KOMBINATORIKA

Permutace bez opakování

Značení prvků

- Předem daná konečná množina, z níž skupiny tvoříme, má **n** prvků.
- Skupinu, která obsahuje **k** prvků, nazýváme skupinou **k**-té třídy.
  - například:

    Tvoříme-li dvojčlenné skupiny z 10 lidí, pak **n = 10, k = 2.**

    Tvoříme-li trikolóry z pěti různých barev, pak **n = 5, k = 3.**

Prvky ve skupině

Vyskytuje-li se vybraný prvek ve skupině

a) pouze jednou,

mluvíme o skupinách bez opakování

(v předpisu skupiny se tento fakt neuvádí)

- vybíráme-li skupiny z lidí

b) několikrát (maximálně *k*-krát),

mluvíme o **skupinách s opakováním**

- například: vždy, když vybíráme skupiny z cifer a není uvedeno, že opakovat nelze

Požadavek na předpis skupiny

Jestliže na pořadí prvků ve skupině

a) <u>záleží</u>,
mluvíme o variacích (resp. permutacích)

b) <u>nezáleží</u>,
mluvíme o kombinacích

Kdy volíme VARIACE

Tvoříme-li

- čísla – přirozená, telefonní, kódy,
- slova,
- skupiny lidí, kterým rozdělujeme konkrétní funkce , konkrétní medaile
- skupiny lidí, které řadíme podle výšky, abecedy, věku,
- trikolóru, ...

Řešení slovních úloh

- Vždy si musíte umět správně odpovědět na čtyři základní otázky:

1. Záleží na pořadí prvků ve skupině?
2. Mohou se prvky ve skupině opakovat?
3. Z kolika celkových prvků tvořím skupiny?
4. Kolik prvků vybírám do jedné skupiny?

Faktoriál čísla n, označujeme n!

je číslo, které je rovno

- součinu všech kladných celých čísel menších nebo rovných *n*, pokud je n kladné:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

- pokud $n = 0$

$$\boxed{0! = 1}$$

Speciální případ variací: k = n

- **Permutace** jsou zvláštním případem variací, kdy je stejný počet prvků, které vybíráme do skupiny, jako počet prvků, z kterých mohu skupinu tvořit.
- Permutace množiny, která obsahuje n prvků, je nějaké pořadí, v jakém se dají prvky seřadit.
- Například přeskupujeme písmena zadaného slova (slovo šifrujeme, vytváříme jeho anagramy), například: ŠOK → ŠKO, OŠK, KŠO, OKŠ, KOŠ.

ANAGRAM

- Anagram neboli **přesmyčka** je slovo, které vznikne z původního slova tak, že se použijí všechna písmena ve slově obsažená a změní se jejich pořadí. Často se přitom nedbá na diakritiku.
- Například: KOTEL – LOKET
  PEKAŘSTVÍ – PŘÍSTAVEK
- Nezapomeňte, že jsou slova, v nichž se písmena neopakují (KOŠ), ale existují také slova, v nichž se písmena vyskytují vícekrát (ALABAMA).

PERMUTACE

- Počet permutací z *n* prvků bez opakování, tzn. žádný z prvků se ve výběru nemůže opakovat, je určen vztahem

$$P(n) = n!$$

PERMUTACE – příklad 1

- *Zadání:* Určete, kolik existuje různých přesmyček slova a) PLOT, b) VCHOD.

- *Řešení:* První slovo je složeno ze čtyř písmen, druhé slovo z písmen pěti a v obou slovech se písmena neopakují.
  V přesmyčce nesmíme žádné z písmen vynechat.

$$\text{a)}\quad n = 4: \quad \mathbf{P(4) = 4! = \underline{\underline{24}}}$$

$$\text{b)}\quad n = 5: \quad \mathbf{P(5) = 5! = \underline{\underline{120}}}$$

- *Odpověď:* Existuje 24 přesmyček slova PLOT a 120 přesmyček slova VCHOD.

PERMUTACE – příklad 2

- Zadání: Určete, kolika způsoby se může u pokladny postavit do řady 7 lidí.

- Řešení: Každý ze sedmi lidí musí zaplatit, tudíž nesmíme nikoho vynechat ($k = n$).

$$n = 7: \quad \mathbf{P(7) = 7! = \underline{\underline{5\,040}}}$$

- *Odpověď:* Existuje 5 040 možností, jak seřadit sedm lidí v řadě u pokladny.

DALŠÍ ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

- *Zadání:* Určete, kolika způsoby lze zaměnit písmena slova A K A D E M I E tak, aby vzniklá přesmyčka obsahovala výraz DEKA.

- *Řešení:* Záměna všech prvků (přesmyčky) ⇒ PERMUTACE.

1. skupina: D E K A
 x x x x x x x x
2. skupina: D E K A
3. skupina: D E K A
4. skupina: D E K A
5. skupina: D E K A

na obměnu zbyly 4 znaky: AMIE ⇒ P(4)

Výsledek: $\mathbf{5 \cdot P(4) = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 24 = \underline{\underline{120}}}$

- *Odpověď:* Existuje 120 hledaných přesmyček.

PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Na konferenci má vystoupit pět řečníků A, B, C, D, E. Určete, kolik je možností pro pořadí jejich proslovů.

120

Určete, kolika způsoby může 10 táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit do řady, v níž bude táborník Aleš stát vždy na kraji řady.

Nejprve necháme nastoupit devět táborníků, Aleše je mimo. Počet těchto seřazení: **P(9)**. Aleše se zařadí buď na levý kraj, nebo na pravý kraj řady.

2.P(9)= 725 760

Určete, kolika způsoby se na pětimístné lavici může rozmístit pět chlapců, z nichž dva chtějí sedět vedle sebe.

Dvojici označíme jediným prvkem A, pak se díváme na rozmístění jako na uspořádané čtveřice sestavované z prvků A(dvojice), B, C, D , tedy P(4). Počet všech možných rozmístění chlapců :

P(2) . P(4) = 48

Šest českých a sedm anglických knih je třeba uspořádat na poličce tak, aby byly seřazeny nejprve české a poté anglické knihy. Kolika způsoby to lze provést?

$P(6) \,.\, P(7) = 3\,628\,800$.

Určete počet všech přirozených pěticiferných čísel, která jsou tvořena z různých cifer 0, 2, 4, 6, 8.

$P(5) - P(4) = 96$

Kolik devíticiferných přirozených čísel bez opakování je možno sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mají-li čísla být větší než 800 000 000?

$2 \,.\, P(8) = 80\,640$