

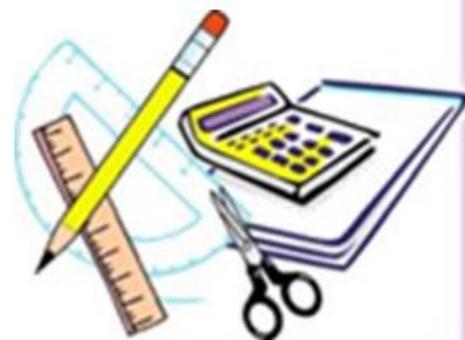
Числовые неравенства и их свойства

8 класс



Повторим:

1. Какое из чисел больше: положительное или отрицательное?
2. Как можно сравнить рациональные числа с помощью координатной прямой?
3. Какое из двух положительных чисел больше?
4. Какое из двух отрицательных чисел больше?



Определение



Алгебраические выражения
содержащие знак $>$ или $<$ называются
неравенствами.

$$6 > - 8$$



$$12 < 25$$

Числовые неравенства

Неравенство называется **числовым**, когда каждая из его частей обозначает некоторое число. Числовое неравенство $A < B$ называется **верным**, если его левая часть обозначает меньшее число, чем правая. Аналогично для $A > B$.

$$3 < 5 \text{ и } -2 < 6$$

– **верные числовые неравенства одного знака;**

$$3 < 5 \text{ и } 6 > 4$$

– **верные числовые неравенства разных знаков;**

$$-7 + 2 \cdot 5 < -9 \text{ и } 24 > 32$$

– **неверные числовые неравенства.**



Двойные неравенства

Неравенства содержащие два знака $>$, $<$, \geq и \leq

называются двойными.

$9 < x \leq 18$ - x больше 9, но меньше 18



Примеры:

Неравенство	Как читается
$15 < 19$	пятнадцать меньше девятнадцати
$b \leq 100$	b меньше или равно 100
$a \geq 27$	a больше или равно 27
$35 < 48$	тридцать пять меньше сорока восьми
$7 > -24$	семь больше минус двадцати четырех
$c \leq 35$	c меньше или равно тридцати пяти



Тренируемся:

Какие из неравенств верные?

$$8,63 > 9,1$$

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$$

$$-2,5 < -2$$

$$0,05 > 0,049$$

$$0,2 < -0,2$$

$$\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$$



Определение

Говорят, что действительное число **a** больше (меньше) действительного числа **b**, если их разность **(a-b)**- положительное (отрицательное) число.

Пишут: $a > b$ ($a < b$)

Такие неравенства называются строгими.



Строгие неравенства

$a > 0$ означает, что a – **положительное** число

$a < 0$ означает, что a – **отрицательное** число

$a > b$ означает, что $(a-b)$ -**положительное** число, т.е. $(a-b) > 0$

$a < b$ означает, что $(a-b)$ -**отрицательное** число, т.е. $(a-b) < 0$



Нестрогие неравенства

$a \geq 0$ означает, что

a больше нуля или равно нулю, т.е.

a – неотрицательное число, или что

a не меньше нуля

$a \leq 0$ означает, что

a меньше нуля или равно нулю, т.е.

a – неположительное число, или что

a не больше нуля



Нестрогие неравенства

$a \geq b$ означает, что

a больше b или равно b , т.е.

$a-b$ – неотрицательное число, или что

a не меньше b ; $a-b \geq 0$

$a \leq b$ означает, что

a меньше b или равно b , т.е.

$a-b$ – неположительное число, или что

a не больше b ; $a-b \leq 0$



Неравенства

Строгие

Нестрогие



Знаки неравенств

$>$ «больше»

$<$ «меньше»

\geq «больше или равно»

\leq «меньше или равно»

Свойства числовых неравенств



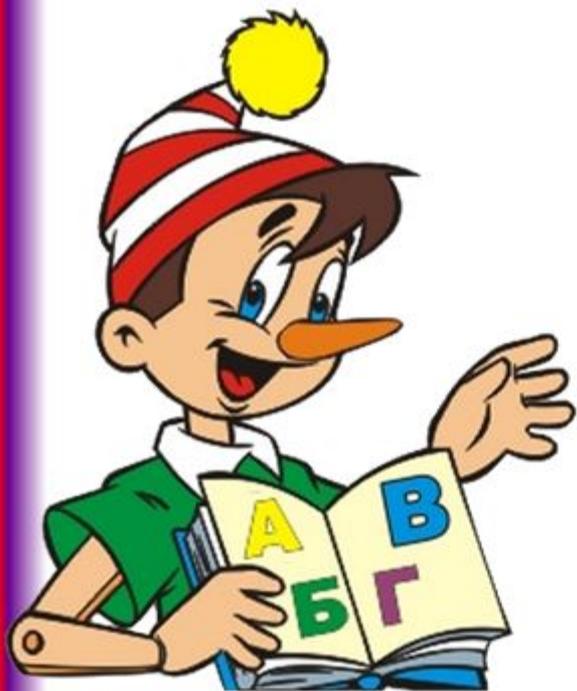
СВОЙСТВО

Если число a больше числа b , то число b меньше числа a .

Если $a > b$, то $b < a$.

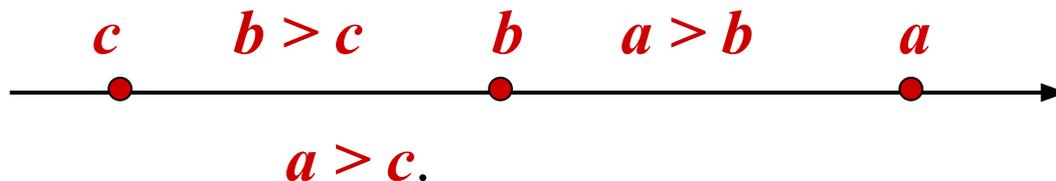
Пример: $15,3 > 2,71$, то $2,71 < 15,3$

Если правую(левую) часть неравенства поменять местами с его левой(правой) частью, то знак неравенства изменится на противоположный.

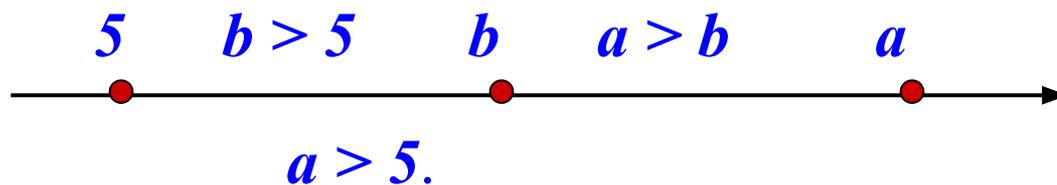


1 СВОЙСТВО (транзитивность)

Теорема Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.



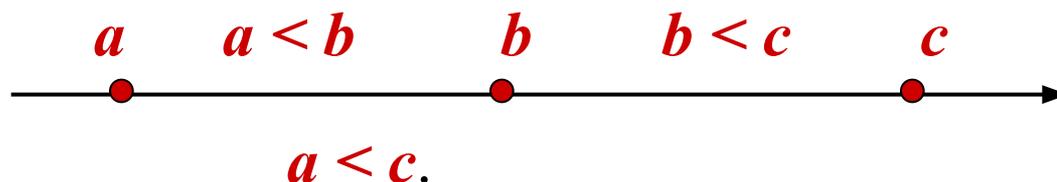
Если точка a расположена правее точки b , а точка b расположена правее точки c , то точка a расположена правее точки c .



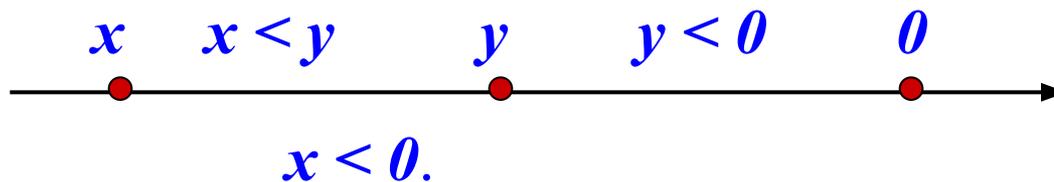
Если $a > b$ и $b > 5$, то $a > 5$.

1 СВОЙСТВО

Теорема Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.



Если точка a расположена левее точки b , а точка b расположена левее точки c , то точка a расположена левее точки c .



Если $x < y$ и $y < 0$, то $x < 0$.

Теорема.

2 СВОЙСТВО

Если к обеим частям верного числового неравенства прибавить одно и то же число или из обеих частей верного числового неравенства вычесть одно и то же число, то получится верное числовое неравенство верного знака.

Если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$.

Если $a < b$ и c – любое число, то $a - c < b - c$.

$12 < 21,4$, значит

$$12 + 5 < 21,4 + 5;$$

$$12 - 100 < 21,4 - 100.$$

$k > t$, значит

$$k - 17y^2 > t - 17y^2;$$

$$k + 12 : x > t + 12 : x.$$



3 СВОЙСТВО

Следствие

Если $a + b < c + d$, то $a - d < c - b$.

Если в верном числовом неравенстве перенести слагаемое из одной части в другую с противоположным знаком, то получится верное числовое неравенство того же знака.

$$53 - 40,6 > -11,6 + 14 \iff 53 - 14 > -11,6 + 40,6;$$

$$b^2 - 16 < b^2 + 6b + 9 - 5 \iff b^2 - 6b - b^2 < 9 - 5 + 16 \\ -6b < 20.$$



Теорема

4 СВОЙСТВО

Если обе части верного числового неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не меняется.

Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Пусть $-2 < 13$.

Тогда $-2a < 13a$, если $a > 0$ и $\frac{-2}{3} < \frac{13}{3}$



5 СВОЙСТВО

Следствие Если a и b – числа одного знака и

$$a < b, \text{ то } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$3 < 5,$$

значит

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}.$$

$$-2 > -7,$$

значит

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{7}.$$



Теорема

6 СВОЙСТВО

Если обе части верного числового неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства меняется на противоположный.

Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

Пусть $2 < 13$.

Тогда $2(-3) > 13(-3)$, и $\frac{2}{-3} > \frac{13}{-3}$.



Тренируемся:

К обеим частям неравенства $15 > 9$
прибавьте числа $3; - 5; - 3,3; 5,4$.



Тренируемся:

К обеим частям неравенства $15 > 9$
прибавьте числа 3; - 5; - 3,3; 5,4.



$$18 > 12$$

$$10 > 4$$

$$11,7 > 5,7$$

$$9,6 > 3,6$$



Тренируемся:

Умножьте обе части неравенства $12 > 5$
на -5 ; 6 ; -2 , 3 .



Тренируемся:

Умножьте обе части неравенства $12 > 5$
на - 5; 6; - 2, 3.



$$-60 < -25$$

$$72 > 30$$

$$-24 < -10$$

$$36 > 15$$



Тренируемся

Разделите обе части неравенства $4 < 12$
на -2 ; $0,5$; $-0,2$; 4



Тренируемся

Разделите обе части неравенства $4 < 12$

на -2 ; $0,5$; $-0,2$; 4

$$-2 > -6$$

$$8 < 24$$

$$-20 > -60$$

$$1 < 3$$



Закрепление

Письменно Мордкович №31.1 - 31.19 все нечетные номера под буквами в) и г).



Применение свойств неравенств

Пусть $p < c$. Разделить числовое неравенство

$$(p - c)^7 < (p - c)^6 \text{ на число}$$

$$(p - c)^5$$

Так как 5 – нечетное число,
то $(p - c)^5 < 0$.

По свойству неравенств,
разделив обе части
неравенства на
отрицательное число

$$(p - c)^5, \text{ получим} \\ (p - c)^2 > p - c.$$

$$(p - c)^6$$

Так как 6 – четное число,
то $(p - c)^6 > 0$.

По свойству неравенств,
разделив обе части
неравенства на
положительное число

$$(p - c)^6, \text{ получим} \\ p - c < 1.$$

Сложение числовых неравенств

Теорема. Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Если сложить два верных числовых неравенства одного знака, то получится верное числовое неравенство того же знака.

$$\begin{array}{r} 7 < 9 \\ + \\ -12 < 31 \\ \hline \end{array}$$

$-5 < 40$ - верно

$$\begin{array}{r} -13 > -20 \\ + \\ 2 > -2 \\ \hline \end{array}$$

$-11 > -22$ - верно

$$\begin{array}{r} 7 < 9 \\ - \\ 2 < 5 \\ \hline \end{array}$$

$5 < 4$ – ложно.

В общем случае почленно **вычитать** верные **неравенства одного знака нельзя!**



Умножение числовых неравенств

Теорема. Если a, b, c, d – положительные числа и $a < b, c < d$, то $ac < bd$;
а если $a > b, c > d$, то $ac > bd$.

Если перемножить два верных числовых неравенства одного знака с положительными частями, то получится верное числовое неравенство того же знака.

$$\begin{array}{r} 11 < 21 \\ \times 3 < 4 \\ \hline \end{array}$$

$33 < 84$ - верно

$$\begin{array}{r} 15 > 0,3 \\ \times 2 > 10 \\ \hline \end{array}$$

$30 > 3$ - верно

В общем случае почленно **делить** верные числовые **неравенства одного знака нельзя!**



Возведение неравенств в натуральную степень

Следствие. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$,
тогда если $a < b$, то $a^n < b^n$;
если $a > b$, то $a^n > b^n$.

$$7 < 8, n = 2, \text{ тогда } 7^2 < 8^2;$$

$$3 > 2, n = 102, \text{ тогда } 3^{102} > 2^{102};$$

$$m > 0, k > 0 \text{ и } m > k, \text{ тогда } m^3 > k^3.$$



Домашнее задание

1. Выучить определение и свойства неравенств.
2. Письменно Мордкович №31.1 - 31.19 все нечетные номера под буквами в) и г).

Желаю удачи!

