Теоремы, умозаключения, доказательства

1. Теоремы и их виды.
2. Умозаключения и их виды.
3. Использование неполной индукции в начальном курсе математики

Задачи на распознавание объекта

В данных задачах требуется ответить на вопрос: принадлежит тот или иной объект объему данного понятия или не принадлежит.

Например, установите, какие из фигур на рисунке 1 являются квадратами, а какие нет.

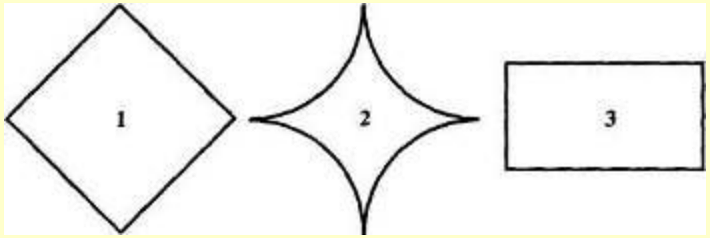


Рис. 1

Задачи на распознавание объекта решаются на основе определения понятия

- Если понятие а определено через родовое понятие с и видовое отличие Р, то его объем А можно представить в таком виде: А = {x | x C и P(x)}. Эта запись показывает, что характеристическое свойство элементов, принадлежащих объему понятия а, представляет собой конъюнкцию двух свойств:

1) принадлежности объекта х объему С родового понятия (х С);

2) свойства Р(х).

- Это означает, что объект х будет принадлежать объему понятия а тогда и только тогда, когда он (этот объект) содержится в объеме родового понятия и обладает свойством Р.

Алгоритм решения задачи на распознавание

- 1. Проверяем, принадлежит ли объект x объему родового понятия, т.е. истинно ли высказывание x $\in$ C.
- 2. Если окажется, что x $\notin$ C, то проверку прекращаем и делаем вывод, что объект x не принадлежит объему понятия a, т.е. x $\notin$ A.
- 3. Если x $\in$ C, то продолжаем проверку и выясняем, обладает ли объект x свойством P.
- 4. Если объект x обладает свойством P, то делаем вывод о его принадлежности объему понятия a, т.е. утверждаем, что x $\in$ A.
- 5. Если окажется, что объект x не обладает свойством P, то делаем вывод, что объект x не принадлежит объему понятия a, т.е. x $\notin$ A.

Теорема

- ***Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).***
- В любой теореме можно выделить *условие* (что дано), *заключение* (что требуется доказать) и *разъяснительную часть.*

- *С* логической точки зрения теорема есть высказывание вида $A \Rightarrow B$, где A — условие теоремы, а В — ее заключение. Разъяснительная часть обычно не присутствует явно в формулировке теоремы, а подразумевается.
- <u>Например</u>,

  Если углы вертикальны, то они равны.

Виды теорем. Обратная теорема

- Для всякой теоремы вида «если *A*, то *B*» можно сформулировать предложение «если *B*, то *A*», которое называют обратным данному. Однако не всегда это предложение является теоремой.
- В том случае, если предложение, обратное данному, будет истинно, его называют ***обратной теоремой***.

Виды теорем. Теорема, противоположная данной

- Для всякой теоремы вида «если *A*, то *B*» можно сформулировать предложение «если не *A*, то не *B*», которое называют противоположным данному. Но не всегда это предложение является теоремой.
- В том случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют ***теоремой, противоположной данной***.

Виды теорем. Теорема, обратно противоположная данной

- Для всякой теоремы вида «если *A*, то *B*» можно сформулировать предложение «если не *B*, то не *A*», которое называют обратным противоположному. Это предложение называют ***теоремой, обратно противоположной данной***.

***Закон контрапозиции*.**

- Прямая и обратно противоположная теоремы равносильны между собой, а также обратная и противоположная теоремы равносильны между собой.

Умозаключение

- ***это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких высказываний, называемых посылками, выводится высказывание, содержащее новое знание, называемое заключением.***

- ***Пример 1.*** Число 13 – двузначное. Любое двузначное число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Следовательно, 13 = 10 + 3.
- ***Пример 2.*** Используя различные средства наглядности, школьники вместе с учителем устанавливают, что 2+3= 3+2, 5+2= 2+5, 3+7 = 7+3. А затем, на основе полученных равенств делают вывод: для всех натуральных чисел a и b верно равенство $a+b = b+a$.
- **Пример 3.** Известно, что $4 \cdot 3 = 12$. Значит, 12:4 = 3. Рассуждая так же, нужно найти частное 8:4. Ученики сначала находят число, на которое надо умножить 4, чтобы получить 8. Получают число 2 и делают вывод – 8:4 = 2.

Умозаключения бывают:

- Дедуктивные
- Индуктивные
- По аналогии

Структура всякого умозаключения включает посылки, заключение и логическую связь между ними

$x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 3$ $186 \vdots 6$	посылки
$186 \vdots 3$	заключение

Дедуктивным называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования.

- В дедуктивном умозаключении из истинных посылок следует истинное заключение.

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

Схемы дедуктивных (правильных) умозаключений

- – правило заключения;

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ A(a)}{B(a)}$$

- – правило отрицания;

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$$

- – правило силлогизма.

$$\frac{A(x) \Rightarrow B(x),\ B(x) \Rightarrow C(x)}{A(x) \Rightarrow C(x)}$$

Правило заключения

$A(x) \Rightarrow B(x)$ **общая посылка** (теорема, правило, определение)

$A(a)$ **частная посылка** (получается из $A(x)$ при $x=a$)

$B(a)$ **заключение** (получается из $B(x)$ при $x=a$)

$x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 3$ общая $A(x) \Rightarrow B(x)$

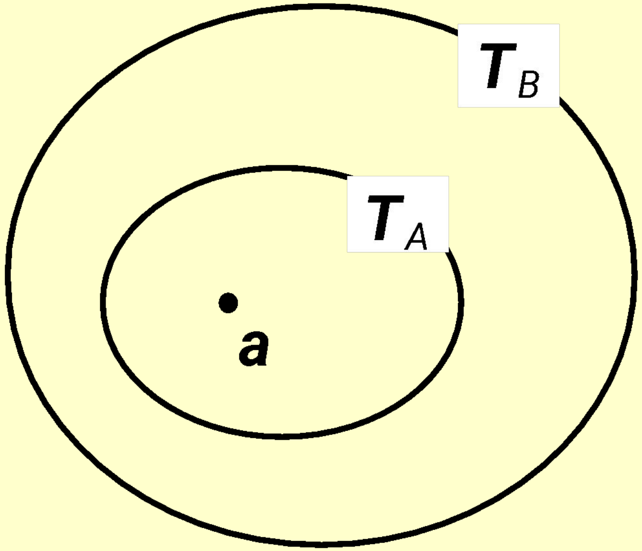
посылки

$186 \vdots 6$ частная $A(186)$

$186 \vdots 3$ заключение $B(186)$

Умозаключение, построенное по правилу заключения, на теоретико-множественном языке можно записать так:

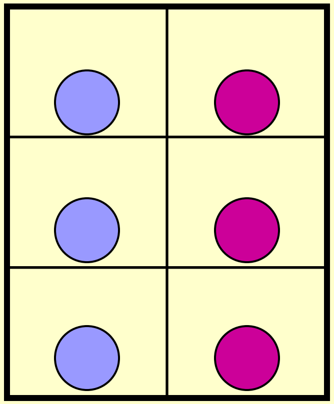
$$\frac{T_A \subset T_B, a \in T_A}{a \in T_B}$$

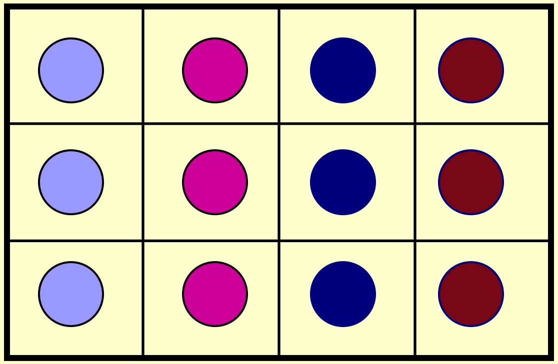


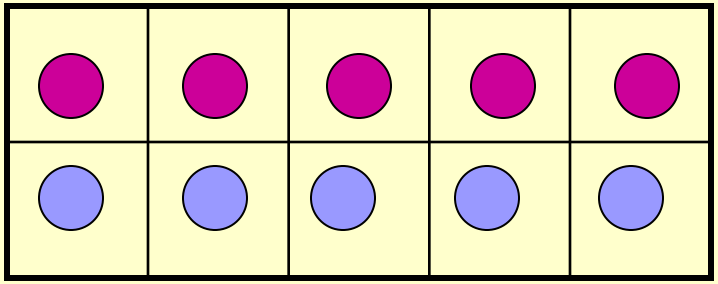
Для того чтобы умозаключение было дедуктивным

- его необходимо строить по правилам, гарантирующим истинность заключения
- если иначе, то необходимо проверять получится ли при истинных посылках истинное заключение

Перестановка множителей







$2 \cdot 3 = 6$　　$3 \cdot 4 = 12$　　$5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$

$3 \cdot 2 = 6$　　$4 \cdot 3 = 12$

От перестановки множителей произведение не изменяется

В данных рассуждениях можно выделить посылки: $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$, $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$. Обобщая эти утверждения, получаем заключение:

$(\forall\ a, b \in N)\ a \cdot b = b \cdot a$

Неполной индукцией

- называется умозаключение, в котором на основании того, что некоторые объекты класса обладают определенным свойством, делается вывод о том, что этим свойством обладают все объекты данного класса.

Является ли неполная индукция дедуктивным умозаключением?

- Рассмотрим высказывания:

  $2+3 < 2\cdot3$; $4+3 < 4\cdot3$; $5+2 < 5\cdot2$

  Строим заключение:($\forall$ a, b $\in$ N) $a+b < b \cdot a$

  Полученное заключение ложно,

  так как $2+1 > 2\cdot1$

  Следовательно, выводы в умозаключениях, называемых неполной индукцией, могут быть как истинными, так и ложными

  Выводы, полученные с помощью неполной индукции, носят характер предположения (гипотезы) и нуждаются в дальнейшей проверке: их надо либо доказать, либо опровергнуть.

Использование неполной индукции при решении задач

- Задача. К однозначному числу приписали такую же цифру. Во сколько раз увеличилось число?

1) Выскажем предположение:

Было:	Приписали цифру:	Увеличилось:
2	22	в 11 раз
3	33	в 11 раз

Видимо, если к однозначному числу приписать такую же цифру, то число увеличится в 11 раз.

Какое умозаключение выполнили?

2) Докажем предположение:

Если к заданному числу ***а***, приписать такую же цифру, получим запись двузначного числа ***аа= 10а+а=11а.*** *Так как один из множителей делится на 11, то и все произведение делится на 11. Значит, любое число вида* ***аа*** *делится на 11.*

Неполная индукция при решении задач нужна для того, чтобы высказать догадку (предположение) относительно возможного ответа на вопрос задачи.

Взаимосвязь неполной индукции и дедукции

- Неполная индукция и дедуктивные умозаключения взаимосвязаны: утверждения (теоремы, правила, определения, аксиомы), используемые в дедуктивных умозаключениях, часто являются результатом индуктивного обобщения некоторой совокупности фактов, а индуктивные умозаключения расширяют наши знания, помогая «открывать» новые закономерности и правила.

Использование неполной индукции в начальной школе

- Неполная индукция используется в начальном обучении математике для «открытия» свойств понятий (сложения, умножения, деления и др.)
- Задание

  Как используя неполную индукцию, можно «открыть» с младшими школьниками следующие свойства:

- В любом прямоугольнике диагонали равны.
- При делении любого числа на 1 получается то число, которое делили.

Деление на однозначное число

- 12:3=4, т.к. 3·4=12
- 8:2=4, т.к. 2·4=8
- Используя такой же способ рассуждений, найдите частные

  9:3

  20:5

Аналогией

- ***называется умозаключение, в котором на основании сходства двух объектов в некоторых признаках и при наличии дополнительного признака у одного из них делается вывод о наличии такого же признака у другого объекта.***
- Аналогия помогает открывать новые знания, способы деятельности или использовать усвоенные способы деятельности в измененных условиях.

Является ли аналогия дедуктивным умозаключением

- Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.
- По аналогии

Если число делится на 2 и на 4, то оно делится на 8.

Данный вывод ложный, т.к. 12 делится на 2 и 4, но оно не делится на 8

Вывод по аналогии носит характер предположения (гипотезы) и поэтому нуждается либо в доказательстве, либо в опровержении.

Использование аналогии в начальной школе

- Аналогия используется в начальном обучении математике при изучении свойств объектов, отношений между ними и действий с ними, а также для выводов о способе действия на основе изучения другого способа.

Логические основы математики

- Дедуктивные умозаключения используются для обоснования истинности высказываний
- Неполная индукция используется для «открытия» свойств понятий (сложения, умножения, деления и др.)
- Аналогия используется при изучении свойств объектов, отношений между ними и действий с ними, а также для выводов о способе действия на основе изучения другого способа.

Логические основы математики

- Доказательство - это совокупность логических приемов обоснования истинности утверждения.
- В начальной школе нет доказательства в строго логическом и математическом смысле этого слова.
- Способы обоснования истинности суждения в начальной школе:

- *Дедуктивные умозаключения*

- *Эксперимент*

- *Измерения*

- *Вычисления*

Логические основы математики

СЛОЖЕНИЕ

181. Расскажи, что делают Маша и Миша.

(!) Сложение обозначают знаком + (плюс).

(!) Действия Маши и Миши можно записать **числовыми выражениями**.

3 + 2	5 + 4	3 + 1	3 + 4
2 + 3	4 + 5	1 + 3	4 + 3

• Выбери числовые выражения, которые соответствуют каждой картинке.

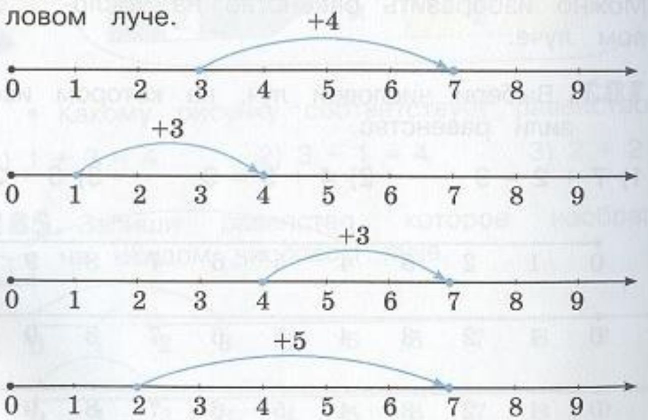
(!) Выражения со знаком + называют **сумма**, а числа, которые складывают, — **слагаемые**.

Результат сложения называют **значением суммы**.

Запись 4 + 5 = 9 называют **числовым равенством**. Его читают так: «4 плюс 5 равно 9» или «4 — **первое слагаемое**, 5 — **второе слагаемое**, 9 — **значение суммы**», или «сумма чисел четырёх и пяти равна девяти».

Запиши равенства к каждой картинке.

(!) Сложение чисел можно изобразить на числовом луче.



Запиши равенства, которые изобразили на числовых лучах.