

**ЛЕКЦІЯ 7 ПОБУДОВА  
ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ  
МОДЕЛІ З  
АВТОКОРЕОЛЬО-  
ВАННЯМИ  
ЗАЛИШКАМИ**

# План

- 7.1. Природа і наслідки автокореляції.
- 7.2. Методи визначення автокореляції. Критерій Дарбіна-Уотсона. Критерій фон Неймана.
- 7.3. Коефіцієнти автокореляції та їх застосування.
- 7.4. Моделі з автокорельованими залишками.
- 7.5. Метод оцінювання параметрів Ейткена.
- 7.6. Метод Кочрена-Оркатта
- 7.7. Метод перетворення вихідної інформації. Метод Дарбіна (самостійна робота).

## ***7.1. Природа і наслідки автокореляції***

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + u \quad (7.1)$$

$$Y = Xa + u, \quad (7.2)$$

$$\text{cov}(u_i, u_j) = 0, \quad i \neq j. \quad (7.3)$$

## Умови Гаусса-Маркова

1.  $M[e_i] = 0$

2.  $D[e_i] \rightarrow \min$

3. Відсутність систематичного зв'язку між значеннями випадкового збудника у будь-яких двох спостереженнях.

4. Випадковий збудник має бути розподілений незалежно від пояснюючих змінних.

$$M(u_i u_j) \neq 0, i \neq j.$$

$$D(uu') \neq \sigma_u^2 I \quad (7.4)$$

$$D(uu') = \sigma_u^2 \Omega \quad (7.5)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

# *Авторегресійна модель першого порядку*

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t, \quad (7.7)$$

## 7.2. Критерій Дарбіна-Уотсона

- **Крок 1.** Розраховується значення  $d$ -статистики

$$DW = d = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (7.8)$$



**Крок 2.** Задаємо рівень значущості  $\alpha$ . За таблицею Дарбіна-Уотсона при заданому рівні значущості  $\alpha$ , кількості факторів  $m$  і кількості спостережень  $n$  знаходимо два значення  $DW_1$  і  $DW_2$ :





**ЗНАЧЕНИЯ СТАТИСТИК ДАРБИНА-УОТСОНА  $d_L d_U$  ПРИ 5%-НОМ  
УРОВНЕ ЗНАЧИМОСТИ**

$n$	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$	$d_L$	$d_U$
6	0,61	1,40								
7	0,70	1,36	0,47	1,90						
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,66	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,85	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,99
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

## 7.2. Критерій фон Неймана

$$Q = Q_{\text{факт}} = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \frac{n}{n-1}, \quad (7.9)$$

$$Q = DW \frac{n}{n-1} \quad n \rightarrow \infty \quad Q = DW$$

$$Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$$

**ТАБЛИЦЯ КРИТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ  
ДЛЯ ВІДНОШЕННЯ ФОН НЕЙМАНА**

$$P\left(\frac{\delta^2}{s^2} < k\right) = \int_0^k \omega\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right) d\left(\frac{\delta^2}{s^2}\right)$$

<i>k</i>	<i>n</i>								
	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0,25				0,00001	0,00001	0,00001	0,00001		0,00001
0,30				0,00007	0,00007	0,00005	0,00004	0,00002	0,00003
0,35			0,00006	0,00027	0,00021	0,00014	0,00009	0,00005	0,00007
0,40			0,00047	0,00065	0,00047	0,00031	0,00019	0,00012	0,00016
0,45			0,00126	0,00126	0,00088	0,00059	0,00038	0,00025	0,00031
0,50		0,00038	0,00246	0,00214	0,00150	0,00103	0,00069	0,00046	0,00055
0,55		0,00223	0,00409	0,00333	0,00237	0,00168	0,00116	0,00080	0,00094
0,60		0,00493	0,00615	0,00486	0,00355	0,00259	0,00185	0,00132	0,00152
0,65		0,00830	0,00865	0,00678	0,00511	0,00382	0,00282	0,00208	0,00235
0,70		0,01225	0,01161	0,00913	0,00710	0,00544	0,00414	0,00313	0,00351
0,75		0,01673	0,01505	0,01197	0,00958	0,00753	0,00587	0,00455	0,00508
0,80	0,00356	0,02171	0,01900	0,01534	0,01263	0,01015	0,00809	0,00642	0,00714
0,85	0,01302	0,02717	0,02348	0,01932	0,01631	0,01338	0,01089	0,00883	0,00980
0,90	0,02257	0,03310	0,02851	0,02403	0,02068	0,01729	0,01436	0,01188	0,01316
0,95	0,03223	0,03949	0,03412	0,02957	0,02579	0,02196	0,01858	0,01565	0,01733
1,00	0,04199	0,04634	0,04035	0,03598	0,03171	0,02745	0,02363	0,02025	0,02241

## 7.3 Коефіцієнти автокореляції та їх застосування

Нециклічний коефіцієнт автокореляції

$$r^* = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1} - \frac{1}{n-1} \left( \sum_{t=2}^n u_t \right) \left( \sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)}{\left[ \sum_{t=2}^n u_t^2 - \frac{1}{n-1} \left( \sum_{t=2}^n u_t \right)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{t=2}^n u_{t-1}^2 - \frac{1}{n-1} \left( \sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)^2 \right]^{1/2}}$$

(7.10)



$$u_1, u_2, \dots, u_\tau \dot{\vdash} u_{\tau+1}, u_{\tau+2}, \dots, u_{2\tau} \quad (7.11)$$

$$u_1, u_2, \dots, u_n \dot{\vdash} u_{\tau+1}, \dots, u_n, u_1, u_2, \dots, u_\tau.$$


$$u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n$$

(7.12)

$$u_2, u_3, \dots, u_n, u_1.$$

## Коефіцієнт циклічної автокореляції

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1} + u_n u_1 - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n u_t \right)^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{t=1}^n u_t \right)^2}. \quad (7.13)$$


$$\sum_{t=2}^n u_t \approx \sum_{t=2}^n u_{t-1} \approx 0, \quad (7.14)$$

$$r = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2}, \quad (7.15)$$



## *7.4 Моделі з автокорельованими залишками*

- 1) Ейткена (УМНК);
- 2) перетворення вихідної інформації;
- 3) Кочрена-Оркатта;
- 4) Дарбіна.

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t. \quad (7.15)$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + v_t, \quad (7.16)$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + v_t.$$

## ***7.5 Метод оцінювання параметрів Ейткена***

$$\hat{a} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y \quad (7.17)$$

$$\hat{a} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}Y, \quad (7.18)$$

$$S = \sigma_u^2\Omega$$

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(7.19)

$$\rho \approx r \approx \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \quad (7.20)$$

$$\rho \approx r' \approx \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \frac{n}{n-1}. \quad (7.21)$$

## 7.6 Метод Кочрена-Оркатта

$$\sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=2}^n [(y_t - \rho y_{t-1}) - a_0(1 - \rho) - a_1(x_t - \rho x_{t-1})]^2,$$

(7.22)

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(1)} \quad \hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(1)}$$

$$\hat{a}_0 = \hat{a}_0^{(2)} \quad \hat{a}_1 = \hat{a}_1^{(2)}$$