საშინაო დავალება: № 12

სახელმძღვანელო : ნ. ხვედელიძე. მათემატიკა ეკონომიკის და ბიზნესისათვის (ახალი ვერსია)

სასწავლო თემა: თავი 11. წარმოებულის ზოგიერთი გამოყენება **[გვ. 223 - 246]**

სასწავლო თემა: თავი 12. წარმოებულის გამოყენება ეკონომიკურ ამოცანებში **[247 - 257]**

§ 11.8. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები [234 - 236]

§ 11.9. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება [236 - 240]

§ 12. 4. ფუნქიის ელასტიკურობა და მისი თვისებები [253 - 254]

§ 12. 5. მოთხოვნის და მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ [254 - 257]

საშინაო დავალება: § 11.4. , § 11.5. , § 11.6. და § 11.7. პარაგრაფებში გარჩეული ყველა ამოცანა

სავარჯიშო 11 . (№6 ; №7 -ის 1. და 5.)

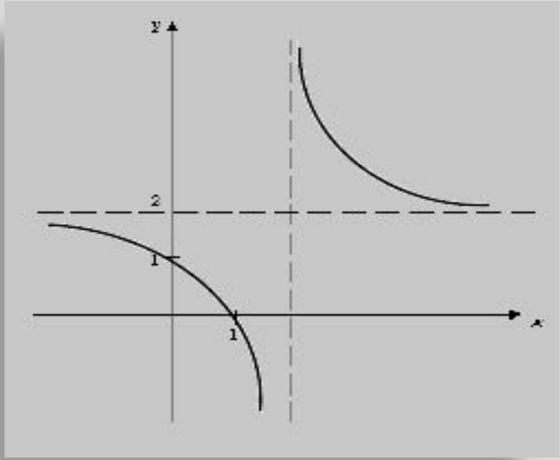
სავარჯიშო № 12. გვ. [258 - 261] №14, 16, 18, 20, 22.

შეამოწმეთ თეორიული მასალის ცოდნა შემდეგი კითხვების საშუალებით:

- განსაზღვრეთ ფუნქციის ასიმპტოტი.
- მოიყვანეთ ფორმულები, რომლის საშუალებითაც განისაზღვრება ფუნქციის გრაფიკის დახრილი ასიმპტოტები.
- გადმოეცით ფუნქციის გამოკვლევის ზოგადი სქემა.
- მოიყვანეთ ფუნქციის საშუალო ელასტიკურობის განმარტება არგუმენტის ნაზრდის მიმართ. ამოწერეთ შესაბამისი ფორმულა; რას გვიჩვენებს ფუნქციის საშუალო ელასტიკურობა?
- განმარტეთ ფუნქციის ელასტიკურობა არგუმენტის მიმართ; ამოწერეთ შესაბამისი ფორმულა;
- რას გვიჩვენებს ფუნქციის ელასტიკურობა არგუმენტის მიმართ?
- როდის ამბობენ, რომ f ფუნქცია x წერტილში ელასტიკურია? არაელასტიკურია? აქვს ერთეულოვანი ელასტიკურობა?
- მოიყვანეთ ფუნქციის ელასტიკურობის თვისებები;
- რას ეწოდება მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ნაზრდის მიმართ? ამოწერეთ შესაბამისი ფორმულა; რას გვიჩვენებს მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ნაზრდის მიმართ?
- რას ეწოდება მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ? ამოწერეთ შესაბამისი ფორმულა;
- რას გვიჩვენებს მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ?
- ელასტიკურობის გამოყენებით დაახასიათეთ მთლიანი შემოსავლის დამოკიდებულება ფასის ცვლილებაზე.

§ 11.8. ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტები

- ფუნქციის გრაფიკის დადგენის დროს, ხშირ შემთხვევაში მნიშვნელოვანია მისი ფორმის დადგენა, როდესაც ამ გრაფიკის წერტილი უსასრულოდ შორდება კოორდინატთა სათავეს. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ წერტილი გრაფიკზე მიისწრაფის უსასრულობისაკენ.
- ვიტყვით, რომ $N(x;y)$ წერტილი, რომელიც მდებარეობს მოცემული $y=f(x)$ ფუნქციის გრაფიკზე, მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, თუ მისი ერთ-ერთი კოორდინატი მაინც მიისწრაფის უსასრულობისაკენ.
- თუ გრაფიკის $N(x;y)$ წერტილი ისე მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, რომ ის სულ უფრო უახლოვდება რაიმე წრფის გრაფიკს, მაშინ ამ წრფეს უწოდებენ მოცემული **ფუნქციის ასიმპტოტს**.
- რაიმე წრფეს **ეწოდება ფუნქციის გრაფიკის ასიმპტოტი**, თუ მანძილი გრაფიკის წერტილიდან ამ წრფემდე მიისწრაფის ნულისაკენ, როდესაც ეს წერტილი მიისწრაფის უსასრულობისაკენ.
- ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს **ვერტიკალური, ჰორიზონტალური** და **დახრილი ასიმპტოტები.**



- **მაგალითად:** $f(x)=\frac{1}{x-2}+2$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$ და მის გრაფიკი მოცემულია ნახაზზე.
- $x=2$ არის ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი,
- ხოლო $y=2$ ჰორიზონტალური ასიმპტოტი.

- ამრიგად, ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტი უნდა ვეძებოთ იმ წერტილებს შორის, სადაც მოცემული ფუნქცია განიცდის უსასრულო წყვეტას და ფუნქციის ზღვარი ამ წერტილში მიისწრაფის უსასრულობისაკენ.
- ჰორიზონტალური ასიმპტოტის მოსაძებნად უნდა განვიხილოთ

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

- თუ ეს ზღვარი არსებობს და ის სასრული რიცხვია, ე.ი.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

- მაშინ, $y = a$ იქნება ამ ფუნქციის **ჰორიზონტალური ასიმპტოტი**.

- **დახრილი ასიმპტოტი** მოიცემა ფორმულით $y = k \cdot x + b$

სადაც,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad (11.5)$$

და

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k \cdot x) \qquad (11.6)$$

- თუ არსებობს (11.5) ზღვარი, მაშინ ვეძებთ (11.6) ზღვარსაც, თუ (11.6) ზღვარიც არსებობს, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულ $y = f(x)$ ფუნქციას აქვს **დახრილი ასიმპტოტი** და ის არის $y = kx + b$ წრფე.

❑ **ამოცანა 7.** მოცემულია

$$y = x + \frac{1}{x-2}$$

ვიპოვოთ ამ ფუნქციის ასიმპტოტები.

❑ **ამოხსნა.** $x = 2$ წერტილი არ შედის ფუნქციის განსაზღვრის არეში და ამ წერტილში ფუნქციას აქვს უსასრულო წყვეტა.

❑ ე.ი. $x = 2$ არის მოცემული y ფუნქციის **ვერტიკალური ასიმპტოტი**.

➢ ამ ფუნქციას აქვს **დახრილი ასიმპტოტიც**.

➢ მართლაც, (11.5) $\left[k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\right]$ ტოლობით გვექნება:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x(x-2)}\right) = 1.$$

➢ რადგან არსებობს (11.5) ზღვარი $\left[k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\right]$, ვიხილავთ (11.6) $\left[b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx)\right]$ ზღვარსაც:

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{1}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$$

➢ როგორც ვიცით, **დახრილი ასიმპტოტი** მოიცემა ფორმულით $y = k\cdot x + b$. ე.ი. $y = 1\cdot x + 0 = x$,

❑ ანუ, $y = x$ წრფე არის მოცემული y ფუნქციის **დახრილი ასიმპტოტი**.

§ 11.9. ფუნქციის გამოკვლევა და გრაფიკის აგება

- უკვე შესწავლილი მასალა საშუალებას გვაძლევს სრულყოფილად გამოვიკვლიოთ ფუნქცია და ავაგოთ შესაბამისი გრაფიკი.

- ჩამოვაყალიბოთ ცალკეული პუნქტების სახით იმ საკითხების სია, რომლებიც უნდა შევისწავლოთ ფუნქციის სრული გამოკვლევის ჩასატარებლად:

1. ვიპოვოთ ფუნქციის **განსაზღვრის არე**;
2. გამოვიკვლიოთ ფუნქციის **ლუწობა** და **კენტობა**, რათა დავადგინოთ როგორი სახის სიმეტრიულობასთან გვაქვს საქმე:
   - *თუ $f(x)$ ფუნქცია ლუწია [$f(-x) = f(x)$], მაშინ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია ორდინატთა OY ღერძის მიმართ.*
   - *ხოლო თუ $f(x)$ კენტია[$f(-x) = -f(x)$], მაშინ მისი გრაფიკი სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ.*
3. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის **კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები**, ე.ი. მოვძებნოთ OY ღერძთან გადაკვეთის წერტილი $(0; f(0))$ და ამოვხსნათ განტოლება $f(x) = 0$, რომლის ამონახსნებიც განსაზღვრავენ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილებს;
4. ვიპოვოთ ფუნქციის წარმოებული, ფუნქციის **ექსტრემუმის წერტილები** და დავადგინოთ ფუნქციის **ზრდადობისა** და **კლებადობის** შუალედები;
5. ვიპოვოთ ფუნქციის **ექსტრემუმები**;
6. ვიპოვოთ ფუნქციის მეორე რიგის წარმოებული და დავადგინოთ გრაფიკის **ამოზნექილობისა** და **ჩაზნექილობის** შუალედები და **გადაღუნვის წერტილები**;
7. ვიპოვოთ ფუნქციის **ასიმპტოტები**;
8. ჩატარებული გამოკვლევის საფუძველზე **ავაგოთ ფუნქციის გრაფიკი.**

❑ **ამოცანა 8.** გამოვიკვლიოთ

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

ფუნქცია და ავაგოთ მისი გრაფიკი.

❑ **ამოხსნა.** ჩავატაროთ გამოკვლევა ზემოთ მოყვანილი სქემის მიხედვით.

1. ვიპოვოთ ფუნქციის განსაზღვრის არე

➢ მოცემული ფუნქცია განსაზღვრულია და უწყვეტია მთელ რიცხვთა ღერძზე, გარდა $x = 0$ წერტილისა, ე.ი.

$$D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2. გამოვიკვლიოთ ფუნქციის ლუწობა და კენტობა, რათა დავადგინოთ როგორი სახის სიმეტრიულობასთან გვაქვს საქმე:

➢ რადგან განსაზღვრის არე სიმეტრიულია კოორდინატთა სათავის მიმართ და სრულდება პირობა:

$$f(-x) = \frac{-x}{2} + \frac{2}{-x} = -\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = -\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = -f(x)$$

[$f(-x) = -f(x)$], ამიტომ $f(x)$ **ფუნქცია არის კენტი.**

3. ვიპოვოთ ფუნქციის გრაფიკის კოორდინატთა ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები.

➢ OY ღერძს არ კვეთს, რადგან $x = 0$ წერტილში $f(x)$ ფუნქცია განსაზღვრული არ არის.

➢ ვიპოვოთ OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 0; \quad \text{აქედან} \quad \frac{x^2 + 4}{2x} = 0$$

➢ ეს გამოსახულება არსად ნული არ ხდება. შესაბამისად, OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილი არ აქვს.

❑ ე.ი. მოცემულ $f(x)$ ფუნქციას კოორდინატთა **ღერძებთან გადაკვეთის წერტილები არა აქვს.**

4. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული, ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები და დავადგინოთ ფუნქციის ზრდადობისა და კლებადობის შუალედები;

- ჯერ ვიპოვოთ პირველი რიგის წარმოებული:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

- სტაციონალური წერტილის მოსაძებნად საჭიროა წარმოებული გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ მიღებული განტოლება. მივიღებთ:

$$x_1 = -2, \quad \text{და} \quad x_2 = 2$$

- ე.ი. გვაქვს ორი სტაციონალური წერტილი.
  - როცა $x \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty)$, მაშინ $f'(x) > 0$. ე.ი. ამ შუალედებში $f(x)$ ფუნქცია ზრდადია;
  - ხოლო, როცა $x \in [-2; 0) \cup (0; 2]$, მაშინ $f'(x) < 0$. ე.ი. ამ შუალედებში $f(x)$ ფუნქცია კლებადია.

5. ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის ექსტრემუმები. გამოვთვალოთ მეორე რიგის წარმოებული:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^3}$$

- რადგან,

$$f''(-2) = \frac{4}{(-2)^3} = -\frac{1}{2} < 0$$

- ამიტომ, $f(x)$ ფუნქციას ამ წერტილში აქვს მაქსიმუმი. ე.ი. $x_{max} = -2$.
- რადგან,

$$f''(2) = \frac{4}{(2)^3} = \frac{1}{2} > 0$$

- ამიტომ, $f(x)$ ფუნქციას ამ წერტილში აქვს მინიმუმი. ე.ი. $x_{min} = 2$.

- შესაბამისად, $f_{max}(-2) = -2$ და $f_{min}(2) = 2$.

6. **ვიპოვოთ ჩაზნექილობისა და ამოზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები.**

- მეორე რიგის წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ გრაფიკს გადაღუნვის წერტილი არ გააჩნია, რადგანაც ნებისმიერი x – თვის განსაზღვრის არედან $f''(x) \neq 0$.
- გარდა ამისა, $f''(x)$ -ის ნიშანი ემთხვევა x გამოსახულების ნიშანს.
  - ცხადია, როცა $x > 0$ ე.ი. როცა, $x \in (0;\ +\infty)$, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი **ჩაზნექილი** იქნება,
  - ხოლო, როცა $x < 0$ ე.ი. როცა, $x \in (-\infty;\ 0)$, $f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი **ამოზნექილი** იქნება.

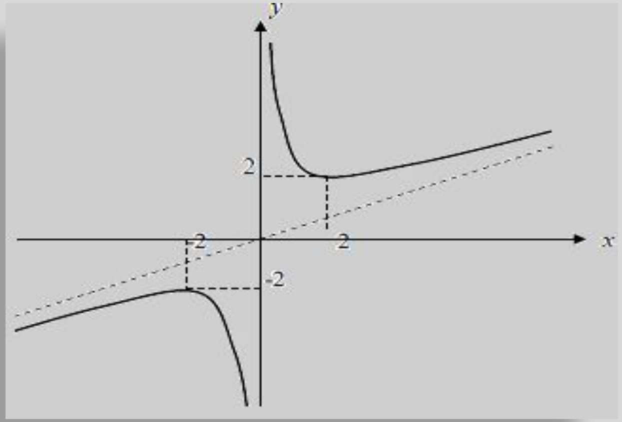
7. **ვიპოვოთ ფუნქციის ასიმპტოტები**

- $x = 0$ ვერტიკალური ასიმპტოტია.
- ვიპოვოთ დახრილი ასიმპტოტი.
- (11.5) $\left[k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\right]$ ტოლობით გვექნება:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{2} + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

- რადგან არსებობს (11.5) ზღვარი $\left[k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\right]$, ვიხილავთ (11.6) $\left[b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)\right]$ ზღვარსაც:

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}\cdot x\right) = 0.$$



- ე.ი. $f(x)$ ფუნქციის დახრილი ასიმპტოტია $y = \frac{1}{2}\cdot x + 0$,

  ანუ, $y = \frac{1}{2}\cdot x$ **წრფე.**
- ჩატარებული გამოკვლევების გათვალისწინებით

  შეგვიძლია ავაგოთ მოცემული ფუნქციის გრაფიკი .

§ 12.4. ფუნქციის ელასტიკურობა და მისი ძირითადი თვისებები

- ვთქვათ, რაიმე შუალედში მოცემულია $\boldsymbol{y = f(x)}$ წარმოებადი ფუნქცია. აღვნიშნოთ არგუმენტის $\Delta \boldsymbol{x}$ ნაზრდის შესაბამისი ფუნქციის ნაზრდი $\Delta \boldsymbol{f(x)}$ -ით:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

- $\frac{\Delta x}{x}$ სიდიდეს ეწოდება **არგუმენტის ფარდობითი ნაზრდი,** ხოლო $\frac{\Delta f(x)}{f(x)}$ სიდიდეს - **ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდი.**

- $\boldsymbol{y = f(x)}$ ფუნქციის **საშუალო ელასტიკურობა** არგუმენტის $\Delta \boldsymbol{x}$ ნაზრდის მიმართ $\boldsymbol{x}$ წერტილში, ეწოდება ამ ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდის არგუმენტის ფარდობით ნაზრდთან შეფარდების მოდულს და აღინიშნება $\boldsymbol{E(\,f\,;\,x\,;\,\Delta x\,)}$ სიმბოლოთი.

- ამრიგად,

$$E(\,f\,;\,x\,;\,\Delta x\,) = \frac{\left|\dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}\right|}{\left|\dfrac{\Delta x}{x}\right|} = \left|\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right|$$

- *ამ განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ ფუნქციის საშუალო ელასტიკურობა გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება ფუნქცია, როცა არგუმენტი იცვლება 1% -ით.*

- $\boldsymbol{y = f(x)}$ **ფუნქციის ელასტიკურობა არგუმენტის მიმართ $\boldsymbol{x}$ წერტილში** ეწოდება ამ ფუნქციის ფარდობითი ნაზრდის არგუმენტის ფარდობით ნაზრდთან შეფარდების მოდულის ზღვარს, როცა არგუმენტის ნაზრდი მიისწრაფის ნულისკენ.

- აღვნიშნოთ იგი $\boldsymbol{E(\,f\,;\,x\,)}$ სიმბოლოთი.

- განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x};\Delta\boldsymbol{x})$$

- ცხადია, რომ

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x};\Delta\boldsymbol{x}) = \lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta\boldsymbol{x}}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\Delta\boldsymbol{x}}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}\cdot\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\right|$$

- ადვილი დასანახია, ფუნქციის ელასტიკურობა გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება ფუნქცია მიახლოებით, როცა არგუმენტი იცვლება 1%-ით.

  - თუ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) > \mathbf{1}$, მაშინ ამბობენ რომ, $\boldsymbol{f}$ ფუნქცია ელასტიკურია $\boldsymbol{x}$ წერტილში;
  - თუ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) < \mathbf{1}$, მაშინ ამბობენ რომ, $\boldsymbol{f}$ ფუნქცია არაელასტიკურია $\boldsymbol{x}$ წერტილში;
  - თუ $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$, მაშინ ამბობენ რომ, $\boldsymbol{f}$ ფუნქციისათვის გვაქვს ერთეული ელასტიკურობა $\boldsymbol{x}$ წერტილში.

- ადვილია იმის შემოწმება, რომ ფუნქციის ელასტიკურობას აქვს შემდეგი თვისებები (შეამოწმეთ თქვენ თვითონ):

  - $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g};\ \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{g};\boldsymbol{x})$;
  - $\boldsymbol{E}\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}};\ \boldsymbol{x}\right) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{g};\boldsymbol{x})$;
  - $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{f})}$

§ 12.5. მოთხოვნის და მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ

- ერთ - ერთი მნიშვნელოვანი პრობლემა, რომელიც გვხვდება ბიზნესში, არის $(\boldsymbol{TR})$ მთლიანი ამონაგების (**Total Revenue - მთლიანი შემოსავლის**) ცვლილება როგორ არის დამოკიდებული პროდუქციის ერთეულის ფასის ცვლილებაზე.

- როგორც უკვე ვიცით, $\boldsymbol{P}$ ფასის კლებას მოსდევს $\boldsymbol{Q}$ მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) ზრდა.

- ეს მათემატიკურად ნიშნავს იმას, რომ მოთხოვნის

$$\boldsymbol{Q = g_D(P)} \tag{12.8}$$

ფუნქცია არის კლებადი.

- მეორე მხრივ, როგორც უკვე ვიცით, მთლიანი ამონაგების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

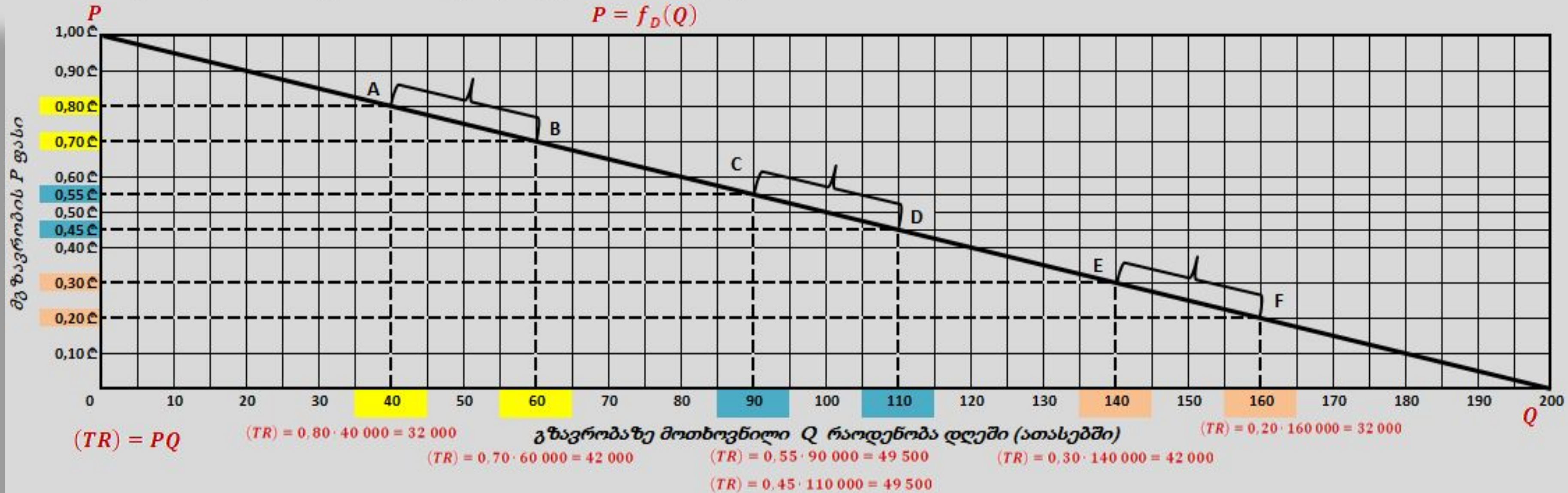
$$(\boldsymbol{TR}) = \boldsymbol{PQ}$$

- რადგან $\boldsymbol{P}$ ფასის კლებას მოსდევს $\boldsymbol{Q}$ მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) ზრდა ამიტომ, ზოგადად ძნელია დავასკვნათ, რა დაემართება $(\boldsymbol{TR})$ მთლიან შემოსავალს (ამონაგებს):
  - იგი შეიძლება შემცირდეს,
  - დარჩეს უცვლელი,
  - ან, გაიზარდოს.

- განვიხილოთ $(\boldsymbol{TR})$ მთლიან შემოსავლის ცვლილება, $\boldsymbol{P}$ ფასის კლებისა და შესაბამისად, $\boldsymbol{Q}$ მოთხოვნის ზრდის დროს :

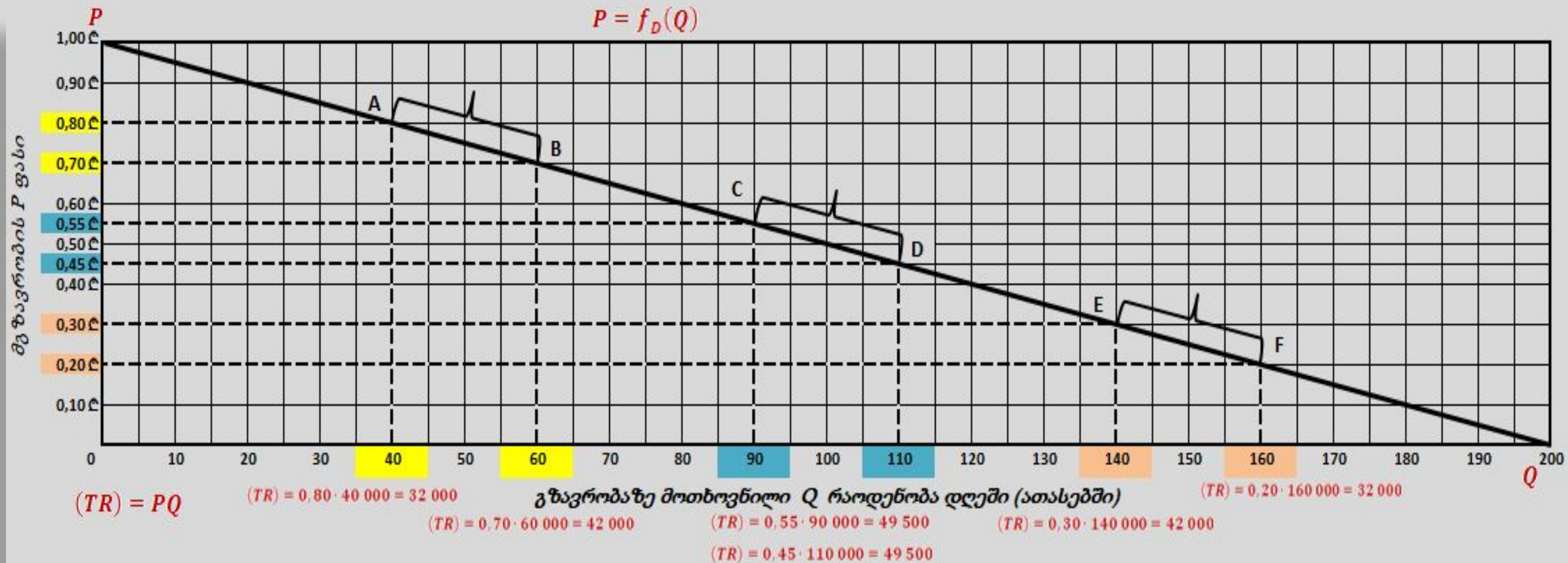
- **ამოცანა 1.** დაუშვათ საზოგადოებრივი სატრანსპორტო კომპანია განიხილავს მგზავრობაზე ტარიფის შემცირებას. საინტერესოა, გაიზრდება, თუ შემცირდება კომპანიის მთლიანი შემოსავალი?

- განვიხილოთ, მოთხოვნის მრუდი რომელიც გვიჩვენებს, თუ როგორ იწვევს ფასის ცვლილება (კლება), მოთხოვნილი რაოდენობის ცვლილებას (ზრდას).



- თქვათ, მგზავრობის საწყისი ფასია $\mathbf{0,80}$ ლარი, ხოლო მგზავრობაზე მოთხოვნილი რაოდენობაა **40 000** მგზავრობა დღეში. ანუ, დღეში $(\boldsymbol{TR})$ მთლიანი შემოსავალი იქნება **32 000** ლარი $[(\boldsymbol{TR}) = \mathbf{0,80 \cdot 40\,000 = 32\,000}]$, რომელსაც ფასის მიმართ მოთხოვნის მრუდზე შეესაბამება $\boldsymbol{A}$ წერტილი.

- მას შემდეგ, რაც მგზავრობის ფასი შემცირდა $\mathbf{0,10}$ ლარით და გახდა $\mathbf{0,70}$ ლარი, მგზავრობაზე მოთხოვნილი რაოდენობა დღეში გაიზარდა **60 000** - მდე. $\boldsymbol{A}$ წერტილიდან $\boldsymbol{B}$ წერტილამდე ცვლილება გვიჩვენებს, რომ ფასის $\mathbf{0,10}$ ლარით შემცირებამ, მგზავრობის მოთხოვნის რაოდენობა გაზარდა **20 000** - ით ხოლო, დღეში $(\boldsymbol{TR})$ მთლიანი შემოსავალი **32 000 ლარიდან გაიზრდება 10 000 ლარით და იქნება 42 000 ლარი** $[(\boldsymbol{TR}) = \mathbf{0,70 \cdot 60\,000 = 42\,000}]$, რომელსაც ფასის მიმართ მოთხოვნის მრუდზე შეესაბამება $\boldsymbol{B}$ წერტილი.
- შესაბამისად, **ფასის შემცირებამ** გამოიწვია (TR) მთლიანი **შემოსავლის ზრდა**.



- თუ საწყისი ფასი იქნებოდა $\mathbf{0,55}$ ლარი, ხოლო მგზავრობაზე მოთხოვნილი რაოდენობაა **90 000** მგზავრობა დღეში. ანუ, დღეში $(\boldsymbol{TR})$ მთლიანი შემოსავალი იქნება **49 500** ლარი $[(\boldsymbol{TR}) = \mathbf{0,55 \cdot 90\,000 = 49\,500}]$, რომელსაც ფასის მიმართ მოთხოვნის მრუდზე შეესაბამება $\boldsymbol{C}$ წერტილი.

- მგზავრობის ფასის შემცირება $\mathbf{0,10}$ ლარით, $\mathbf{0,45}$ ლარამდე, მგზავრობაზე მოთხოვნილი რაოდენობას გაზრდის **110 000** მგზავრობამდე დღეში. ხოლო, **დღეში $(\boldsymbol{TR})$ მთლიანი შემოსავალი 49 500 დოლარი არ შეიცვლება** $[(\boldsymbol{TR}) = \mathbf{0,45 \cdot 110\,000 = 49\,500}]$ **,** რომელსაც ფასის მიმართ მოთხოვნის მრუდზე შეესაბამება $\boldsymbol{D}$ წერტილი.

- შესაბამისად, **ფასის შემცირებამ** დღეში (TR) მთლიანი **შემოსავლის ცვლილება არ გამოიწვია.**

- თუ საწყისი ფასი იქნებოდა **0,30** ლარი, ხოლო მგზავრობაზე მოთხოვნილი რაოდენობაა **140 000** მგზავრობა დღეში. ანუ, დღეში (TR) მთლიანი შემოსავალი იქნება **42 000** ლარი $[(TR) = 0,30 \cdot 140\,000 = 42\,000]$, რომელსაც ფასის მიმართ მოთხოვნის მრუდზე შეესაბამება E წერტილი.

- მგზავრობის ფასის შემცირება **0,10** ლარით, **0,20** ლარამდე, მგზავრობაზე მოთხოვნილი რაოდენობას გაზრდის **160 000** მგზავრობამდე დღეში. ხოლო, **დღეში (TR) მთლიანი შემოსავალი 42 000 ლარიდან შემცირდება 10 000 ლარით** და იქნება **32 000** ლარი $[(TR) = 0,80 \cdot 40\,000 = 32\,000]$, რომელსაც ფასის მიმართ მოთხოვნის მრუდზე შეესაბამება F წერტილი.

- შესაბამისად, **ფასის შემცირებამ** გამოიწვია დღში (TR) მთლიანი **შემოსავლის შემცირება**.

- ამ პარაგრაფში, ჩვენი მიზანია აღნიშნული პრობლემის გამოკვლევა და შესაბამისი მათემატიკური მეთოდის შესწავლა.
- რეალურად, ბაზრის მოთხოვნა ძალიან მგრძნობიარეა ფასის ცვლილების მიმართ, რასაც ბუნებრივად მოსდევს მთლიანი შემოსავლის ცვლილება.
- **მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ΔP ნაზრდის მიმართ ეწოდება სიდიდეს:**

$$E(\,Q;P;\Delta P\,)=\frac{Q-\text{მოთხოვნის ფარდობითი ნაზრდი}}{P-\text{ფასის ფარდობითი ნაზრდი}}=\frac{\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right|}{\left|\frac{\Delta P}{P}\right|}=\left|\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right| \qquad (12.9)$$

- რადგან, მოთხოვნის $Q=g_D(P)$ ფუნქცია არის კლებადია და ფასის ზრდას $(\Delta P>0)$ მოსდევს მოთხოვნის შემცირება $(\Delta Q<0)$ და პირიქით, ფასის შემცირებას $(\Delta P<0)$ მოსდევს მოთხოვნის ზრდა $(\Delta Q>0)$ ამიტომ,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P}<0$$

- ამასთან, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარეობს, რომ $P>0$ და $Q>0$.
- ამიტომ, **ფასის ΔP ნაზრდის მიმართ, მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობის** ფორმულაში მოდულის ნიშნებში მოთავსებული გამოსახულება ყოველთვის უარყოფითია.
- ეს კი, საშუალებას გვაძლევს $E(\,Q;P;\Delta P\,)$ სიდიდე წარმოვიდგინოთ მოდულის გარეშე, შემდეგი სახით:

$$E(\,Q;P;\Delta P\,)=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P} \qquad (12.10)$$

- (12.10) ფორმულაში $\left[E(Q;P;\Delta P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right]$ იგულისხმება, რომ Q და P სიდიდეები ერთმანეთთან დაკავშირებულია მოთხოვნის $Q = g_D(P)$ ფუნქციონალური დამოკიდებულებით.
- ამიტომ, შეგვიძლია P ფასი განვიხილოთ დამოუკიდებელ ცვლადად და გადავიდეთ ზღვარზე (12.10) $\left[E(Q;P;\Delta P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right]$ ტოლობაში, როდესაც $\Delta P \to 0$.
- ამის შედეგად მივიღებ $E(Q;P)$ სიდიდეს, რომელსაც ეწოდება **მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ:**

$$E(Q;P) = \lim_{\Delta P\to 0} E(Q;P;\Delta P) = -\frac{P}{Q}\lim_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta P} = -\frac{P}{Q}\cdot g'_D(P) \qquad (12.11)$$

- შევნიშნოთ, რომ მოთხოვნის $E(Q;P)$ ელასტიკურობა მიახლოებით გვიჩვენებს, თუ როგორ იცვლება Q მოთხოვნა P ფასის **1**%-ით შეცვლისას.
- **შენიშვნა** 1. თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია $P = f_D(Q)$ ფორმით და ამ ტოლობიდან f_D ფუნქციის სირთულის გამო ძნელია Q ცვლადის გამოსახვა P - ს საშუალებით, მაშინ (12.11) ფორმულის ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ ალტერნატიული ფორმულა, რომელიც კვლავ (12.10) ფორმულიდან მიიღება:

$$E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{f'_D(Q)} \qquad (12.12)$$

- ახლა გამოვიკვლიოთ, მოთხოვნის ელასტიკურობის გამოყენებით, როგორ არის დამოკიდებული **მთლიანი შემოსავალი** (ამონაგები) **ფასის ცვლილებაზე.**

- ვთქვათ, მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია $Q = g_D(P)$ სახით, სადაც $g_D(P)$ კლებადი ფუნქციაა.

➢ მაშინ მთლიანი შემოსავალი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$(TR) = P \cdot Q = P \cdot g_D(P)$$

➢ გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის წარმოებული P არგუმენტით

$$(TR)' = \left(P \cdot g_D(P)\right)' = P' \cdot g_D(P) + P \cdot g'_D(P) = 1 \cdot g_D(P) + P \cdot g'_D(P) = g_D(P) \cdot \left(1 + \frac{P}{g_D(P)} \cdot g'_D(P)\right)$$

შესაბამისად, გვექნება:

$$(TR)' = Q \cdot \left[1 + \frac{P}{Q} \cdot g'_D(P)\right]$$

ფასის მიმართ მოთხოვნის ელასტიკურობის (12.11) ფორმულის $\left[E(Q;P) = -\frac{P}{Q} \cdot g'_D(P)\right]$ გათვალისწინებით ეს უკანასკნელი გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$(TR)' = Q \cdot [1 - E(Q;P)]$$

აქედან, ცხადია, რომ

- როცა $E(Q;P) > 1$, ანუ მოთხოვნა **ელასტიკურია** P ფასის მიმართ, $(TR)' < 0$ და ამ შემთხვევაში (TR) მთლიანი შემოსავლის ფუნქცია P ფასის **კლებადი** ფუნქციაა;
- როცა $E(Q;P) < 1$, ანუ მოთხოვნა **არაელასტიკურია** P ფასის მიმართ, $(TR)' > 0$ და ამ შემთხვევაში (TR) მთლიანი შემოსავლის ფუნქცია P ფასის **ზრდადი** ფუნქციაა;
- როცა $E(Q;P) = 1$, ანუ მოთხოვნას აქვს **ერთეულოვანი ელასტიკურობა** P ფასის მიმართ, $(TR)' = 0$ და ამ შემთხვევაში P ფასის მცირე ცვლილება თითქმის **არ ცვლის** (TR) მთლიანი შემოსავლის ფუნქციას.

- ამრიგად:

- $E(Q;P) > 1$, ანუ მოთხოვნა **ელასტიკურია** P ფასის მიმართ, მაშინ:
  - P ფასის **გაზრდას**, ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) შემცირებას, მოსდევს (TR) **მთლიანი შემოსავლის კლება,**
  - ხოლო P ფასის **შემცირებას,** ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) გაზრდას, მოსდევს (TR) **მთლიანი შემოსავლის ზრდა.**

- $E(Q;P) < 1$, ანუ მოთხოვნა **არაელასტიკურია** P ფასის მიმართ, მაშინ:
  - P ფასის **გაზრდას,** ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) შემცირებას, მოსდევს (TR) **შემოსავლის ზრდა,**
  - ხოლო P ფასის **შემცირებას**, ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) გაზრდას მოსდევს (TR) **შემოსავლის შემცირება.**

- $E(Q;P) = 1$, ანუ მოთხოვნას აქვს **ერთეულოვანი ელასტიკურობა** P ფასის მიმართ, მაშინ:
  - P ფასის და Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) მცირე ცვლილება ფაქტობრივად **არ იწვევს** (TR) **შემოსავლის ცვლილებას.**

- **ამოცანა 2.** ვიპოვოთ, მოთხოვნის **საშუალო ელასტიკურობა** ფასის ნაზრდის მიმართ, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = 200 - Q^2$$

და პროდუქციის ერთეულის ფასი კლებულობს **136** დოლარიდან **133** დოლარამდე.

- გამოვთვალოთ **ზღვრული ელასტიკურობა,** როდესაც ფასია **136** დოლარი.
- გავაანალიზოთ მიღებული შედეგი.

- **ამოხსნა:** ამოცანის პირობის გამოყენებით, გამოვსახოთ Q მოთხოვნა P ფასის საშუალებით

$$Q^2 = 200 - P$$

- რადგან, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე Q დადებითი სიდიდეა, ამიტომ გვექნება:

$$Q = g_D(P) = \sqrt{200 - P}$$

- ცხადია, როცა $P = 136,$ მაშინ $Q = g_D(136) = \sqrt{200 - 136} = \sqrt{64} = 8$.
- ჩვენ შემთხვევაში $\Delta P = 133 - 136 = -3$.
- $Q = g_D(P)$ ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდი იქნება:

$$\Delta Q = g_D(133) - g_D(136) = \sqrt{200 - 133} - \sqrt{200 - 136} =$$

$$= \sqrt{67} - \sqrt{64} = 8,1854 - 8 = 0,1854 .$$

- **მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობის** (12.10) ფორმულით $\left[E(Q; P; \Delta P) = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P} \right]$ გვექნება:

$$E(Q; P; \Delta P) = E(8; 136; -3) = -\frac{136}{8} \cdot \frac{0,1854}{-3} = \frac{25,2144}{24} = 1,0506$$

- **მოთხოვნის ელასტიკურობა ფასის მიმართ** (12.11) ფორმულით $\left[E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\cdot g'_D(P)\right]$, მივიღებთ:

$$E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\cdot g'_D(P) = -\frac{P}{Q}\cdot\left(\sqrt{200-P}\right)' = -\frac{P(200-P)'}{2Q\sqrt{200-P}} = \frac{P}{2Q\sqrt{200-P}}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ როცა $P = 136,$ მაშინ $Q = 8$. მივიღებთ:

$$E(Q;P) = \frac{P}{2Q\sqrt{200-P}} = \frac{136}{16\sqrt{200-136}} = \frac{136}{16\cdot 8} = \frac{136}{128} = 1,0625\,.$$

- **როგორც ვიცით:**
  - $E(Q;P) > 1$, ანუ მოთხოვნა **ელასტიკურია** P ფასის მიმართ, მაშინ:
    - P ფასის **გაზრდას**, ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) შემცირებას, მოსდევს (TR) **მთლიანი შემოსავლის კლება**,
    - ხოლო P ფასის **შემცირებას,** ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) გაზრდას, მოსდევს (TR) **მთლიანი შემოსავლის ზრდა.**

- რადგან ელასტიკურობა ფასის მიმართ **1** -ზე მეტია, ამიტომ Q მოთხოვნა **ელასტიკურია** P ფასის მიმართ, ხოლო (TR) მთლიანი შემოსავალი კლებადია P ფასის მიმართ.

- ამრიგად, P **ფასის შემცირებას 136** დოლარიდან **133** დოლარამდე ბუნებრივად მოსდევს Q მოთხოვნის ზრდა. თავის მხრივ, ეს იწვევს (TR) **მთლიანი შემოსავლის ზრდას.**

- **ამოცანა 3.** ვიპოვოთ, მოთხოვნის **საშუალო ელასტიკურობა** ფასის ნაზრდის მიმართ, თუ მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = 400 - 2Q^2$$

და პროდუქციის ერთეულის ფასი იზრდება **112** ლარიდან **115** ლარამდე.

  - გამოვთვალოთ **მოთხოვნის ელასტიკურობა,** როდესაც ფასია **112** ლარი.
  - გავაანალიზოთ მიღებული შედეგი.

- **ამოხსნა:** ამოცანის პირობის გამოყენებით, გამოვსახოთ Q მოთხოვნა P ფასის საშუალებით

$$2Q^2 = 400 - P \quad \text{აქედან,} \quad Q^2 = 200 - 0,5P$$

- რადგან, ეკონომიკური შინაარსიდან გამომდინარე Q დადებითი სიდიდეა, ამიტომ გვექნება:

$$Q = g_D(P) = \sqrt{200 - 0,5P}$$

- ცხადია, როცა $P = 112,$ მაშინ $Q = g_D(112) = \sqrt{200 - 0,5 \cdot 112} = \sqrt{200 - 56} = \sqrt{144} = 12$.
- ჩვენ შემთხვევაში $\Delta P = 115 - 112 = 3$.
- $Q = g_D(P)$ ფუნქციის შესაბამისი ნაზრდი იქნება:

$$\Delta Q = g_D(115) - g_D(112) = \sqrt{200 - 0,5 \cdot 115} - \sqrt{200 - 0,5 \cdot 112} = 11,937 - 12 = -0,063.$$

$$= \sqrt{67} - \sqrt{64} = 8,1854 - 8 = 0,1854 .$$

- **მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობის** (12.10) ფორმულით $\left[E(\,Q; P; \Delta P\,) = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{\Delta Q}{\Delta P} \right]$ გვექნება:

$$E(\,Q; P; \Delta P\,) = E(\,12; 112;\ 3\,) = -\frac{112}{12} \cdot \frac{-0,063}{3} = 0,196$$

- გამოვთვალოთ **მოთხოვნის ელასტიკურობა** (12.12) ფორმულით $\left[E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{f'_D(Q)}\right]$, მივიღებთ:

$$E(Q;P) = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{f'_D(Q)} = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{(400-2Q^2)'} = -\frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{-4Q} = \frac{P}{4Q^2}$$

- თუ გავითვალისწინებთ, რომ როცა $P = 112,$ მაშინ $Q = 12$. მივიღებთ:

$$E(Q;P) = \frac{P}{4Q^2} = \frac{112}{4\cdot 12^2} = \frac{112}{4\cdot 144} = \frac{136}{128} = 0,194\ .$$

- **როგორც ვიცით:**

- $E(Q;P) < 1$, ანუ მოთხოვნა **არაელასტიკურია** P ფასის მიმართ, მაშინ:
  - P ფასის **გაზრდას,** ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) შემცირებას, მოსდევს (TR) **შემოსავლის ზრდა,**
  - ხოლო P ფასის **შემცირებას**, ანუ Q მოთხოვნის (გაყიდული პროდუქციის რაოდენობის) გაზრდას მოსდევს (TR) **შემოსავლის შემცირება.**

- რადგან ელასტიკურობა ფასის მიმართ **1** -ზე ნაკლებია, ამიტომ Q მოთხოვნა **არაელასტიკურია** P ფასის მიმართ, ხოლო (TR) მთლიანი შემოსავალი P ფასის მიმართ **ზრდადი** ფუნქციაა.

- ხოლო, P **ფასის გაზრდას 112** ლარიდან **115** დოლარამდე ბუნებრივად მოსდევს Q მოთხოვნის კლება. თავის მხრივ, ეს იწვევს (TR) **მთლიანი შემოსავლის ზრდას.**

- სრულიად ანალოგიურად განიმარტება **მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა** ფასის ΔP ნაზრდის მიმართ:

- **მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა ფასის ΔP ნაზრდის მიმართ ეწოდება სიდიდეს:**

$$E(Q;P;\Delta P) = \frac{Q - \text{მიწოდების ფარდობითი ნაზრდი}}{P - \text{ფასის ფარდობითი ნაზრდი}} = \frac{\left|\frac{\Delta Q}{Q}\right|}{\left|\frac{\Delta P}{P}\right|} = \left|\frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P}\right| \qquad (12.13)$$

- რადგან მიწოდების $Q = g_S(P)$ ფუნქცია ზრდადია P არგუმენტის მიმართ, ამიტომ

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P} > 0$$

- ეს კი იმას ნიშნავს, რომ (12.13) ფორმულა მოდულის გარეშე ასე ჩაიწერება:

$$E(Q;P;\Delta P) = \frac{P}{Q}\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta P} \qquad (12.14)$$

- თუ ვიგულისხმებთ, რომ $Q = g_S(P)$ მიწოდების ფუნქცია წარმოებადია და (12.14) ფორმულაში გადავალთ ზღვარში, $\Delta P \to 0$, მივიღებთ სიდიდეს, რომელსაც **ეწოდება მიწოდების ელასტიკურობა ფასის მიმართ**:

$$E(Q;P) = \lim_{\Delta P\to 0} E(Q;P;\Delta P) = \frac{P}{Q}\cdot g'_S(P) \qquad (12.15)$$

- **შენიშვნა 2.** თუ მიწოდების ფუნქცია მოცემულია $P = f_S(Q)$ სახით, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ალტერნატიული ფორმულა მიწოდების ელასტიკურობის გამოსათვლელად ფასის მიმართ:

$$E(Q;P) = \frac{P}{Q}\cdot\frac{1}{f'_S(Q)}.$$