Занятие №1. Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.

Прокофьев Александр Александрович

Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ

Содержание

- Знакомство.
- Содержание курса.
- ЕГЭ 2010-2015, результаты и выводы (по материалам методических рекомендаций ФИПИ)
- ГИА
- Профильный ЕГЭ
- Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
- Печатные и электронные ресурсы.

Содержание курса

№	Тема занятий
1	Основные структурные изменения и особенности проведения государственной аттестации учащихся в 2015. Технология подготовки учащихся к овладению алгебраическими методами решения задач с параметрами.
2	Технология подготовки учащихся к овладению функциональными методами решения задач с параметрами.
3	Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами.
4	Технология подготовки учащихся к овладению геометрическими методами решения задач с параметрами.
5	Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами комбинированными методами.
Итоговая аттестация	По результатам посещаемости и успешности выполнения контрольных работ.

Задание С5 ЕГЭ 2010-2015 (итоги)

Год	% приступивших	1 балл	2 балла	3 балла	4 балла
2010	11,8	1,7	0,35	0,21	0,45
2011	12,1	3,1	1,4	0,65	0,87
2012	10,94	3,18 (3,7)	0,48 (0,8)	0,32 (0,6)	0,8 (1,1)
2013	14	4,2	0,9	0,6	1,5
2014	?	1,4	0,2	0,1	0,2
2015					

ЕГЭ 2010-2014 условия задач

Год	Условие
2010	Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+\|x^2-8x+15\|$ меньше 1.
2011	Найдите все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(\|x\|-5)^2+(y-4)^2=4,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.
2012	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left\|\frac{5}{x}-3\right\|=ax-2$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.
2013	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$ имеет единственный корень.
2014	**С5.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))^2-12a(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))+35a^2-6a-9=0$ имеет ровно два решения

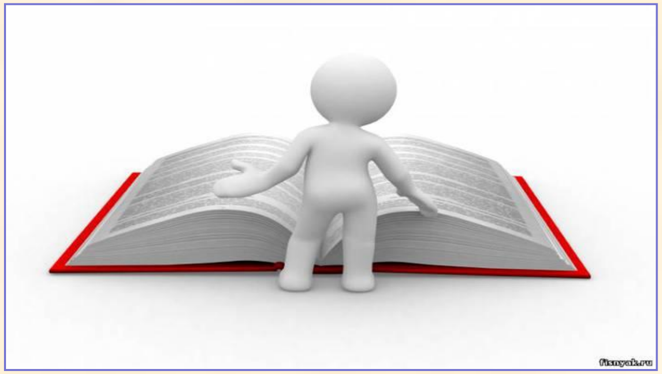
ЕГЭ 2015, демовариант (спецификация и кодификатор)

20	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	–	30

	Уравнения
2.1.1	Квадратные уравнения
2.1.2	Рациональные уравнения
2.1.3	Иррациональные уравнения
2.1.4	Тригонометрические уравнения
2.1.5	Показательные уравнения
2.1.6	Логарифмические уравнения
2.1.7	Равносильность уравнений, систем уравнений
2.1.8	Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными
2.1.9	Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных
2.1.10	Использование свойств и графиков функций при решении уравнений
2.1.11	Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем
2.1.12	Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений
	Неравенства
2.2.1	Квадратные неравенства
2.2.2	Рациональные неравенства
2.2.3	Показательные неравенства
2.2.4	Логарифмические неравенства
2.2.5	Системы линейных неравенств
2.2.6	Системы неравенств с одной переменной
2.2.7	Равносильность неравенств, систем неравенств
2.2.8	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
2.2.9	Метод интервалов
2.2.10	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

ФИПИ

	Определение и график функции
3.1.1	Функция, область определения функции
3.1.2	Множество значений функции
3.1.3	График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях
3.1.4	Обратная функция. График обратной функции
3.1.5	Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат



ЕГЭ 2015, демовариант (спецификация и кодификатор)

20	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	В	4	–	30

3.2		*Элементарное исследование функций*
	3.2.1	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания
	3.2.2	Чётность и нечётность функции
	3.2.3	Периодичность функции
	3.2.4	Ограниченность функции
	3.2.5	Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции
	3.2.6	Наибольшее и наименьшее значения функции
3.3		*Основные элементарные функции*
	3.3.1	Линейная функция, её график
	3.3.2	Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график
	3.3.3	Квадратичная функция, её график
	3.3.4	Степенная функция с натуральным показателем, её график
	3.3.5	Тригонометрические функции, их графики
	3.3.6	Показательная функция, её график
	3.3.7	Логарифмическая функция, её график

ФИПИ

20 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

ГИА (было)

Пример 4 (***ГИА-9, 2008, демонстрационный вариант, № 20***). Найдите все значения a, при которых неравенство

$$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leqslant 0$$

не имеет решений.

Пример 13 (***ГИА-9, 2010, МИОО, тренировочная работа, № 21***). Точка $N(1;2)$ принадлежит прямой $y = kx + 5$. При каких значениях m точка $M(2;m)$ будет принадлежать данной прямой?

Пример 16 (***ГИА-9, 2010, МИОО, тренировочная работа, № 23***). При каких значениях p прямая $y = x + 2p$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 72?

Пример 18 (***ГИА-9, 2010, пробный экзамен, № 20***). При каких значениях a точки $A(2;-10)$ и $B(2;a)$ расположены в разных полуплоскостях относительно прямой $2x + y = -3$?

Было какое-то разнообразие.

ГИА (ОГЭ)

2015 демовариант

23 Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

В 2014, 2013, 2012 (разнообразия не наблюдается!).

23 Постройте график функции $y=|x|(x-1)-2x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

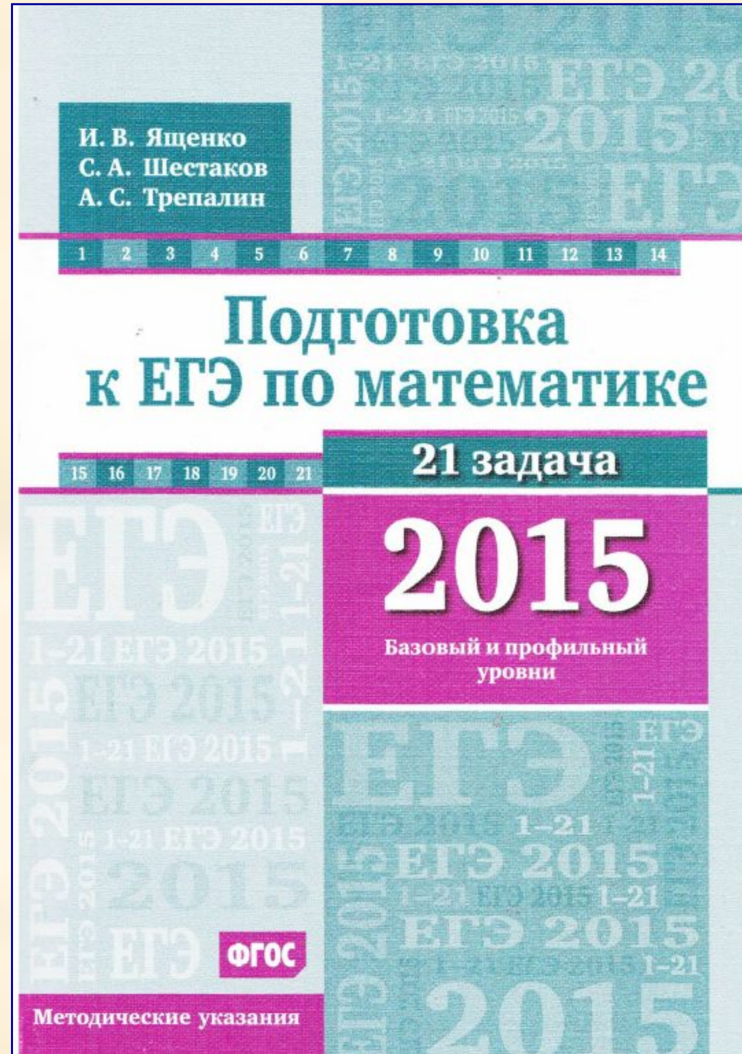
23 Постройте график функции $y=\begin{cases}-x^2-4x-4, & \text{если } x<-1,\\ 1-|x-1|, & \text{если } x\geq -1,\end{cases}$

и найдите, при каких значениях параметра a он имеет ровно две общие точки с прямой $y=a$.

23. Постройте график функции $y = 3\,|x+7| - x^2 - 13x - 42$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Литература для подготовки по заданию 20 ЕГЭ 2015 профильного уровней

ФИПИ



Литература для подготовки по заданию 20 ЕГЭ 2015 профильного уровней

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2012

Функция и параметр

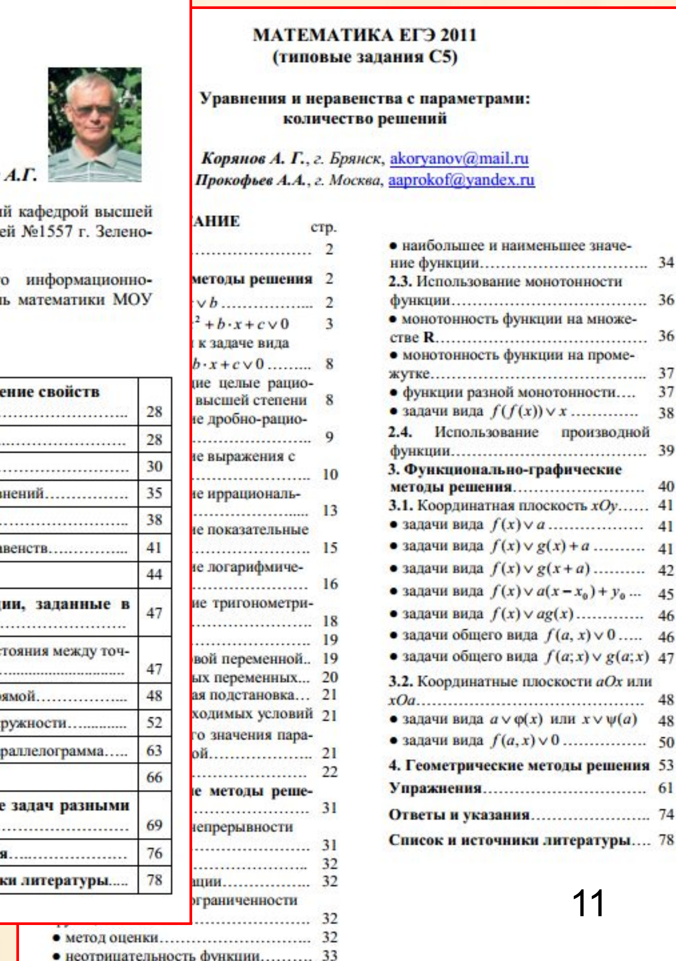
(типовые задания С5)

Прокофьев А.А. *Корянов А.Г.*

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике городского информационно-методического Центра (МБОУ БГИМЦ) г. Брянска, учитель математики МОУ лицей №27 г. Брянска; e-mail: akoryanov@mail.ru

СОДЕРЖАНИЕ стр.



МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011
(типовые задания С5)

Уравнения и неравенства с параметрами: количество решений

Корянов А. Г., г. Брянск, akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А., г. Москва, aaprokof@yandex.ru

О задании 20 (из методички 2015)

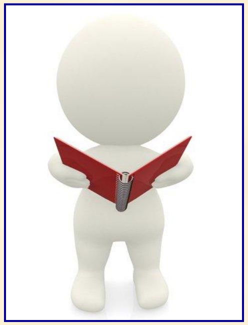
Задание 20

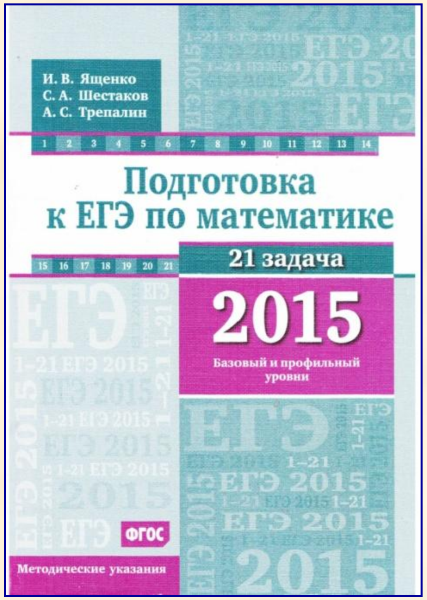
Тип задания по кодификатору требований Уравнение, неравенство или система уравнений или неравенств.

Характеристика задания Задача с параметром, требующая уверенного владения материалом и применения нескольких свойств и теорем.

Комментарий Это задание, как и следующее за ним, является одним из самых сложных заданий Единого государственного экзамена по математике. Если вы претендуете на высокий балл, то нужно постараться решить эту задачу или хотя бы продвинуться в решении этой задачи как можно дальше. Для успешного решения задачи важно свободно оперировать с изученными определениями, свойствами, теоремами, применять их в различных ситуациях, анализировать условие и находить возможные пути решения. Особое внимание следует уделить задачам с параметром, решение которых основывается на таких свойствах функций, как ограниченность, монотонность, четность и нечетность, требует умения находить область определения, множество значений и строить графики основных элементарных функций.

ФИПИ





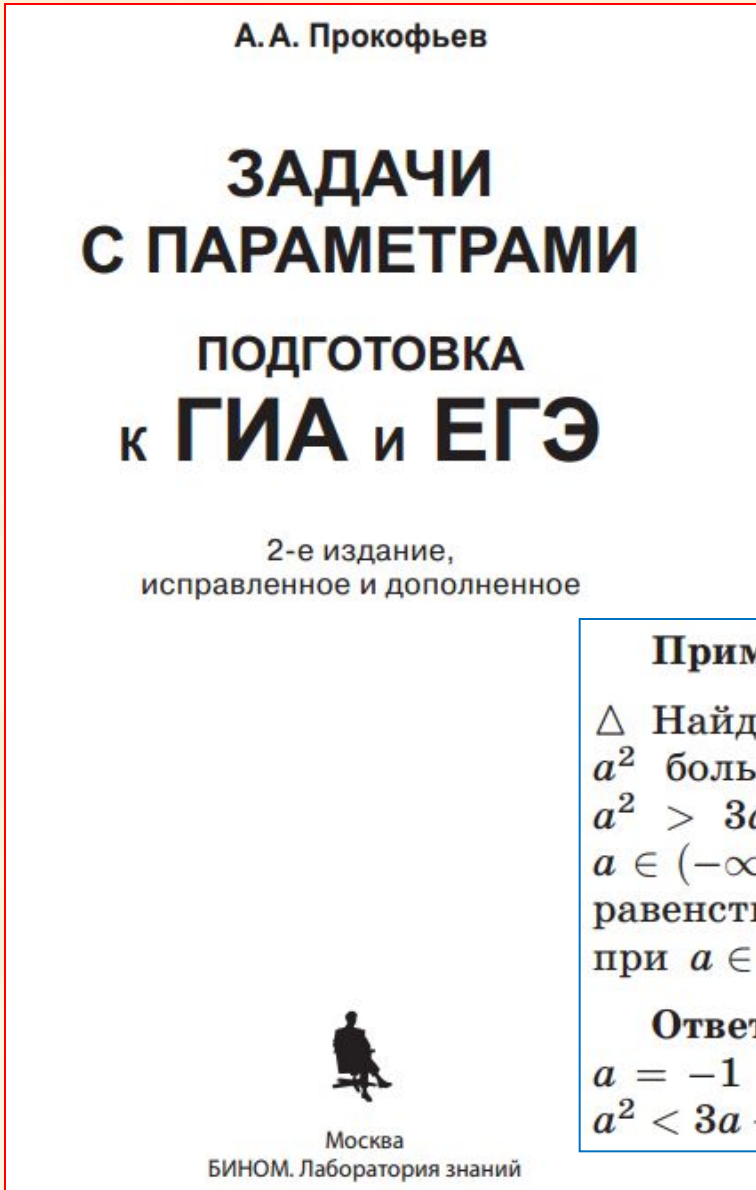
О способах подготовки к решению задач с параметрами

- Полезно познакомить большинство учащихся (задачи имеют развивающую направленность и способствуют развитию логического мышления).
- Начинать нужно уже с момента начала изучения линейной функции (в 7-9 классе можно познакомить с большинством идей). Желательно заканчивать изучение темы на решение уравнений, неравенств и их систем включением 1-2 примеров с параметром.
- Особое внимание необходимо уделить квадратному трехчлену.
- Рассчитывать на успех на экзамене можно только у сильной части школьников.
- Готовить для сильных учеников отдельные «листки» по задаче С5 с выстроенной последовательностью задач.
- Каждая группа задач на одну идею. Лучше для начала без сложной техники.

Алгебраические методы решения

Как правило, к алгебраическим методам относят методы решения уравнений, неравенств и систем с параметром при всех допустимых значениях параметра, основанные на алгебраических преобразованиях (равносильные переходы, замены, использование необходимых и достаточных условий) и применении формул и приемов для решения простейших уравнений (линейных, дробно-рациональных, квадратичных, показательных, логарифмических, тригонометрических).

С чего следует начать?



Начать следует со сравнения чисел, заданных формулами, зависящими от параметра.

Полезно использовать геометрическую интерпретацию расположения этих чисел на числовой прямой.

Пример 2. Сравнить числа a^2 и $3a+4$.

△ Найдем значения параметра a, при которых число a^2 больше числа $3a+4$. Для этого решим неравенство $a^2 > 3a+4$ или $a^2-3a-4>0$. Его решение есть $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$. При $a=-1$ и $a=4$ справедливо равенство $a^2=3a+4$, т. е. числа равны. Соответственно, при $a \in (-1; 4)$ число a^2 меньше числа $3a+4$. ▲

Ответ: Если $a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$, то $a^2 > 3a+4$; если $a=-1$ или $a=4$, то $a^2=3a+4$; если $a \in (-1; 4)$, то $a^2 < 3a+4$.

Простейшие примеры

Следует также начинать с простейших примеров, решение которых не требует дополнительных знаний, но приучает с первых шагов к аккуратному обращению с параметром, знакомит с понятием контрольных значений параметра и демонстрирует ветвление ответа.

I. Решите для каждого значения параметра a:

1. $ax \geq 1$
2. $(a^2 - 9)x = a + 3$
3. $x^2 = a$
4. $x^2 > a$
5. $x^2 \leq a$
6. $|x| = a$
7. $|a| = x$
8. $|x - 3| > a$
9. $\sqrt{x} > a$
10. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq a$
11. $2^x \geq a$
12. $\log_a x < 1$
13. $\log_x a < 1$
14. $\sin x = a$
15. $\arccos x = a$
16. $\arcsin x = a$
17. $\sin x < a$
18. $\sin x \geq a$
19. $\cos x \leq a$
20. $\cos x > a$

Простейшие примеры

Пример. Решить неравенство:

$$a(a-2)x > 2-a.$$

Пример. Определите, при каких значениях параметра a уравнение является (1) квадратным; (2) неполным квадратным; (3) линейным.

а) $5a(a-2)x^2 + (5a-2)x - a^3 - 3 = 0;$

б) $ax(ax+3) + 6 = x(ax-6).$

Пример. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 5ax + 6a^2 \leqslant 0, \\ x - a - 2 > 0. \end{cases}$$

Алгебраические методы решения

Пример из пособия ФИПИ (12 вариантов) на сравнение чисел, заданных параметрически, и использование числовой прямой Ox.

20 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 - 2a^2 < 4, \\ 2x + a^2 \geq -4, \\ x + a^2 < 2 \end{cases}$ содержит все числа из отрезка $[-1; 0]$.

Ответ: $-1{,}5 < a < 2$.

Необходимые и достаточные условия на примере квадратного трехчлена ($a > 0$)

Задача 1. С помощью дискриминанта D квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ с коэффициентом $a > 0$, абсциссы $x_B = -\dfrac{b}{2a}$ вершины соответствующей параболы, а также значений функции f в отдельных точках, сформулируйте необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот квадратный трехчлен:

а) не имел корней;

б) имел единственный корень;

в) имел два корня, расположенные по разные стороны от числа d;

г) имел два корня, между которыми лежит отрезок $[d_1; d_2]$;

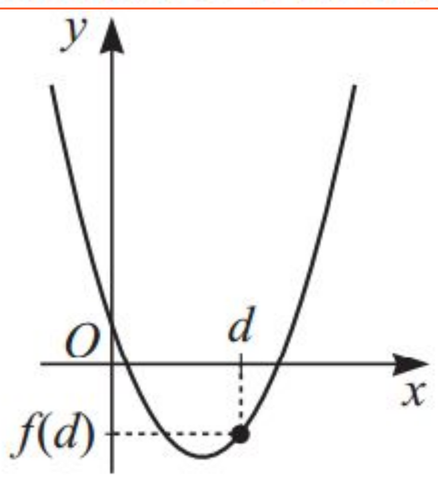
д) имел два корня, каждый из которых больше числа d;

е) имел два корня на отрезке $[d_1; d_2]$;

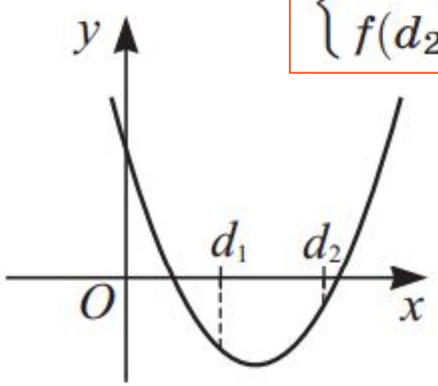
Необходимые и достаточные условия на примере квадратного трехчлена ($a > 0$)

ж) имел два корня, расположенных по одному на каждом из двух непересекающихся интервалов $(d_1; d_2)$ и $(d_3; d_4)$;
з) не имел корней, больших числа d;
и) не имел корней на отрезке $[d_1; d_2]$;
к) имел хотя бы один корень, больший числа d;
л) имел хотя бы один корень на отрезке $[d_1; d_2]$;
м) имел ровно один корень, больший числа d;
н) имел ровно один корень на интервале $(d_1; d_2)$.

$f(d) < 0$ — необходимое и достаточное



$$\begin{cases} f(d_1) < 0, \\ f(d_2) < 0. \end{cases}$$



Необходимые и достаточные условия на примере квадратного трехчлена ($a \neq 0$)

Утверждения о расположении корней x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$	Необходимые и достаточные условия
1. Оба корня $f(x)$ больше данного числа l: $l < x_1 < x_2$	$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ x_0 > l \end{cases}$ (1)
2. Оба корня $f(x)$ меньше данного числа m: $x_1 < x_2 < m$	$\begin{cases} D > 0, \\ af(m) > 0, \\ x_0 < m \end{cases}$ (2)
3. Оба корня $f(x)$ принадлежат данному интервалу $(l; m)$: $l < x_1 < x_2 < m$	$\begin{cases} D > 0, \\ af(l) > 0, \\ af(m) > 0, \\ l < x_0 < m \end{cases}$ (3)
4. Только меньший корень $f(x)$ принадлежит данному интервалу $(l; m)$: $l < x_1 < m < x_2$	$\begin{cases} af(l) > 0, \\ af(m) < 0 \end{cases}$ (4)
5. Только больший корень $f(x)$ принадлежит данному интервалу $(l; m)$: $x_1 < l < x_2 < m$	$\begin{cases} af(l) < 0, \\ af(m) > 0 \end{cases}$ (5)
6. Один из корней $f(x)$ меньше данного числа l, а другой корень больше данного числа m: $x_1 < l < m < x_2$	$\begin{cases} af(l) < 0, \\ af(m) < 0 \end{cases}$ (6)
7. Один из корней $f(x)$ меньше данного числа l, а другой корень больше этого числа: $x_1 < l < x_2$	$af(l) < 0$ (7)

Необходимые и достаточные условия на примере квадратного трехчлена

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2-(4a+3)x+3a+4=0$ имеет два корня разных знаков, модуль каждого из которых меньше 5.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №11 (748)
КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРОМ
С. ШЕСТАКОВ isser@yandex.ru
ноябрь 2013

Решение. Пусть $f(x)=x^2-(4a+3)x+3a-4$, x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ — корни квадратного трехчлена $f(x)$.

Условие задачи будет выполнено, если $x_1\in(-5;0)$, значит $\begin{cases} f(-5)>0, \\ f(0)<0, \end{cases}$

а $x_2\in(0;5)$, значит $\begin{cases} f(5)>0, \\ f(0)<0. \end{cases}$

Вместо двух систем можно записать одну: $\begin{cases} f(-5)>0, \\ f(5)>0, \\ f(0)<0. \end{cases}$

Поскольку $f(0)=3a+4$, $f(-5)=23a+44$, $f(5)=14-17a$,
$f(0)=3a+4$, $f(-5)=23a+44$, $f(5)=14-17a$,
получаем систему

$$\begin{cases} 23a+44>0, \\ 14-17a>0, \\ 3a+4<0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad -\frac{44}{23}<a<-\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{44}{23};-\frac{4}{3}\right)$.

Случай замены при упрощении уравнения или неравенства

Иногда уравнение или неравенство можно свести к линейному или квадратному (квадратичному) с помощью замены переменной.

Сделав замену переменной, нужно обязательно переформулировать задачу, поскольку новая переменная во многих случаях принимает значения только из определенного множества.

Например, при замене $t = \sin x$ нужно учитывать, что переменная t может принимать значения только из отрезка $[-1; 1]$; при замене $t = \log_2(x^2 + 4)$ – только из промежутка $[2; +\infty]$ и т.д.

Переформулировака задачи для новой переменной в таких случаях является необходимой частью решения.

Сведение задачи к системе линейных уравнений

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений
$$\begin{cases} 12\cos^2 x + 5\cos^2 y + 11 = 6a, \\ 15\cos^2 x + 4\cos^2 y + 25 = 12a. \end{cases}$$

Решение. Данная система является системой линейных уравнений относительно $u = \cos^2 x$ и $v = \cos^2 y$. Ясно, что $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 1]$. Задачу можно переформулировать так:

Найти все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} 12u + 5v + 11 = 6a, \\ 15u + 4v + 25 = 12a \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям $u \in [0; 1]$, $v \in [0; 1]$.

Решив систему уравнений, получим $u = \dfrac{4a-9}{3}$, $v = 2a - 5$.

Решив систему неравенств $\begin{cases} 0 \le \dfrac{4a-9}{3} \le 1, \\ 0 \le 2a - 5 \le 1. \end{cases}$ из первого неравенства получим, что $a \in [2{,}25; 3]$, из второго — что $a \in [2{,}5; 3]$.

Ответ: $a \in [2{,}5; 3]$.

Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена

Пример (**ЕГЭ, 2010**). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение* $36^x-(8a+5)\cdot 6^x+16a^2+20a-14=0$ *имеет единственное решение.*

Решение. Пусть $6^x=t$, где $t>0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2-(8a+5)\cdot t+16a^2+20a-14=0$.

Так как дискриминант D полученного уравнения положительный $D=(8a+5)^2-4(16a^2+20a-14)=81$, то уравнение имеет два различных корня $t=4a-2$ или $t=4a+7$, причем при всех значениях a верно неравенство $4a-2<4a+7$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, если одно из чисел $4a-2$ и $4a+7$ будет положительным, а другое неположительным. Отсюда следует

$$\begin{cases}4a+7>0,\\ 4a-2\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \quad -1,75<a\le 0,5.$$

Ответ: $-1,75<a\le 0,5$.

МАТЕМАТИКА
методическая газета для учителей математики
А. КОРЯНОВ, А. ПРОКОФЬЕВ, 1–15 март 2011

Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного трехчлена

4.8.1. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение.

а) $(p+1)\cdot 4^x + 4\cdot 2^x + p - 2 = 0$;

б) $(p-1)\cdot 4^x - 4\cdot 6^x + (p+2)\cdot 9^x = 0$.

4.8.2. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение не имеет решений.

а) $(p-4)\cdot 9^x + (p+1)\cdot 3^x + 2p - 1 = 0$;

б) $(10-p)\cdot 5^{2x+1} - 2\cdot 5^{x+1} + 6 - p = 0$.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

БИНОМ

Прокофьев А.А.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_5(y+3) - 2\log_{25} x = 0, \\ (x+a)^2 - 2(y+6) - 9a = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Замена и обратная замена

Пример 6. При каждом значении параметра a решить уравнение $a \cdot 5^{|\cos x|} + 1 = (a - 1)^2$.

Решение. Раскроем скобки в правой части уравнения и приведем подобные. Получим уравнение

$$a \cdot 5^{|\cos x|} = a^2 - 2a.$$

Если $a = 0$, уравнение обращается в тождество, справедливое при любом значении переменной, то есть в этом случае $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения на a, получим $5^{|\cos x|} = a - 2$.

Пусть $t = 5^{|\cos x|}$. Так как $0 \leq |\cos x| \leq 1$, то $5^0 \leq t \leq 5^1$, или $1 \leq t \leq 5$. Значит, $1 \leq a - 2 \leq 5$, откуда $3 \leq a \leq 7$. Сделаем с учетом неравенства $3 \leq a \leq 7$ обратную замену:

$$|\cos x| = \log_5 (a - 2).$$

Таким образом, $x = \pm\arccos(\log_5 (a - 2)) + \pi n$, $n \in Z$.

наиболее компактной форме можно записать, воспользовавшись единичной окружностью. Таким образом, $x = \pm\arccos(\log_5 (a - 2)) + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\pm\arccos(\log_5 (a - 2)) + \pi n$, $n \in Z$ при $a \in [3; 7]$; $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0$; при прочих a решений нет.

Уравнение $f(x)=a$ или неравенство $f(x)\vee a$.

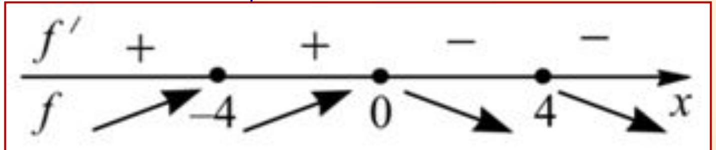
Уравнение $f(x)=a$ или неравенство $f(x)\vee a$ (символ $\vee$ означает любой из знаков $\leqslant, \geqslant$) имеет решение, если $a\in E(f)$; неравенство $f(x)>a$ имеет решение, если $a\in E(f)$ и $a\neq \max\limits_{D(f)} f(x)$; неравенство $f(x)<a$ имеет решение, если $a\in E(f)$ и $a\neq \min\limits_{D(f)} f(x)$.

Пример. При каких значениях параметра a не имеет решений уравнение $\sqrt[3]{4-x}+\sqrt[3]{4+x}=\sqrt[3]{a+2}$?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[3]{4-x}+\sqrt[3]{4+x}$.

$D(f)=\mathbb{R}$. Найдем производную $f'(x)=\left(\sqrt[3]{4-x}+\sqrt[3]{4+x}\right)'=$

$$=-\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(4-x)^2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(4+x)^2}}=\frac{\sqrt[3]{(4-x)^2}-\sqrt[3]{(4+x)^2}}{3\cdot\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}.$$



$D(f')=(-\infty;-4)\cup(-4;4)\cup(4;+\infty)$. $f'(x)=0$ при $x=0$.

$f(-4)=f(4)=2$, $f(0)=2\sqrt[3]{4}$. При $x\to\pm\infty$ $f(x)=\sqrt[3]{4+x}-\sqrt[3]{x-4}=$

$$=\frac{8}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{x^2-16}+\sqrt[3]{(x-4)^2}}\to 0.$$ Значит, $E(f)=(0;2\sqrt[3]{4}]$.

Решений нет, если $\sqrt[3]{a+2}\leq 0$ или $\sqrt[3]{a+2}>2\sqrt[3]{4}$.

Ответ: $a\leq -2$, $a>30$.

Уравнения, содержащие модули

При решении уравнений, содержащих знаки абсолютной величины, следует пользоваться следующими логическими схемами.

В первом случае при переходе использовано определение модуля.

$$|f(x,a)| = g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,a) = g(x,a), \\ f(x,a) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x,a) = g(x,a), \\ \quad f(x,a) < 0; \end{cases} \end{array} \right.$$

Во втором — используется неотрицательность абсолютной величины.

$$|f(x,a)| = g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x,a) = g(x,a), \\ g(x,a) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x,a) = g(x,a), \\ \quad g(x,a) \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Для решения уравнений вида

$$|f_1(x,a)| + \ldots + |f_k(x,a)| - |f_{k+1}(x,a)| - \ldots - |f_n(x,a)| = g(x,a)$$

применяют *метод «частичных областей»* или *метод интервалов*.

Лучше, наверное, использовать термин «метод промежутков».

Уравнения, содержащие модули

Демонстрационный вариант ЕГЭ-2009

Задача В8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\big|\,|x| + 5 - a\,\big| = 2 \qquad (1)$$

имеет ровно 3 корня.

1-й шаг. Поскольку правая часть уравнения (1) является положительным числом, это уравнение распадается на два уравнения (без всякого анализа знаков выражения $|x| + 5 - a$ под внешним знаком модуля):

$$|x| + 5 - a = 2 \Leftrightarrow |x| = a - 3;$$

$$|x| + 5 - a = -2 \Leftrightarrow |x| = a - 7.$$

2-й шаг. На плоскости $(x; y)$ построим графики функций $y = |x|$, $y = a - 3$, $y = a - 7$. Уравнение (1) имеет ровно 3 корня тогда и только тогда, когда прямая $y = a - 3$ пересекает график $y = |x|$ в двух точках, а прямая $y = a - 7$ — в одной. Так как $a - 3 > a - 7$, это возможно только в случае $|x| = a - 7 = 0$, то есть для $a = 7$.

Описанный метод решения задачи с параметром в методической литературе называется прямым методом.

Он заключается в том, что уравнение (неравенство, система) с параметром начинает решаться как обычное уравнение (неравенство, система). Обычно до некоторого места рассуждения и характер вычислений совершенно не зависят от наличия параметра (как будто вместо него стоит конкретное число). Однако, начиная с некоторого места, рассуждения начинают зависеть от параметра. В сложных задачах это приводит к логическому «дереву случаев», состоящему из достаточно большого числа причудливо переплетенных «ветвей». Разобраться в структуре этого «дерева случаев» довольно тяжело.

Ответ: $a = 7$.

№1/2010 • МАТЕМАТИКА

Уравнения, содержащие модули

Пример 5. При каких значениях параметра a все решения уравнения $2|x-a|+a-4+x=0$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x \leqslant 4$?

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ БИНОМ
Прокофьев А.А.

Решение.

$$2|x-a|+a-4+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2a+a-4+x=0, \\ x-a \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2a-2x+a-4+x=0, \\ x-a<0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=(a+4)/3, \\ x \geqslant a, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3a-4, \\ x<a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=(a+4)/3, \\ (a+4)/3 \geqslant a \end{cases} \\ \begin{cases} x=3a-4, \\ 3a-4<a; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=(a+4)/3, \\ a \leqslant 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=3a-4, \\ a<2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверим выполнение ограничения: $0 \leqslant x \leqslant 4$. Для корня $x=(a+4)/3$ получаем

$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{a+4}{3} \leqslant 4, \\ a \leqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leqslant a \leqslant 8, \\ a \leqslant 2; \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leqslant a \leqslant 2.$$

Для $x=3a-4$

$$\begin{cases} 0 \leqslant 3a-4 \leqslant 4, \\ a<2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/3 \leqslant a \leqslant 8/3, \\ a<2; \end{cases} \Leftrightarrow 4/3 \leqslant a<2.$$

Ответ: $4/3 \leqslant a \leqslant 2$.

Уравнения, содержащие модули

Пример. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$3a + 2|x - a| = |x + 3|.$$

1. При $a < -3$ имеем

$$3a + 2|x - a| = |x + 3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}
\begin{cases} x < a, \\ 3a + 2(-x + a) = -(x + 3), \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} x < a, \\ x = 5a + 3, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} a < -3, \\ x = 5a + 3, \end{cases} \\
\begin{cases} a \leqslant x < -3, \\ 3a + 2(x - a) = -(x + 3), \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant x < -3, \\ x = -\dfrac{a + 3}{3}, \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant -3/4, \\ a > 6, \\ \text{нет решений} \end{cases} \\
\begin{cases} -3 \leqslant x, \\ 3a + 2(x - a) = x + 3; \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} -3 \leqslant x, \\ x = 3 - a; \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} a < -3, \\ x = 3 - a. \end{cases}
\end{array}\right.$$

И т.д.

Неравенства, содержащие модули

При решении неравенств, содержащих знаки абсолютной величины, следует пользоваться следующими логическими схемами:

а) $|f(x,a)| > g(x,a) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x,a) > g(x,a), \\ f(x,a) < -g(x,a); \end{array}\right.$

или

б) $|f(x,a)| < g(x,a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a) < g(x,a), \\ f(x,a) > -g(x,a). \end{cases}$

Для решения неравенств вида

$$|f_1(x,a)| + \ldots + |f_k(x,a)| - |f_{k+1}(x,a)| - \ldots - |f_n(x,a)| \geqslant g(x,a)$$

применяют *метод «частичных областей»* или *метод интервалов*.

Лучше, наверное, использовать термин «метод промежутков».

Неравенства, содержащие модули

Пример. Для каждого значения a решить неравенство

$$2x + |x - a| > 1.$$

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
Прокофьев А.А.

△ Используя определение модуля, перейдем к совокупности двух систем. Данное неравенство равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} 2x + x - a > 1, \\ x - a \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{a+1}{3}, \\ x \geqslant a; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

и

$$\begin{cases} 2x - x + a > 1, \\ x - a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - a, \\ x < a. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Для системы (I), сравнивая числа $\dfrac{a+1}{3}$ и a, получим $\dfrac{a+1}{3} \geqslant a$ при $a \leqslant 0,5$. Тогда если $a \leqslant 0,5$, то $x > \dfrac{a+1}{3}$; если $a > 0,5$, то $x \geqslant a$.

Для системы (II) получаем неравенство $1 - a < x < a$, справедливое при $a > 0,5$.

Объединяя полученные решения, получим окончательный ответ. ▲

Ответ: Если $a \leqslant 0,5$, то $x \geqslant \dfrac{a+1}{3}$; если $a > 0,5$, то $1 - a < x$.

Методы решений иррациональных уравнений

При решении иррациональных уравнений обычно используются следующие методы: (1) переход к равносильному рациональному уравнению возведением обеих частей уравнения в необходимую степень; (2) переход к смешанной системе, состоящей из уравнений и неравенств; (3) метод замены; (4) метод введения вспомогательных неизвестных (способ подстановки); (5) метод геометрической интерпретации; а также некоторые другие специальные методы решения.

Переход к смешанной системе

При решении иррационального уравнения этим методом используется следующая эквивалентность (при $n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[2n]{f(x,a)} = g(x,a) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,a) = (g(x,a))^{2n}, \\ g(x,a) \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt[4]{a+x} - \sqrt[4]{a-x} = 2\sqrt[8]{a^2 - x^2}.$$

Методы решений иррациональных уравнений

Пример 5. Для каждого значения параметра a решить уравнение $x+\sqrt{x}=a$.

△ Заметим, что $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \geqslant 0$. Перенося x в правую часть уравнения, получим уравнение $\sqrt{x}=a-x$.

$$\sqrt{x}=a-x \Leftrightarrow \begin{cases} x=a^2-2ax+x^2, \\ a-x \geqslant 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2=0, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

При $a \geqslant -\frac{1}{4}$ корнями уравнения системы являются числа $x_1=\dfrac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$ и $x_2=\dfrac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Поскольку $x_2>a$, проверим выполнение условий $0 \leqslant x \leqslant a$ для x_1:

$$0 \leqslant x_1 \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geqslant 2a+1-\sqrt{4a+1}, \\ 2a+1-\sqrt{4a+1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+1 \geqslant 1, \\ 4a^2+4a+1 \geqslant 4a+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \geqslant 0. \blacktriangle$$

Ответ: Если $a \geqslant 0$, то $x=\dfrac{2a+1-\sqrt{4a+1}}{2}$; при $a<0$ решений нет.

Методы решений иррациональных уравнений

Метод замены

Найти значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x+1}=x+a$ имеет только одно решение.

Решение.

Пусть $\sqrt{x+1}=t,\ t\geq 0,\ x=t^2-1.$

$$t^2-t-1+a=0. \qquad (*)$$

Исходное уравнение имеет один корень при тех и только тех значениях a, при которых уравнение (*) имеет один неотрицательный корень.

1. $D=0$, $D=1-4(-1+a)=5-4a$, $5-4a=0$, $a=1{,}25$; $t=0{,}5>0$. Значит, исходное уравнение при $a=1{,}25$ имеет один корень.

2. Если $D>0$, то есть $a<1{,}25$, то уравнение (*) имеет два корня. При этом если $a-1<0$, то эти корни разных знаков, то есть только один из них положительный.

$$\begin{cases} a<1{,}25, \\ a<1 \end{cases} \Leftrightarrow a<1.$$

Итак, если $a<1$, то уравнение (*) имеет один положительный корень и исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: $a<1$, $a=1{,}25$.

Методы решений иррациональных уравнений

Метод замены

Пример. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=a.$$

$\triangle$ Пусть $y=\sqrt{x+1}$, где $y\geqslant 0$. Тогда $x=y^2-1$. Исходное уравнение преобразуется к виду $y-\sqrt{2-y^2}=a$ или $\sqrt{2-y^2}=y-a$.

$$\sqrt{2-y^2}=y-a \Leftrightarrow \begin{cases} 2-y^2=y^2-2ay+a^2, \\ y-a\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-2ay+a^2-2=0, \\ y\geqslant a. \end{cases}$$

и т.д.

Методы решений иррациональных уравнений

Метод введения вспомогательных переменных

Данный метод состоит во введении вспомогательных неизвестных, с помощью которых уравнение сводится к системе рациональных уравнений относительно новых переменных. Например:

$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt{x+b}=3 \Leftrightarrow \begin{cases} v=\sqrt{x+b}, \quad \text{где } v\geqslant 0, \\ u=\sqrt[3]{x-a}, \\ u+v=3, \\ v^2-u^3=a+b. \end{cases}$$

Пример. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a.$$

$\triangle$ Пусть $\sqrt{x^2-1}=u$, $\sqrt{x^2-2}=v$, тогда получим систему

$$\begin{cases} u+v=a, \\ u^2-v^2=1, \\ u\geqslant 0, \\ v\geqslant 0. \end{cases}$$

и т.д.

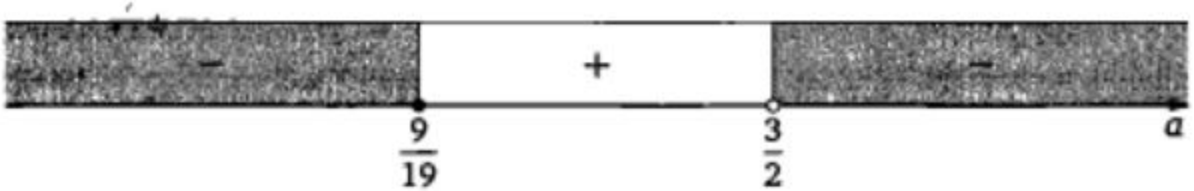
Задание 20. Иррациональные уравнения

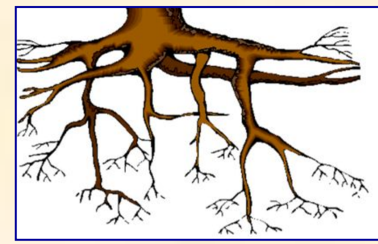
Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x+\sqrt{x^2-4ax-7a}=3$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{x^2-4ax-7a}=3-x$. Левая часть уравнения неотрицательна в силу неотрицательности квадратного корня. Если правая часть уравнения отрицательна, корней оно не имеет. Если правая часть уравнения неотрицательна, возведение в квадрат обеих его частей является равносильным преобразованием, т. е. не приводит ни к потере корней, ни к приобретению посторонних корней. В этом случае приходим к системе

$$\begin{cases} x\leqslant 3, \\ x^2-4ax-7a=9-6x+x^2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x\leqslant 3, \\ (6-4a)x=7a+9. \end{cases}$$

При $a=1{,}5$ уравнение системы не имеет корней. При $a\neq 1{,}5$ корнем уравнения системы является $x=\dfrac{7a+9}{6-4a}$. В этом случае данное уравнение имеет хотя бы один корень, только если $\dfrac{7a+9}{6-4a}\leqslant 3$. Перенеся 3 в левую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придем к неравенству $\dfrac{19a-9}{6-4a}\leqslant 0$. Решив последнее неравенство методом интервалов, получим $a\in\left(-\infty;\ \dfrac{9}{19}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};\ +\infty\right)$:





Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac{9}{19}\right]\cup\left(\dfrac{3}{2};\ +\infty\right)$.

Разные задачи с параметром, решаемые алгебраическими методами

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнения $x^2+2x+a=17$ и $x^2+5x=3a+18$ имеют хотя бы один общий корень.

Решение. Пусть x_0 — корень каждого из данных уравнений. Тогда справедливы тождества

$$x_0^2+2x_0+a-17=0 \tag{1}$$

и

$$x_0^2+5x_0-3a-18=0. \tag{2}$$

Вычитая почленно равенство (1) из (2), получим $3x_0-4a-1=0$, откуда $x_0=\dfrac{4a+1}{3}$. Таким образом, данные уравнения имеют не более одного общего корня $x_0=\dfrac{4a+1}{3}$. Подставим $\dfrac{4a+1}{3}$ вместо x в любое из уравнений, например в первое. Получим

$$\left(\frac{4a+1}{3}\right)^2+2\cdot\frac{4a+1}{3}+a-17=0.$$

Это уравнение является квадратным относительно a. Выполнив преобразования, приведем его к стандартному виду: $16a^2+41a-146=0$. Корнями последнего уравнения являются $a=-\dfrac{73}{16}$ и $a=2$.

Ответ: $a=-\dfrac{73}{16}$, $a=2$.

Разные задачи с параметром, решаемые алгебраическими методами

Найдите наибольшее из значений параметра a, для которого существуют x и y, удовлетворяющие уравнению $x^2 + 2y^2 + a^2 + xy - ax + ay = 3$.

Решение:

$x^2 + (y-a)x + (2y^2 + a^2 + ay - 3) = 0.$

$D \geqslant 0.$

$(y-a)^2 - 4(2y^2 + a^2 + ay - 3) \geqslant 0$

$7y^2 + 6ay + (3a^2 - 12) \leqslant 0.$

$D \geqslant 0.$

$\frac{D}{4} = 9a^2 - 7(3a^2 - 12) \geqslant 0$

$a^2 \leqslant 7$

$|a| \leqslant \sqrt{7}.$

Ответ: $a = \sqrt{7}.$

Разные задачи с параметром, решаемые алгебраическими методами

Пример. (ЕГЭ, 2003, № B4). При каком наибольшем отрицательном значении a функция

$$y = \sin\left(24x + \frac{a\pi}{100}\right)$$

имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

Решение. Максимумы функции $\sin t$ достигаются в точках вида $\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, чтобы у исходной функции достигался максимум в точке $x_0 = \pi$, должно существовать такое число $n \in \mathbb{Z}$, что

$$24\pi + \frac{a\pi}{100} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \iff \frac{a}{100} = \frac{1}{2} + 2m,\ m \in \mathbb{Z} \iff$$
$$\iff a = 50 + 200m,\ m \in \mathbb{Z}.$$

Остаётся лишь выбрать среди чисел вида $a = 50 + 200m$, $m \in \mathbb{Z}$, наибольшее отрицательное. Это будет число -150, получающееся при $m = -1$, так как если $m \geqslant 0$, то $50 + 200m \geqslant 50$.

Ответ: $a = -150$.

Задачи, основанные на применении известных неравенств

неравенство	случай равенства
$(x-y)^2 \geqslant 0$	$x = y$
$x^2 + y^2 \geqslant 2xy$	$x = y$
$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad x, y \geqslant 0$	$x = y$
$x + \dfrac{y^2}{x} \geqslant 2y, \quad x > 0$	$x = y$
$x + \dfrac{y^2}{x} \leqslant 2y, \quad x < 0$	$x = y$
$\dfrac{2xy}{x^2 + y^2} \leqslant 1$	$x = y$
$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2},$	$x = y$
$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz, \quad x, y, z > 0$	$x = y = z$
$\lvert x\rvert + \lvert 1 - x\rvert \geqslant 1$	$x \in [0; 1]$

Задачи, основанные на применении известных неравенств

Пример. Решите уравнение

$$\frac{25}{\sqrt{x-1}} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} = 14 - \sqrt{x-1} - \sqrt{y-2}.$$

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\sqrt{x-1} + \frac{25}{\sqrt{x-1}}\right) + \left(\sqrt{y-2} + \frac{4}{\sqrt{y-2}}\right) = 14.$$

Заметим, что из неравенства $t + y^2/t \geqslant 2 \cdot t$, $t > 0$, вытекает, что

$$\sqrt{x-1} + \frac{25}{\sqrt{x-1}} \geqslant 2 \cdot 5 = 10, \qquad \sqrt{y-2} + \frac{4}{\sqrt{y-2}} \geqslant 2 \cdot 2 = 4,$$

откуда получаем $\left(\sqrt{x-1} + \frac{25}{\sqrt{x-1}}\right) + \left(\sqrt{y-2} + \frac{4}{\sqrt{y-2}}\right) \geqslant 14.$

$$\left(\sqrt{x-1} + \frac{25}{\sqrt{x-1}}\right) + \left(\sqrt{y-2} + \frac{4}{\sqrt{y-2}}\right) \geqslant 14.$$

Поскольку знак равенства в неравенстве вида $t + y^2/t \geqslant 2 \cdot t$, $t > 0$ достигается только лишь в случае $t = y$, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 5, \\ \sqrt{y-2} = 2. \end{cases} \iff \begin{cases} x = 26, \\ y = 6. \end{cases}$$

Ответ: $x = 26$, $y = 6$.

Параметр как неизвестное

17. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0.$$

Решение. Уравнение квадратное относительно a, решая его, получим:

$$\left[\begin{array}{l} a = 2x \\ a = x^2 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a}{2} \\ x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: если $a < -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{a}{2}$; если $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -\frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{2}$; если $a = 0$, то $x = 0$, $x = 1$; если $a = 6$, то $x = -\frac{5}{2}$, $x = 3$; если $-\frac{1}{4} < a < 0$, $0 < a < 6$ и $a > 6$, то $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

Задание 20. Логарифмические уравнения

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\lg(ax^2-(a+2)x+3)+\log_{0,1}(3x^2-(a+2)x+a)=0$ имеет более двух корней.

Решение. Перейдя к основанию 10, перепишем данное уравнение в виде $\lg(ax^2-(a+2)x+3)=\lg(3x^2-(a+2)x+a)$. Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ax^2-(a+2)x+3=3x^2-(a+2)x+a, \\ 3x^2-(a+2)x+a>0. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду $(a-3)x^2=a-3$. Если $a\neq 3$, последнее уравнение является квадратным и более двух корней иметь не может. Если $a=3$, корнем уравнения является любое действительное число. При этом неравенство системы принимает вид $3x^2-5x+3>0$ и выполняется при любом значении переменной в силу отрицательности дискриминанта и положительности старшего коэффициента квадратного трехчлена в левой части неравенства.

Ответ: 3.

Задание 20. Логарифмические неравенства

Пример. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\log_a(1+x) < 1.$$

$\triangle$ Исходя из определения логарифма, рассматриваем только значения $a > 0$. При $a \leqslant 0$ и $a = 1$ решений нет. При $a > 0$ приводим неравенство к виду

$$\log_a(1+x) < 1 \Leftrightarrow \log_a(1+x) < \log_a a.$$

Полученное неравенство, так же как и исходное, равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} a > 1, \\ 1 + x < a, \\ 1 + x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ -1 < x < a - 1; \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

и

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ 1 + x > a, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x > a - 1. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Объединяя полученные решения, записываем ответ. $\blacktriangle$

Ответ: При $a \leqslant 0, a = 1$ решений нет; если $0 < a < 1$, то $x \in (a-1; +\infty)$; если $a > 1$, то $x \in (-1; a-1)$.

Оформление решения задачи 20

Задача 20 (С5). Задача с параметром.

- Решение должно быть лаконично в комментариях (лучше не написать лишнего!).
- За неполное решение задачи С5 можно получить даже 2 балла, так что записывайте его аккуратно, даже если вы знаете, что не доделали его до конца.
- При написании ответа обратите внимание на круглые и квадратные скобки, в них иногда присутствуют досадные ошибки, сделанные буквально в последней строчке.

Задание C5 ЕГЭ 2014

Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)^2-4a\left(\log_6(x+a)-\log_6(x-a)\right)+3a^2+4a-4=0$$

имеет ровно два решения.

Пусть $t=\log_6(x+a)-\log_6(x-a)$, тогда уравнение запишется в виде $t^2-4at+3a^2+4a-4=0$, откуда $t=3a-2$ или $t=a+2$. Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=$ $=3a-2$ или $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=a+2$.

Исследуем, сколько решений имеет уравнение $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=b$ в зависимости от a и b. При $a\neq 0$ и $x>a$ и $x>-a$, то есть при $x>|a|$, левая часть определена и принимает вид $\log_6\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_6\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$. При $x>|a|$ выражение $1+\frac{2a}{x-a}$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(1;+\infty)$ для $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;1)$ для $a<0$. Значит, при $x>|a|$ выражение $\log_6\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;+\infty)$ при $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(-\infty;0)$ при $a<0$. Таким образом, уравнение

Задание С5 ЕГЭ 2014

$\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=b$ имеет одно решение при $ab>0$ и не имеет решений при $a\neq 0$ и $ab\leq 0$. При $a=0$ и $x>0$ уравнение принимает вид $0=b$ и либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решений.

Уравнения $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=3a-2$ и $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=$ $=a+2$ могут иметь общие решения при $3a-2=a+2$, то есть при $a=2$. При $a=2$ оба уравнения принимают вид $\log_6(x+2)-\log_6(x-2)=4$ и имеют одно решение.

При других значениях a исходное уравнение имеет два решения, если оба уравнения $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=3a-2$ и $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=$ $=a+2$ имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}(3a-2)a>0,\\(a+2)a>0,\end{cases}$$

то есть $a<-2$; $a>\dfrac{2}{3}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a<-2$; $\dfrac{2}{3}<a<2$; $a>2$.

Ответ: $(-\infty;-2)$; $\left(\dfrac{2}{3};2\right)$; $(2;+\infty)$.

Задание С5 ЕГЭ 2014. Критерии

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=-2$ и/или $a=\frac{2}{3}$	3
С помощью верного рассуждения получен один из промежутков множества значений a: $(-\infty;-2)$ или $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; возможно, с включением граничных точек и/или исключением точки $a=2$	2
Верно найдена хотя бы одна из граничных точек множества значений a: $a=-2$ или $a=\frac{2}{3}$; ИЛИ получено хотя бы одно из уравнений $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=3a-2$ или $\log_6(x+a)-\log_6(x-a)=a+2$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Печатные и электронные ресурсы

Школьные учебники.

Пособия для подготовки к ЕГЭ по математике.

Журналы «Математика в школе», «Математика для школьников»,

«Математика», «Потенциал»

Сайты: alexlarin.net, abiturient.ru (МИЭТ),

mathus.ru/math/ , reshuege.ru,

ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

Контакты

Спасибо за внимание!

aaprokof@yandex.ru

14.11.14