Саровский физико-технический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ

Элементы алгебры логики

Алексеев В.В.

Саров

2016

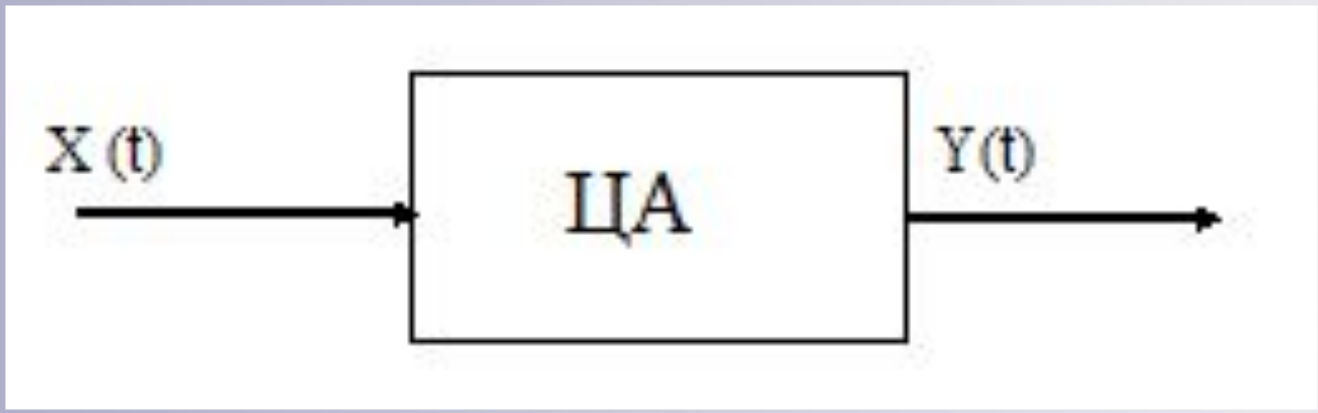
Понятие цифрового автомата

- **цифровым автоматом** называется устройство, предназначенное для преобразования цифровой (дискретной) информации, способное переходить под воздействием входных сигналов из одного состояния в другие и выдавать выходные сигналы.
- Отличительные особенности ЦА заключаются в том, что они имеют дискретное множество внутренних состояний и переход из одного в другое осуществляется скачкообразно.

•различают автоматы **синхронного** и **асинхронного** действия.

- Для идеализированных ЦА не учитывается переходные процессы в схемах и разница в фактических величинах T для правильного функционирования не имеет значение.
- По степени детализации описания ЦА различают автоматы абстрактные и структурные. В соответствии с этим различают абстрактную и структурную теорию ЦА.

- **<u>Абстрактные ЦА</u>** рассматриваются как " черный ящик ", имеющий один вход и один выход, т. е. отвлекаются от структуры ЦА и его входных X (t) и выходных Y (t) сигналов.



- входной $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots x_m\}$
- выходной $Y = \{y_0, y_1, y_2, \ldots y_n\}$
- состояний $S = \{s_0, s_1, s_2, \ldots s_k\}$

Тогда закон функционирования абстрактного автомата может быть задан уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} S(t+1) &= f[s(t),x(t)]; \\ Y(t) &= p[x(t),s(t)]; \\ S(0) &= s_0; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

- где $f\ (s, x)$ - функция переходов автомата ;

$p\ (x, s)$ - функция выходов автомата ;

s_0- начальное состояние автомата .

(**Автомат Мили**)

- ЦА, выходные сигналы в которых зависят только от состояния автомата и не зависят от значения входных сигналов, называются **автоматами Мура**

$$\left.\begin{aligned} &X\ (t+1) = f\,[\,s\,(t), x\,(t)\,];\\ &Y\ (t) = \mu\,[\,s\,(t)\,];\\ &S(0) = s_0\ ; \end{aligned}\right\}\quad (2)$$

где $\mu\ [\ s\ (t)\ ]$ -сдвинутая функция выхода.

- ЦА, имеющая более одного внутреннего состояния, называются **автоматами с памятью**. Частный случай абстрактных ЦА - автоматы с одним внутренним состоянием. Такие тривиальные автоматы называют **автоматами без памяти** или **комбинационными схемами**. Закон функционирования таких автоматов будет определяться одним уравнением:

$$Y\ (t) = f\ [\ x(t)]$$

Функции алгебры логики и их основные свойства.

Основные определения

1. Основное понятие АЛ - **высказывание**. Высказывание - некоторое предложение, о котором можно утверждать, что оно ***истинно*** или ***ложно***.
2. **Логическая (Булева) переменная** - такая величина X, которая может принимать только два значения:

$$X = \{ 0, 1 \}.$$

3. Логическая функция (функция алгебры логики - ФАЛ) - функция $f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_n)$, принимающая значение, равное нулю или единице на наборе логических переменных $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots \mathrm{x}_n$.

Пусть $X = \left\{ < x_1, x_2, \ldots x_n > \mid x_i \in Y \right\}$ и $Y = \{0, 1\}$

4. Функцией алгебры логики (ФАЛ) называется функция, дающая однозначное отображение X в Y, т.е.

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) : X \to Y$$

- 5. Если две ФАЛ $f_1(x_1 x_2 \ldots x_n)$ и $f_2(x_1 x_2 \ldots x_n)$ принимают на всех возможных наборах значений аргументов одинаковые значения, то функции f_1 и f_2 называются равносильными (равными), т.е.:

$$f_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = f_2(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

6. Функция $f(x_1 \ldots x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \ldots x_n)$ существенно зависит от аргумента , если имеет место соотношение:

$$f(x_1, \ldots x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots x_n) \neq f(x_1, \ldots x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

7. ФАЛ называют **не полностью определенными** или **не-доопределенными,** если на некоторых наборах значения ФАЛ не определены.

- Если ФАЛ не определена на m наборах аргументов, то путем ее произвольного доопределения можно получить 2^m различных полностью определенных функций.

Теорема:

Число различных ФАЛ, зависящих от n аргументов конечно и равно 2^{2^n}.

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0 0 ... 0 0	α_1
0 0 ... 0 1	α_2
0 0 ... 1 0	α_3
...	...
1 1 ... 1 1	α_{2^n}

Теорема:

- *Число ФАЛ, существенно зависящих от n аргументов, определяется следующим рекуррентным соотношением*:

$$A_n = 2^{2^n} - C_n^{n-1} A_{n-1} - C_n^{n-2} A_{n-2} - \dots - C_n^1 A_1 - A_0$$

где A_i - число ФАЛ, существенно зависящих от i аргументов,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Правая часть соотношения есть разность между числом всех ФАЛ и суммой всех ФАЛ, существенно зависящих от любого числа аргументов, меньших чем n.
- Вместо рекуррентного соотношения можно найти прямое выражение для значений:

$$A_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_k \, 2^{2^{m-k}}$$

Пример:

- Найти число ФАЛ, существенно зависящих от 3-х переменных.

Имеем: $A_0 = 2^{2^0} = 2^1 = 2.$

$$A_1 = 2^{2^1} - A_0 = 4 - 2 = 2$$

$$A_2 = 2^{2^2} - C_2^1 A_1 - A_0 = 2^4 - \frac{2!}{1!1!} 2 - 2 = 10$$

$$A_3 = 2^{2^3} - C_3^2 A_2 - C_3^1 A_1 - A_0 = 256 - 30 - 6 - 2 = 218$$

Элементарные функции алгебры логики

- n=1. Число ФАЛ равно 4:

x_1	$f_1(x_1)$	$f_2(x_1)$	$f_3(x_1)$	$f_4(x_1)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$$f_1(x) \equiv 0; \quad f_2(x) \equiv 1; \quad f_3(x) = x; \quad f_4(x) = \overline{x}.$$

Элементарные ФАЛ 2-х переменных

- n=2; Число ФАЛ равно 16.

Функции	x_1x_2	x_1x_2	x_1x_2	x_1x_2	Примечание.
	0 0	0 1	1 0	1 1	
f_1	0	0	0	0	$f \equiv 0$
f_2	0	0	0	1	$f = x_1x_2 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \& x_2$ коньюнкция.
f_3	0	0	1	0	$f = x_1\bar{x}_2$ (запрет x_2)
f_4	0	0	1	1	$f = x_1$ (тождественность x_1)
f_5	0	1	0	0	$f = \bar{x}_1x_2$ (запрет x_1)
f_6	0	1	0	1	$f = x_2$ (тождественность x_2)
f_7	0	1	1	0	$f = (x_1 \oplus x_2)$ (сложение по модулю 2)
f_8	0	1	1	1	$f = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$ (дизъюнкция)

f_9	1	0	0	0	$f = x_1 \downarrow x_2$ (Функция Пирса)
f_{10}	1	0	0	1	$f = (x_1 \equiv x_2) = (x_1 \sim x_2)$(Равнозначность)
f_{11}	1	0	1	0	$f = \bar{x}_2$ (Отрицание x_2)
f_{12}	1	0	1	1	$f = (x_2 \to x_1)$ (Импликация)
f_{13}	1	1	0	0	$f = \bar{x}_1$ (Отрицание x_1)
f_{14}	1	1	0	1	$f = (x_1 \to x_2)$ (Импликация)
f_{15}	1	1	1	0	$f = (x_1 / x_2)$ (Функция Шеффера)
f_{16}	1	1	1	1	$f \equiv 1$

- имеем 10 различных функций, существенно зависящих от аргументов x_1 и x_2 .

$$1.\ f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = x_1 \,\&\, x_2 = x_1 \wedge x_2$$

- **конъюнкция (логическое умножение,** или **функция И**) истинна тогда и только тогда, когда и x_1 и x_2 истинны.

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$

- **дизъюнкция (логическое сложение,** или **функция ИЛИ)** истинна тогда, и только тогда, когда истинны или x_1, или x_2, или обе переменные.

x_1	x_2	f
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

3. $f(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$

- **Функция сложения по модулю 2 (**или **функция разноименности,** или **функция исключающее ИЛИ)** истинна тогда и только тогда когда $x_1 \neq x_2$.

x_2	x_1	f
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

4. $f(x_1, x_2) = x_1 \equiv x_2 = x_1 \sim x_2$

- **функция равнозначности**, которая истинна тогда и только тогда, когда обе переменные или истинны, или ложны.

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. $f(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$

- **импликация x_1 в x_2** ложна тогда и только тогда, когда x_1 истинна, а x_2 ложна

x_1	x_2	$f = x_1 \to x_2$	$f = x_2 \to x_1$
0	0	**1**	**1**
0	1	**1**	**0**
1	0	**0**	**1**
1	1	**1**	**1**

6. $f = x_1 \downarrow x_2$

- **функция Пирса (Вебба)** истинна тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 ложны.

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

7. $f(x_1, x_2) = x_1 / x_2$

- **Функция Шеффера** ложна только тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 истинны.

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$	$x_2 \to x_1$	$x_1 \equiv x_2$	x_1 / x_2
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

Выражение одних элементарных функций через другие.

1. $x_1 \to x_2 = \overline{x_1} \vee x_2;$

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x_1} \vee x_2$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

2. $x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \sim x_2}$

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$	$\overline{x_1 \sim x_2}$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

3. $x_1 \sim x_2 = (\bar{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \bar{x}_2) = (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1)$

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \vee x_2$	$x_1 \vee \bar{x}_2$	$(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1

4. $x_1x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$

x_1	x_2	x_1x_2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$	$\overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1

5. $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}$

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$	$\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Свойства элементарных ФАЛ.

$$\overline{\overline{x}} = x;$$

$$x \vee x = x;$$

$$x \cdot x = x;$$

$$x \vee \overline{x} = 1;$$

$$x \cdot \overline{x} = 0;$$

$$x \vee 1 = 1;$$

$$x \vee 0 = x;$$

$$x \cdot 1 = x;$$

$$x \cdot 0 = 0.$$

Свойства конъюнкции, дизъюнкции, отрицания

1. **Свойство ассоциативности** (сочетательный закон):

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = (x_1 \cdot x_3) \cdot x_2$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \vee x_2$$

2. **Свойство коммутативности** (переместительный закон):

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1; \quad x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$

3. **Свойство дистрибутивности** (распределительный закон):

- для конъюнкции относительно дизъюнкции:

$$x_1 \& (x_2 \vee x_3) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& x_3)$$

- для дизъюнкции относительно конъюнкции:

$$x_1 \vee x_2 \& x_3 = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$$

Действительно:

$$(x_1 \vee x_2)\cdot(x_1 \vee x_3) =$$

$$= x_1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot x_3 =$$

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \vee x_2 \cdot x_3 =$$

$$= x_1(1 \vee x_3 \vee x_2) \vee x_2 \cdot x_3 = x_1 \vee x_2 \cdot x_3$$

Законы Де-Моргана:

1. $$\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n} = \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\, \bar{x}_3 \,\&\, \ldots \,\&\, \bar{x}_n$$

2. $$\overline{x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \ldots \vee \bar{x}_n$$

Законы (правила) поглощения:

1. $$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1$$

2. $$x_1(x_1 \vee x_2) = x_1$$

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1(1 \vee x_2) = x_1 \cdot 1 = x_1$$

$$x_1(x_1 \vee x_2) = x_1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot x_2 =$$

$$= x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 \vee x_2) = x_1$$

Из логических функций устанавливается

- **правило склеивания**:

$$x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 = x_1$$

- **правило вычеркивания**:

$$x_1 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \vee x_2$$

$$x_1 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 \vee \bar{x}_1 x_2 =$$

$$= x_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 =$$

$$= (x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2) =$$

$$= x_1 (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2 (x_1 \vee \bar{x}_1) =$$

$$= x_1 \cdot 1 \vee x_2 \cdot 1 = x_1 \vee x_2 .$$

- Знание свойств, законов и правил элементарных ФАЛ необходимо для аналитического описания функций алгебры логики, их преобразований.

Свойства функции сложения по модулю два

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \equiv x_2} = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)\cdot(x_1 \vee \bar{x}_2)} =$$

$$= \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2)} =$$

$$= x_1 \cdot \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \cdot x_2 = (x_1 \vee x_2)\cdot(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$$

- Функция сложения по модулю два обладает следующими свойствами:
- коммутативности (переместительный закон)

$$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$$

- ассоциативности (сочетательный закон):

$$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$$

- дистрибутивности (распределительный закон):

$$x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3$$

- справедливы правила:

$$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus 0 = x$$

$$x \oplus \overline{x} = 1 \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$$

- Функции НЕ, ИЛИ, НЕ могут быть выражены через функцию сложения по модулю два следующим образом:

$$\overline{x} = x \oplus 1$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 = (x_1 \oplus x_2) \oplus (x_1 \vee x_2)$$

Свойства функции импликации

$$x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

- Для функции импликации справедливы следующие правила:
- $x \to x = 1$

$x \to \bar{x} = \bar{x}$

$x \to 1 = 1$

$x \to 0 = \bar{x}$

$0 \to x = 1$

$1 \to \bar{x} = x$

$$x_1 \rightarrow x_2 = \bar{x}_2 \rightarrow \bar{x}_1$$

- Функции НЕ, ИЛИ, И выражаются через импликацию следующим образом:

$$\bar{x} = x \rightarrow 0$$

$$x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \rightarrow x_2 = (x_1 \rightarrow 0) \rightarrow x_2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{x_1 \rightarrow \bar{x}_2} = \overline{x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0)} =$$

$$= [x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0)]$$