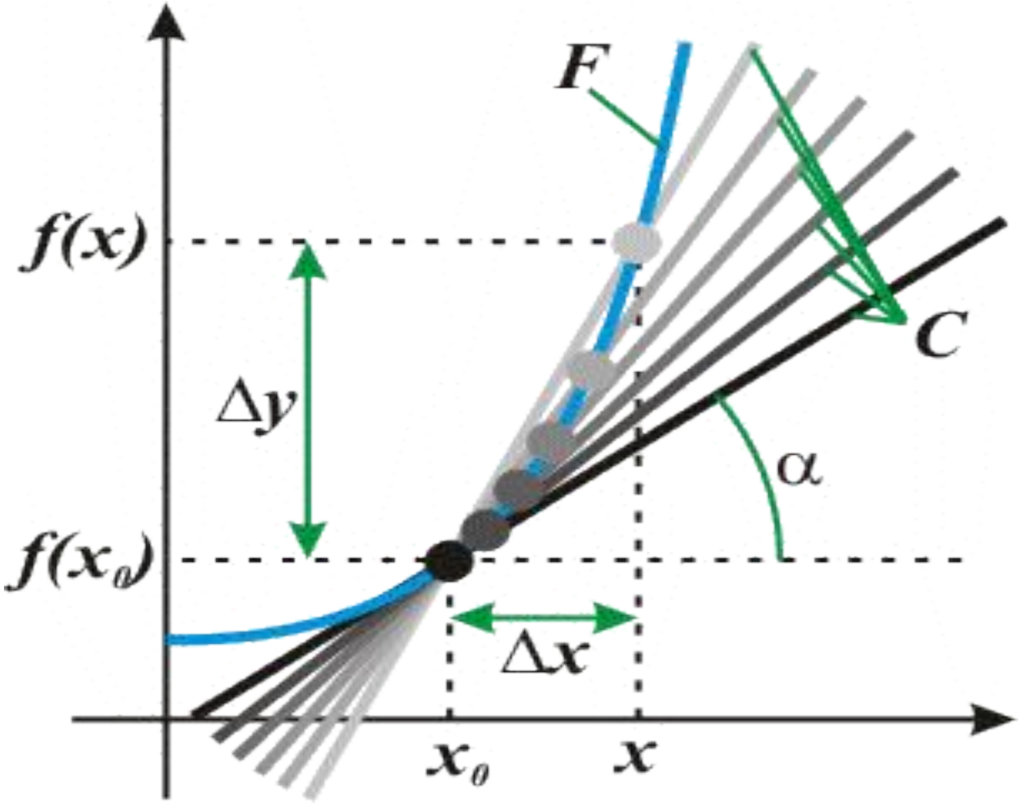
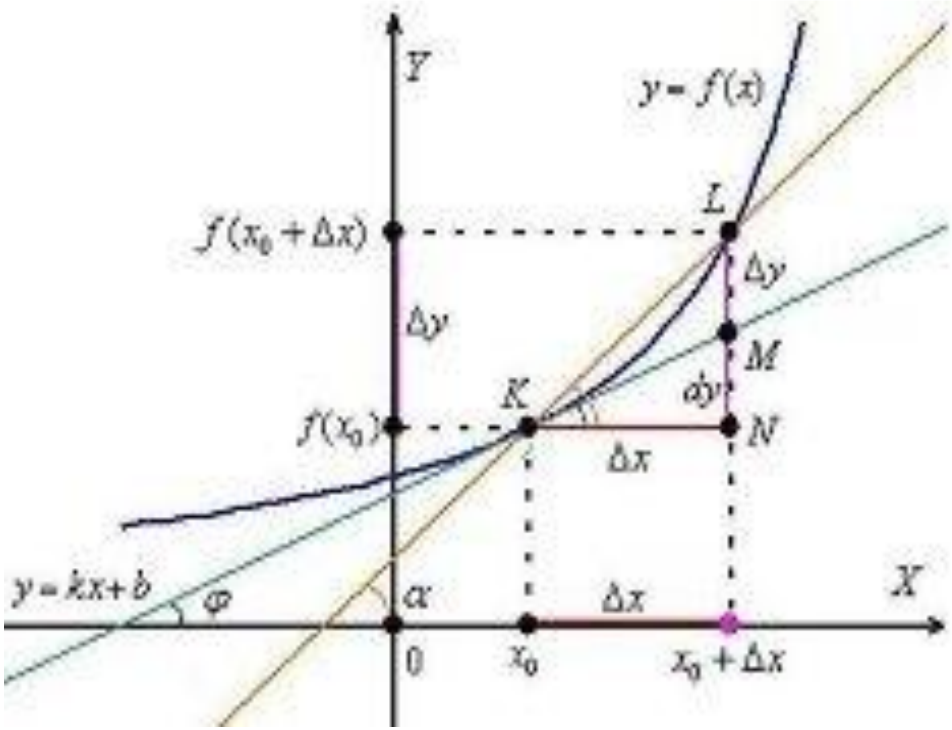
Производная функции действительного переменного



Геометрический смысл производной функции в точке



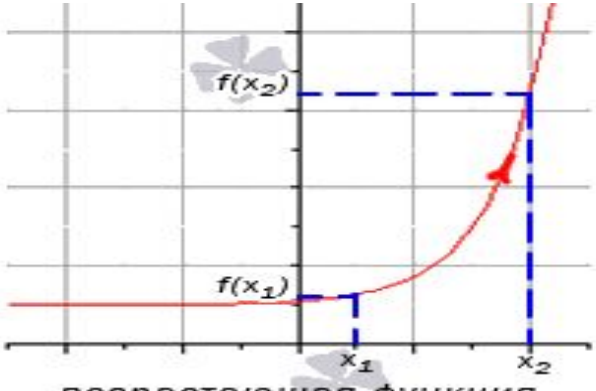
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = tg\alpha$$

Применение производной при исследовании функции

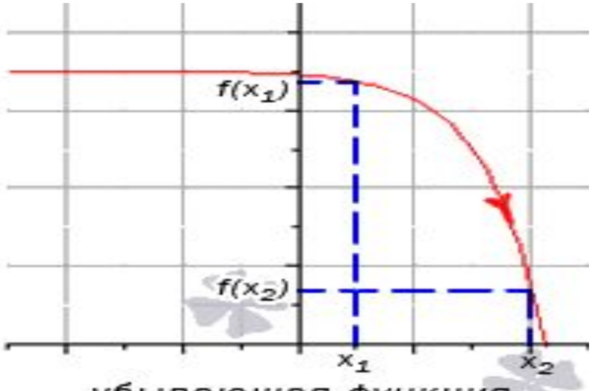
Монотонность

Функция y=f(x) называется строго возрастающей на интервале (a;b), если для любых значений аргументов из данного интервала: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Функция y=f(x) называется строго убывающей на интервале (a;b), если для любых значений аргументов из данного интервала: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



возрастающая функция



убывающая функция

Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 1. (Необходимое и достаточное условия возрастания функции)
Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ неубывающая на $[a;b]$, то ее производная неотрицательна на этом отрезке, $f'(x) \geq 0$.
Обратно. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и ее производная f '(x) $\geq$ 0 на этом отрезке для $a<x<b$, то $f(x)$ не убывает на$[a, b]$.

Теорема 2. (Необходимое и достаточное условия убывания функции)
Если дифференцируемая функция $f(x)$ невозрастающая на $[a;b]$, то на этом отрезке $f'(x) \leq 0$.
Обратно. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f'(x) \leq 0$ на $(a; b)$, то $f(x)$ не возрастает на $[a, b]$.

Алгоритм нахождения промежутков монотонности функции

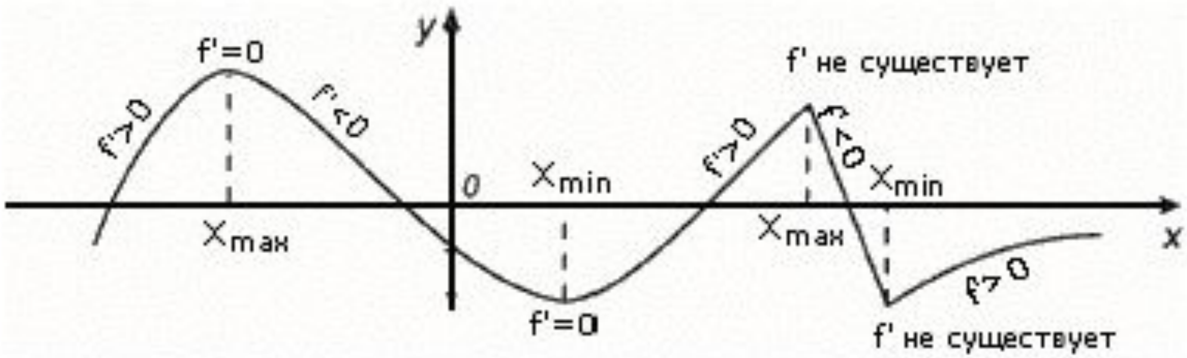
Для нахождения промежутки возрастания и убывания функции $y=f(x)$ необходимо:

- найти область определения функции;
- найти производную функции;
- решить неравенства $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$ на области определения;
- к полученным промежуткам добавить граничные точки, в которых функция определена и непрерывна.

Точки экстремума функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0. Тогда x_0 называется ***точкой максимума*** (соответственно ***точкой минимума***) функции $f(x)$, если для любого значения аргумента x из некоторой окрестности точки x_0. $f(x) < f(x_0)$, (соответственно $f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются точками *экстремума функции*.



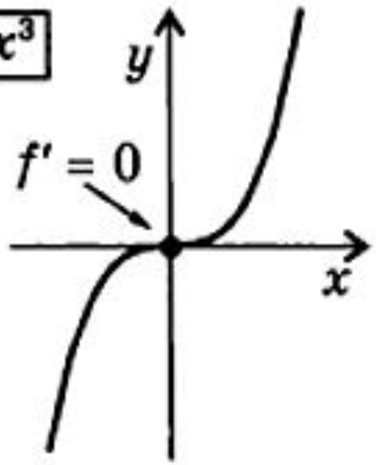
Необходимое условие экстремума функции

Если x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является *критической* точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

Замечание. Приведенное условие является только *необходимым* условием экстремума, но не является достаточным: критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры отсутствия экстремума в критической точке $x = 0$:

$\boxed{y = x^3}$



$\boxed{y = |x| - 2x}$

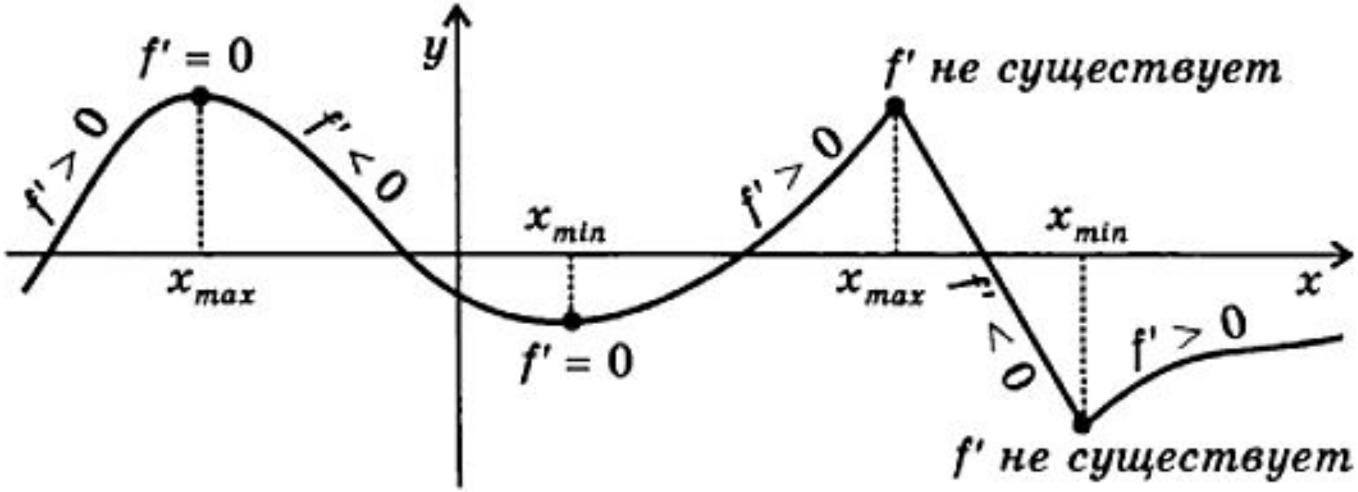
Достаточное условие экстремума

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$.

Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$, $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка максимума.	Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$, $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 — точка минимума.

Замечание. **В самой точке x_0 производной у функции $y = f(x)$ может не существовать.**

Примеры экстремумов:



Алгоритм нахождения точек экстремума функции

Для нахождения точек экстремума функции $y=f(x)$ необходимо:

- найти область определения функции;
- найти производную функции;
- найти точки (критические), в которых производная равна 0 или не существует, т.е.решить уравнение $f'(x)=0$;
- исследовать знак производной в окрестностях найденных критических точек;
- использовать достаточное условие экстремума.

<u>Замечание:</u> для нахождения экстремумов функции нужно вычислить значения $y=f(x)$ в найденных точках.