# Лекция 7
# Тема: *"Приложения производной. Дифференциал функции"*

## Логарифмическая производная.

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Прологарифмируем обе части этого выражения: $\ln y = \ln f(x)$, а теперь продифференцируем по $x$:

$$(\ln y)'_x = (\ln f(x))'_x \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'_x \Rightarrow y' = y \cdot (\ln f(x))' = f(x) \cdot (\ln f(x))',$$

т.е.

$$y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$$

***Определение.*** Операция, состоящая в последовательном применении к равенству $y = f(x)$ сначала логарифмирования, а затем дифференцирования, называется ***логарифмическим дифференцированием***, а производная, определяемая при этом – ***логарифмической производной***.

С помощью логарифмического дифференцирования, выведем формулу $(x^p)' = px^{p-1}$. Действительно,

$$y = x^p \Rightarrow \ln y = \ln x^p \Rightarrow \frac{1}{y} y' = \frac{p}{x} \Rightarrow y' = (x^p)' = px^{p-1}.$$

## Производная показательно-степенной функции.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.
Тогда функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется показательно-степенной.
Найдем ее производную:

$$y = u(x)^{v(x)} \Rightarrow \ln y = \ln u(x)^{v(x)} = v \ln u \Rightarrow \frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \Rightarrow$$

$$\left(u^v\right)' = u^v \left( v' \ln u + \frac{v}{u} u' \right)$$

***Пример.*** Найти производную функции $y = \cos x^{\sin x}$.

Решение: $y' = \left(\cos x^{\sin x}\right)' = \cos x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(\sin x) - tgx \cdot \sin x\right)$.

## Производная функции, заданной параметрически.

Пусть функция задана параметрически уравнениями вида:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где $y = y(t)$ и $x = x(t)$ – дифференцируемые функции параметра $t$ и, следовательно, непрерывные. Тогда если $\Delta x \to 0$, то $\Delta t \to 0$.

Найдем $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \dfrac{\lim\limits_{\Delta t \to 0}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Таким образом, производная функции, заданной параметрически определяется формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

***Пример.*** Найти производную функции $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$.

Решение: $y'_x = \dfrac{\left(\cos^2 t\right)'}{\left(\sin^2 t\right)'} = \dfrac{-2\cos t \sin t}{2\sin t \cos t} = -1.$

## Производная неявной функции.

Пусть функция задана неявно уравнением вида: $F(x, y) = 0$.

Продифференцировав это выражение по $x$, считая $y$ функцией $x$, получим линейное уравнение для производной $y' = y'_x$, из которого ее и определим.

***Пример.*** Найти производную функции $y^2 \cos x = \sin 3x$.

Решение:

$$y^2 \cos x = \sin 3x \Leftrightarrow y^2 \cos x - \sin 3x = 0 \Rightarrow$$

$$2yy' \cos x + y^2(-\sin x) - 3\cos 3x = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{y^2 \sin x + 3\cos 3x}{2y\cos x}$$

## Геометрические приложения производной.

### Уравнение касательной.

Пусть требуется найти уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$.
Уравнение любой прямой, проходящей через данную точку $M(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом $k$ имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$ .
Так как для касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ угловой коэффициент равен: $k_l = y'(x_0) = f'(x_0)$, то уравнение касательной имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Уравнение нормали.**

Если прямые $L_1$ и $L_2$ перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Тогда, если угловой коэффициент нормали $n$ в точке $M(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ обозначить $k_n$, то он будет равен:

$$k_n = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

следовательно, уравнение нормали $n$ в точке $M(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ примет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

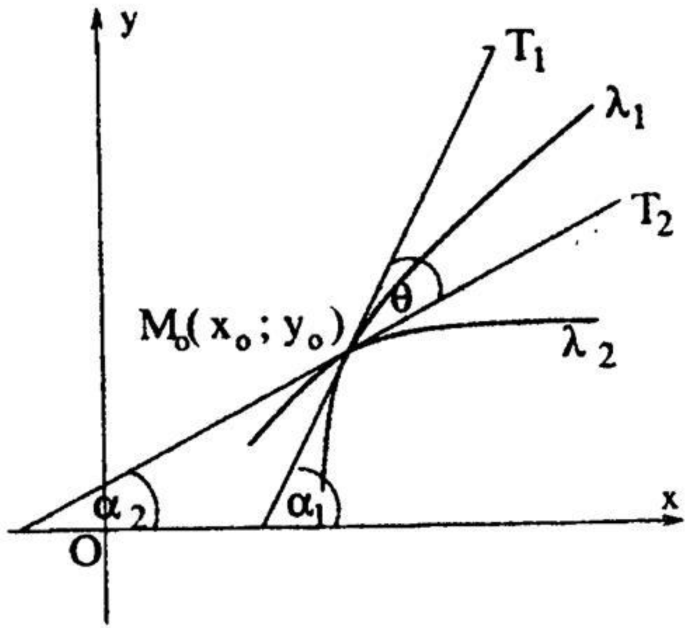
**Угол между двумя кривыми.**

Угол между двумя кривыми в точке их пересечения равен углу $\theta$ между касательными $T_1$ и $T_2$ к этим кривым в точке их пересечения $M(x_0; y_0)$.

Очевидно, что $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, тогда

$$tg\theta = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{M_0}$$

Следовательно, $\theta = arctg\left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{x = x_0}$.



***Пример.*** Найти уравнение касательной и нормали к кривой $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение: Так как $y_0 = f(x_0) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3 = 2$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $y_0{}' = f'(1) = -1$, то уравнение касательной имеет вид: $y = 2 - (x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0$, а уравнение нормали: $y = 2 + (x - 1) \Rightarrow x - y + 1 = 0$.

***Пример.*** Найти угол пересечения кривых $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

Решение: Находим точку пересечения кривых:

$$\sin x = \cos x \Rightarrow tgx = 1 \Rightarrow x = \pi/4.$$

$$\theta = arctg \frac{(\sin x)' - (\cos x)'}{1 + (\sin x)' \cdot (\cos x)'}\bigg|_{x=\pi/4} = arctg \frac{\cos x + \sin x}{1 - \cos x \cdot \sin x}\bigg|_{x=\pi/4} = arctg \frac{\sqrt{2}}{1 - 0{,}5} = arctg 2\sqrt{2}$$

## Дифференциал функции.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале $(a; b)$, т.е. имеет в каждой точке этого интервала производную $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Тогда на основании теоремы о связи между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$,

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Отсюда, приращение функции

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

может быть представлено в виде суммы двух слагаемых, первое из которых пропорционально приращению аргумента $\Delta x$ с коэффициентом пропорциональности, равным $f'(x)$ и зависящем от $x$, а второе является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$.

Справедливо и обратное: если для данного значения $x$ приращение функции

$$\Delta y = a\Delta x + \alpha,$$

где $\alpha$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $\Delta x$, то функция $y = f(x)$ в точке $x$ имеет производную $f'(x) = a$.

Действительно, из последнего равенства следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x}$, где в силу сказанного $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$ и, следовательно, $a = f'(x)$.

***Определение.*** ***Дифференциалом функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** $x$ называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается $dy$ или $df(x)$.

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Доказанные выше положения можно сформулировать в виде теоремы.

***Теорема.*** Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела бы в некоторой точке $x$ дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала производная.

***Пример.*** Найти дифференциалы функций: $y = x^2$ и $y = x$.

Решение: $dy = d(x^2) = (x^2)' \cdot \Delta x = 2x \cdot \Delta x$; $dy = dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Из примера следует, что

$$dx = \Delta x,$$

тогда формулу для дифференциала функции можно записать так:

$$dy = y' dx = f'(x) dx \ .$$

В фиксированной точке $x_0$ дифференциал функции $y = f(x)$ равен:

$$dy = f'(x_0) dx \ .$$

***Определение.*** ***Дифференциал функции*** $y = f(x)$ в точке $x$ есть произведение производной на дифференциал независимой переменной.

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x$ равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной: $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

# Геометрический смысл дифференциала.

Пусть $x$ – абсцисса точки $M$ на графике некоторой функции $y = f(x)$.

Дадим $x$ приращение $\Delta x$.

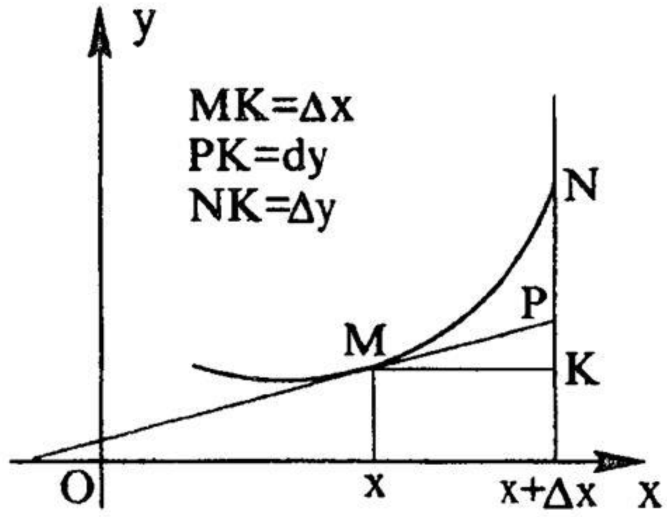
$N$ – точка с абсциссой $x + \Delta x$.

Через точку $M$ проведем касательную $MP$.

Очевидно, что $dx = \Delta x = MK$, $\Delta y = NK$, $y' = tg\angle PMK$.

Тогда из $\Delta MPK$ имеем:

$$MK \cdot tg\angle PMK = y' dx = PK = dy.$$




***Дифференциал функции в данной точке равен приращению ординаты касательной к графику функции, проведенной в данной точке при переходе от точки с абсциссой x к точке с абсциссой*** $x + \Delta x$.

## Свойства дифференциала:

- $dC = 0$;
- $d(u + v) = du + dv$;
- $d(uv) = v \cdot du + u \cdot dv$;
- $d(cu) = c \cdot du$;
- $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Предполагается, что $u$ и $v$ – дифференцируемые функции.

# Инвариантность формы первого дифференциала.

***Теорема.*** Формула для дифференциала $dy = y'dx$ сохраняет вид как в случае, когда $x$ является независимой переменной, так и в случае, когда $x$ зависит еще от одной переменной.

Доказательство: Если $x$ – независимая переменная, то

$$dy = y'dx\ .$$

Пусть теперь имеется сложная функция $y = y(x)$ и $x = x(u)$. Ее дифференциал равен

$$dy = y_u' \cdot du = y'_x \cdot \left(x_u' \cdot du\right) = y'_x \cdot dx\ .$$

Это доказывает теорему.

Это свойство дифференциала называется ***инвариантностью*** (неизменностью).

# Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Из определения приращения и дифференциала функции следует, что они отличаются друг от друга на величину, являющуюся бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta x$ .

Поэтому при малых $\Delta x$ имеет место приближенная формула

$$\Delta y \approx dy\ .$$

Тогда можно записать:

$$f(x + \Delta x) \approx dy + f(x) \approx f(x) + y'dx\ .$$

Данная формула может применятся к приближенным вычислениям значений функции в точках, близких к тем, в которых оно уже известно.

***Пример.*** Вычислить приближенно $tg\,46^o$.

Решение: Пусть $x = 45^o = \dfrac{\pi}{4}$, тогда $x + \Delta x = 46^o = \dfrac{46\pi}{180} \Rightarrow \Delta x = \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}01745$.

Имеем:

$$tg(x + \Delta x) \approx tgx + \left(tgx\right)' \Delta x = tgx + \frac{\Delta x}{\cos^2 x} \Rightarrow tg46^o \approx tg45^o + \frac{\pi/180}{\cos^2 45^o} \approx 1 + 2 \cdot 0{,}01745 \approx 1{,}0349$$

## Повторное дифференцирование.

Производная некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в общем случае может быть дифференцируемой функцией.

***Определение.*** Производная от производной называется ***второй производной*** (***производной второго порядка***) и обозначается $y'$ или $f'(x)$:

$$f'(x) = (f'(x))'.$$

***Определение.*** ***n-ой производной (производной n-го порядка)*** называется производная от производной порядка $n$-1.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Производные порядка выше первого называются ***производными высшего порядка***.

***Определение.*** ***Вторым дифференциалом (дифференциалом второго порядка)*** называется дифференциал от дифференциала функции.

$$d^2 y = d^2 f(x) = d(dy) = d(y' dx) = (y' dx)' dx = y' dxdx = y' dx^2.$$

(следует помнить, что $dx$ от $x$ не зависит).

***Определение.*** ***n-м дифференциалом (дифференциалом n-го порядка)*** называется дифференциал от дифференциала порядка $n$-1.

$$d^n y = d^n f(x) = d\,(d^{n-1} y) = y^{(n)} dx^n .$$

Дифференциалы порядка выше первого не обладают свойством инвариантности.

У второй производной есть ясный физический смысл.
Если материальная точка движется по прямой по закону $s = s(t)$, то ускорение этого движения равно второй производной от пути по времени:

$$a = v' = s'' = \frac{d^2 s}{dt^2} .$$

***Пример.*** Найти три первых дифференциала функции $y = x \ln x$.

Решение: $dy = y'dx = (\ln x + 1)dx$, $d^2 y = y'' dx^2 = \dfrac{dx^2}{x}$, $d^3 y = y''' dx^3 = -\dfrac{dx^3}{x^2}$.

# Спасибо за внимание