Разбор типовых заданий из экзамена по теории вероятности и математической статистике

Задание 1

Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,2. По мишени производится три независимых выстрела. Найти вероятность того, что будет хотя бы одно попадание в мишень.

Решение

n = 3 (выстрела), p = 0,2 (вероятность попадания), k >= 1 (будет хотя бы одно попадание). Вероятность промаха q=1-p=1-0,2=0,8. Используем формулу для вероятности противоположного события (нет ни одного попадания): $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. - формула Бернулли, где C_n^k - число сочетаний из n по k.

$$P(1) = C_3^1 * (0{,}2)^1 * (1-0{,}2)^{3-1} = \frac{3!}{1!\,(3-1)!} * 0{,}2 * 0{,}64 = 0{,}384$$

$$P(2) = C_3^2 * (0{,}2)^2 * (1-0{,}2)^{3-2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} * 0{,}04 * 0{,}8 = 0{,}096$$

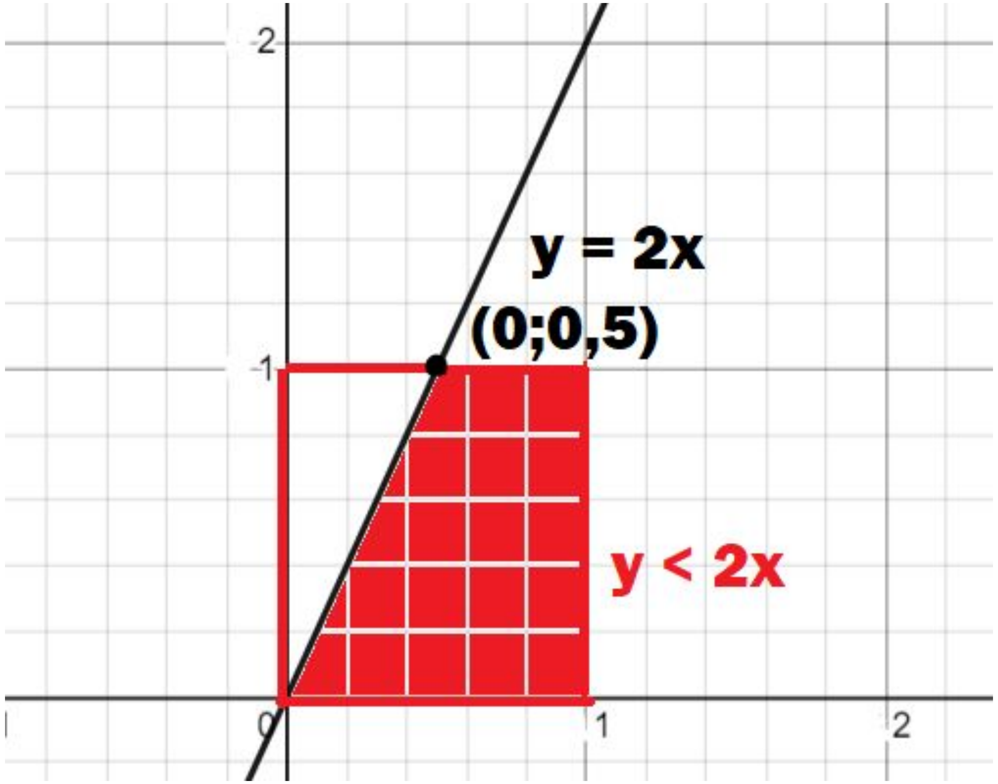
$$P(3) = C_3^3 * (0{,}2)^3 * (1-0{,}2)^{3-3} = \frac{3!}{3!\,(3-3)!} * 0{,}008 * 1 = 0{,}008$$

P(k>=1) = P(1) + P(2) + P(3) = 0,384 + 0,096+0,008 = 0,488 Ответ: 0,488

Задание 2

В квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,1), (1,0), наудачу брошена точка (x,y). Найдите вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству y < 2x.

Решение



На графике построен квадрат с вершинами (0,0), (0,1), (1,1), (1,0) и прямая y = 2x. Прямая пересекает квадрат в точках (0,0) и (1/2,1). Заштрихованная площадь подходит под условие задание «координаты этой точки удовлетворяют неравенству y < 2x».

- Площадь этой фигуры и будет ответом на задачу, чтобы найти площадь закрашенной фигуры нужно из площади квадрата вычесть площадь треугольника. $S = 1 - 0{,}5(1 * 0{,}5) = 0{,}75$

Ответ: 0,75

Задание 3

В урне находятся 6 шаров: 2 белых и 4 черных. Наугад вытаскивают три шара. Найти вероятность того, что среди них будет 1 белый и 2 черных.

Решение

Используем формулу $P(A) = \frac{n}{N}$, где n – это количество благоприятствующих событий (сколькими способами можно вытащить два черных и один белый), а N – количество всех возможных событий (сколькими способами можно вытащить три шара любого цвета)

Для того, чтобы узнать сколькими способами можно вытащить 1 белый шар из двух белых и 2 черных из четырех черных используем формулу число сочетаний C из n по k $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1 белый: $C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$; 2 черных: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$

Для того, чтобы узнать сколькими способами можно вытащить 3 шара любого цвета из общего количества шаров используем формулу число сочетаний С из n по k $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$С_6^3 = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = 20$$

$$P(A) = \frac{n}{N} = \frac{2*6}{20} = 0{,}6$$

Ответ: 0,6

Задание 4

Вычислить дисперсию дискретной случайно величины X, заданной законом распределения:

X	-2	0	3
P	0,3	0,2	0,5

Решение

Дисперсия случайной величины X вычисляется по следующей формуле: $D(X) = M(X - M(X))^2$, где

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i * p_i \qquad D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * p_i - (M(X))^2$$

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i * p_i = 0{,}3 * (-2) + 0{,}2 * 0 + 0{,}5 * 3 = 0{,}9$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 * p_i - (M(X))^2 = 0{,}3 * (-2)^2 + 0{,}2 * 0^2 + 0{,}5 * 3^2 - 0{,}9^2 = 4{,}89$$

Ответ: 4,89

Задание 5

На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Найти вероятность того, что получится слово МИНСК?

Решение

Из пяти различных элементов можно составить P_5 перестановок:

$P_5 = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$, значит, всего возможных исходов будет 120, а благоприятствующих данному событию – только один.

$$P = \frac{1}{120}$$

Ответ: 1/120

Задание 6

Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число делится на 5?

Решение

Таких чисел всего 4: 5, 10, 15, 20. Значит, $P = \frac{4}{20} = 0{,}2$, где 4 – кол-во чисел, которые делятся на 5, 20 – всего чисел.

Ответ: 0,2

Задание 7

Плотность распределения случайной величины X задана формулой.

$$f(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0 \\ ax^2, 0 < x \le 1 \\ 0, 1 < x < \infty \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание этой случайно величины.

Решение

Т.к. все значения данной случайной величины заключены на отрезке [0;1], то

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ax^2 dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1$, отсюда а = 3

- Получим плотность распределения

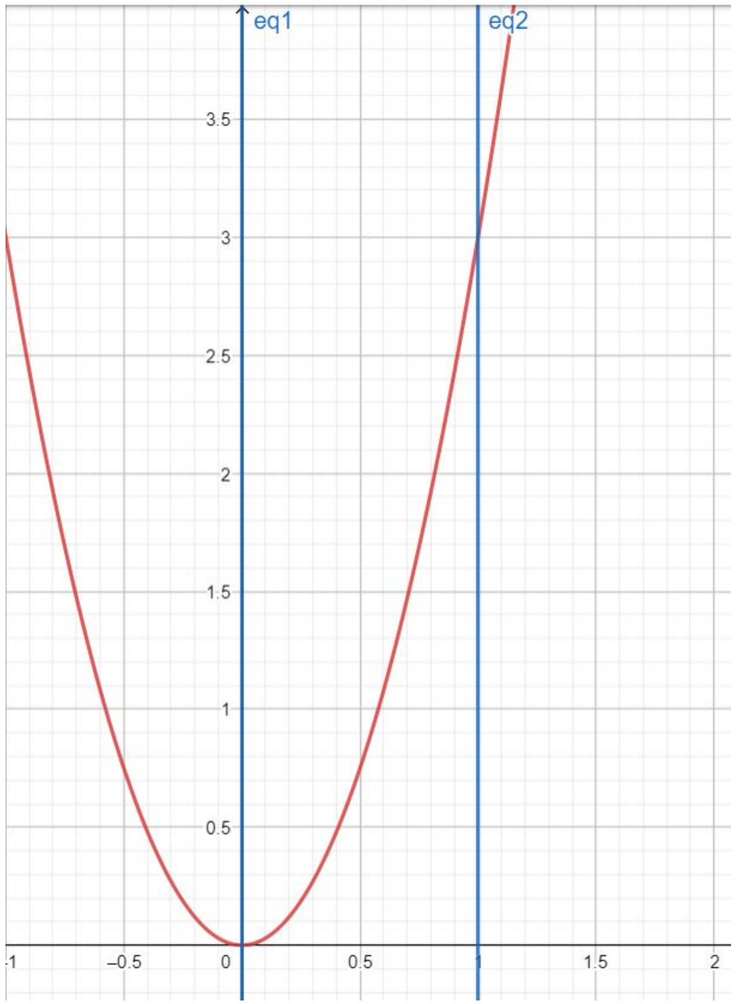
$$f(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < 0 \\ 3x^2, 0 < x \leq 1 \\ 0, 1 < x < +\infty \end{cases}$$

Математическое ожидание вычисляется по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) * x dx =$$

$$= 3\int_0^1 x^2 x dx = 3 * \frac{x^4}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Ответ: 0,75



Задание 8

Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения. $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+5)^2}{18}}$. Найти M(4X+3)+D(4X+3).

Решение

MX = a – математическое ожидание, DX = σ^2 −дисперсия для нормально распределенной величины N(a, σ^2).

$X: f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-a)^2}{2\sigma^2}}$ - плотность нормального распределения, отсюда данная случайная величина распределена по закону N(-5;9)

M(4X) + M(3) = 4M(X) + 3 = 4*(-5) + 3 = -17

D(4X) = $4^2 * DX = 16 * 9 = 144$

M(4X+3)+D(4X+3) = -17 + 144 = 127

Ответ: 127

Задание 9

Случайная величина х распределена равномерно на интервале (3,7). Вычислить плотность ее распределения на этом интервале.

Решение

X – R (3,7)

$$f(x) = \frac{1}{7-3} = \frac{1}{4}$$

Для равномерного распределения R(a,b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, U \in [a,b] \\ 0, \qquad U \notin [a,b] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, U \in (3,7) \\ 0, U \notin (3,7) \end{cases}$$

Задание 10

Случайная величина X задана дифференциальной функцией распределения. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$. Найти вероятность того, что случайная величина, распределенная таким образом, окажется в интервале (2;5).

Решение

$X\colon f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-a)^2}{2\sigma^2}}$ - плотность нормального распределения, N(3,1) – нормальное распределение.

$\Phi_{a,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)dv = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ – функция распределения нормального закона (функция Лапласа).

Значит, $P(x \in (2;5)) = \int_2^5 f(v)dv = \left(\Phi_{3,1}(x)|_2^5\right) = \Phi\left(\frac{x-3}{1}\right)|_2^5 = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1)^* = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185$

$\Phi(-x) = -\Phi(x)\ ^*$

Значения Ф(x) находятся по таблице значений функции Лапласа.

Ответ: 0,8185

Задание 11

Опыт состоит в последовательном бросании двух монет.
Рассматриваются события:
А – выпадение герба на первой монете;
В – выпадение хотя бы одной цифры.
Определить условную вероятность Р(В/А) - вероятность события В при условии, что событие А произошло.

Решение

$$P(AB) = P(A) * P(B/A)$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$$

$$P(B/A) = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

Задание 12

Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 4 раза.

Решение

$P = \frac{n}{N}$ −формула вероятности

$N = 2^6 = 64$ – количество возможных комбинаций

$n = C_6^4 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} = 15$ − число благоприятных исходов

$$P = \frac{15}{64} = 0{,}234375$$

Ответ: 0,234375

Задание 13

Сборщик получил 4 коробки деталей, изготовленных заводом 1, и 6 коробок деталей, изготовленных заводом 2. Вероятность того, что деталь завода 1 высшего качества, равна 0,9, а для завода 2 такая вероятность равно 0,8. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет высшего качества.

Решение

Событие А – «взята деталь высшего качества»

Событие Н(1) – «деталь взята из коробки завода 1»

Событие Н(2) – «деталь взята из коробки завода 2»

Всего коробок 4 + 6 = 10

$p(H_1) = \frac{4}{10} = 0{,}4$ $\qquad$ $p\left({}^{A}/_{H_1}\right) = 0{,}9$ по условию

$p(H_2) = \frac{6}{10} = 0{,}6$ $\qquad$ $p\left({}^{A}/_{H_2}\right) = 0{,}8$ по условию

По формуле полной вероятности:

$$p(A) = p(H_1) * p\left({}^{A}/_{H_1}\right) + p(H_2) * p\left({}^{A}/_{H_2}\right) = 0{,}4 * 0{,}9 + 0{,}6 * 0{,}8 = 0{,}84$$

Ответ: 0,84