное слово: **521421**

Подстановка: **21 → 3**

Результат подстановки:

5343

Пример

Данное слово: **521421**

Подстановка: **$21 \mapsto \Lambda$**

Результат подстановки:

5421

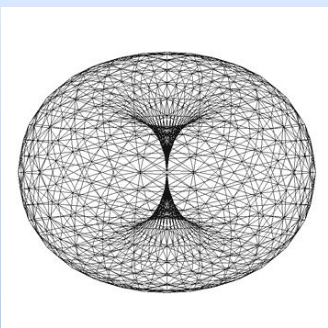
Пример

Данное слово: **521421**

Подстановка: **25 → 7**

Результат подстановки:

Не применима



Создавать - лучше, чем уничтожать,
а дарить - лучше, чем принимать