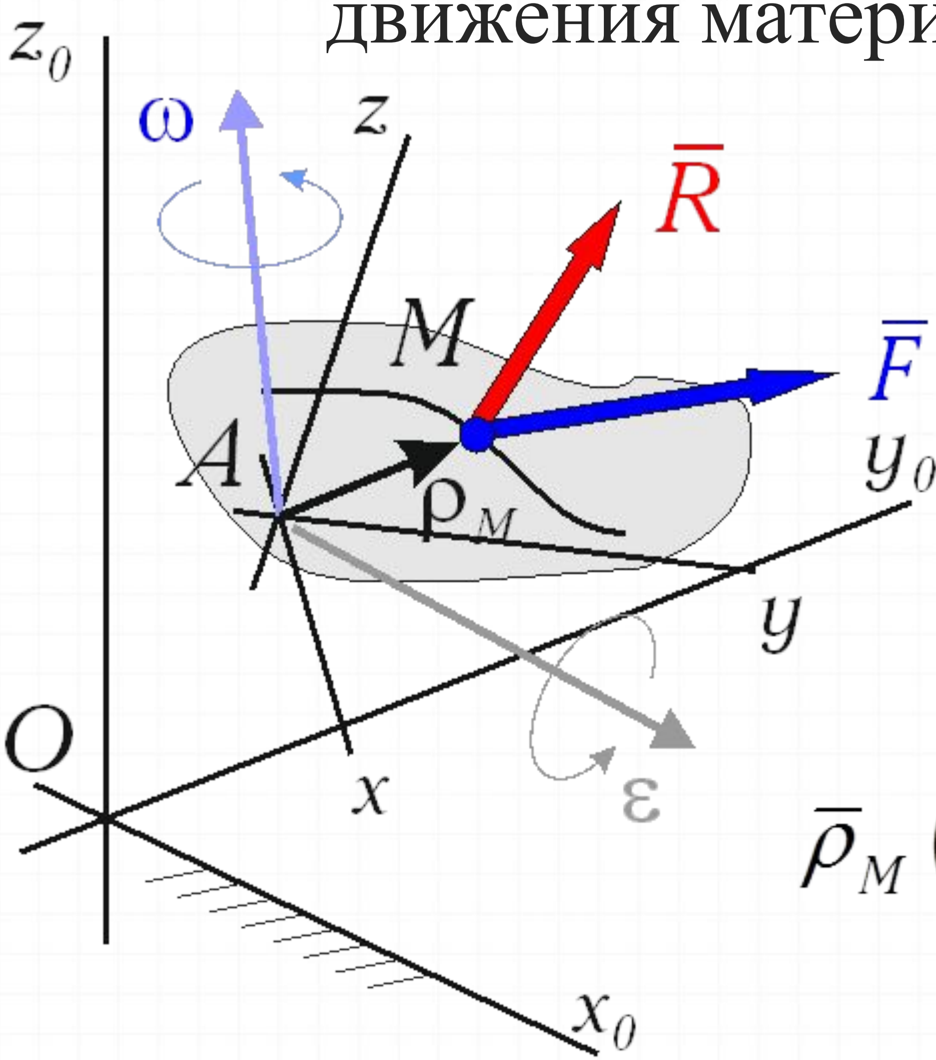
Динамика относительного движения материальной точки

Лекция 3

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки



$$\overline{F} = \overline{F}\left(t, \overline{\rho}_M, \dot{\overline{\rho}}_M\right)$$

$$\begin{cases} \overline{r}_A = \overline{r}_A(t); \\ \overline{\omega} = \overline{\omega}(t); \\ \overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}(t). \end{cases}$$

$$\overline{\rho}_M(t) = ?$$

$$\begin{cases} x_M(t) = ? \\ y_M(t) = ? \\ z_M(t) = ? \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

$$Ox_0y_0z_0$$

$$m\bar{w} = \bar{F} + \bar{R}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_e + \bar{w}_c$$

$$Axyz$$

Силы инерции

$$\bar{\Phi}_e = -m\bar{w}_e$$ Переносная

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{w}_c$$ Кориолисова

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c$$

Причины относительного движения

$$m\bar{w}_r = \boxed{\bar{F} + \bar{R}} + \boxed{\bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c}$$

Силовая:
действие активных сил и реакций связей

Кинематическая:
Движение подвижной системы отсчета

Движение в подвижной системе отсчета может происходить в отсутствие активных сил

Частные случаи относительного движения

1 Переносное движение –
вращение вокруг неподвижной оси

$$\bar{w}_e = \bar{w}_e^{ц} + \bar{w}_e^{вр} \longrightarrow \bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^{ц} + \bar{\Phi}_e^{вр}$$

Центробежная сила инерции

$$\bar{\Phi}_e^{ц} = -m\bar{w}_e^{ц} = -m\bar{\omega}_e \times \left(\bar{\omega}_e \times \bar{\rho}_M\right)$$

Вращательная сила инерции

$$\bar{\Phi}_e^{вр} = -m\bar{w}_e^{вр} = -m\,\bar{\varepsilon}_e \times \bar{\rho}_M$$

Частные случаи относительного движения

2 Переносное движение – равномерное вращение вокруг неподвижной оси

$$\omega_e = const, \quad \varepsilon_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_e^{вр} = 0$$

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e^{ц} + \bar{\Phi}_c$$

3 Переносное движение - поступательное

$$\omega_e = 0 \quad \bar{w}_e = \bar{w}_A, \quad \bar{\Phi}_e = -m\bar{w}_A$$

$$\bar{w}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

$$m\bar{w}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e$$

Частные случаи относительного движения

4 Переносное движение – равномерное, прямолинейное поступательное движение

$$\overline{v}_e = const \quad \Rightarrow \quad \overline{w}_e = 0$$

$$m\overline{w}_r = \overline{F} + \overline{R}$$

Никакими опытами в механической системе нельзя определить покоится подвижная система отсчета или движется поступательно прямолинейно и равномерно.

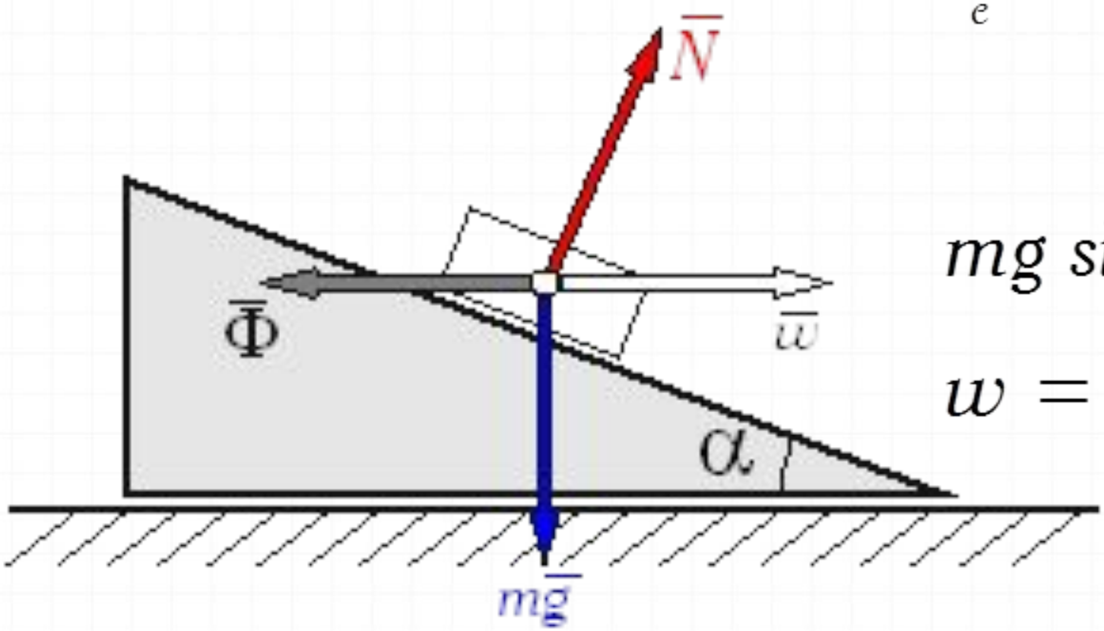
Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то инерциальной также будет любая система отсчета, которая движется относительно нее поступательно прямолинейно и равномерно

Относительный покой

$$\bar{v}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{w}_r = \dot{\bar{v}}_r = 0, \quad \bar{w}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r = 0$$

$$m\underbrace{\cancel{\bar{w}_r}}_{=0} = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \underbrace{\cancel{\bar{\Phi}_c}}_{=0}$$

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e = 0$$

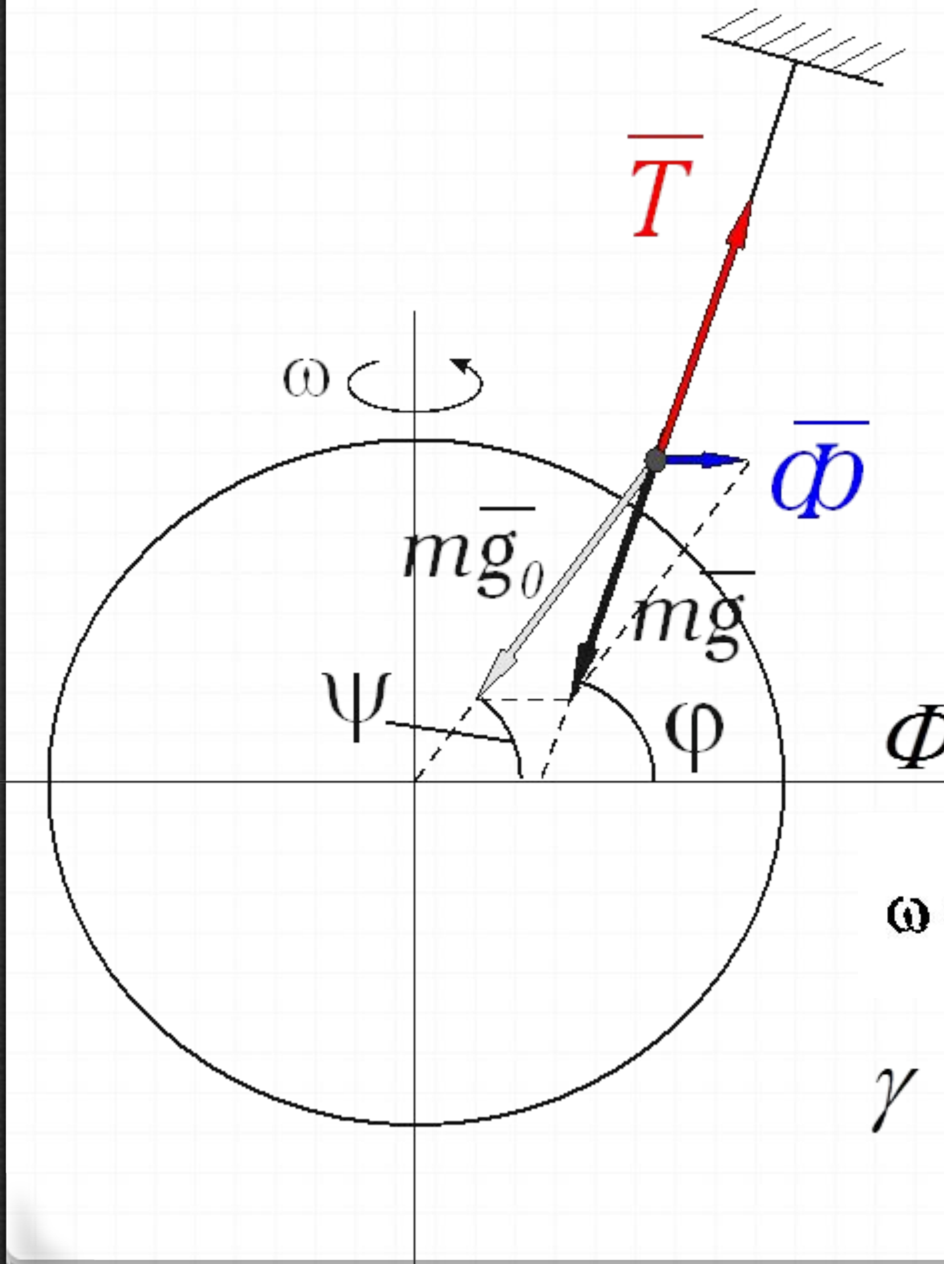


$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0$$

$$mg\sin\alpha - mw\cos\alpha = 0;$$

$$w = g\,tg\alpha$$

Сила тяжести



$$m\bar{g}_0 + \bar{T} + \bar{\Phi}_e = 0$$

$$T = mg$$

$$\Phi_e = m\omega^2 h_e = m\omega^2 R\cos\psi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \approx 0{,}0000729 \ 1/сек$$

$$\gamma = \varphi - \psi < 11'$$

Движение несвободной материальной точки

Механической связью называется любое ограничение на движение материального тела или точки.

Аксиома освобождаемости от связей:

Движение материального тела не изменится, если заменить действие связей реакциями связей.

$$m\overline{w} = \overline{F} + \overline{R}$$

$$\overline{F} = \overline{F}\left(t, \overline{r}, \dot{\overline{r}}\right) \qquad \overline{R} = ?$$

Механические связи

Если ограничения, накладываемые связями на движение точек и тел, можно описать аналитически, то соответствующие соотношения называются уравнениями связей.

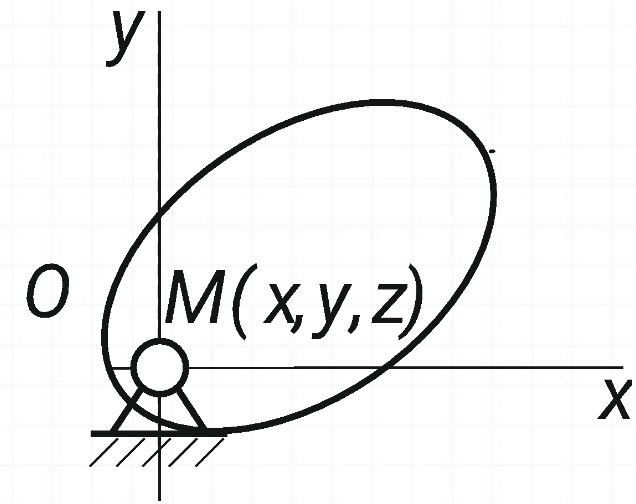
$$f\left(\bar{r}, \dot{\bar{r}}, t\right) = 0$$

$$f\left(x, \dot{x}, t\right) = 0$$

$$f_k\left(x, \dot{x}, t\right) = 0, \quad k = 1, \ldots, h$$

Классификация связей

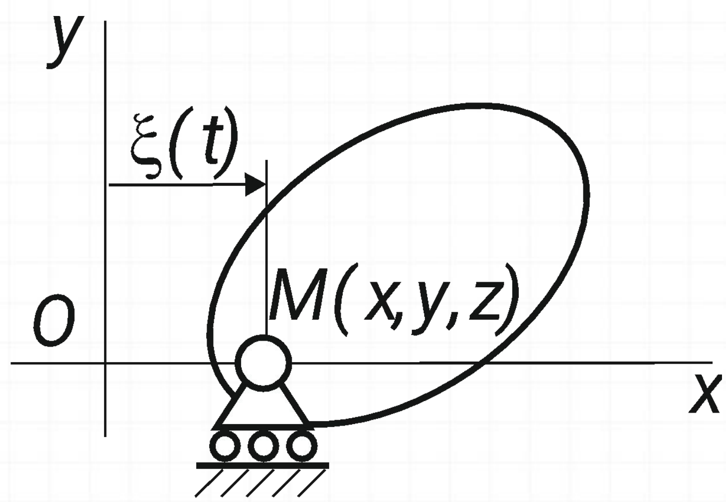
Стационарные связи



$$f\left(\overline{r},\dot{\overline{r}}\right)=0$$

$$\begin{cases} f_1\left(x,y\right)=x_M=0; \\ f_2\left(x,y\right)=y_M=0. \end{cases}$$

Нестационарные связи



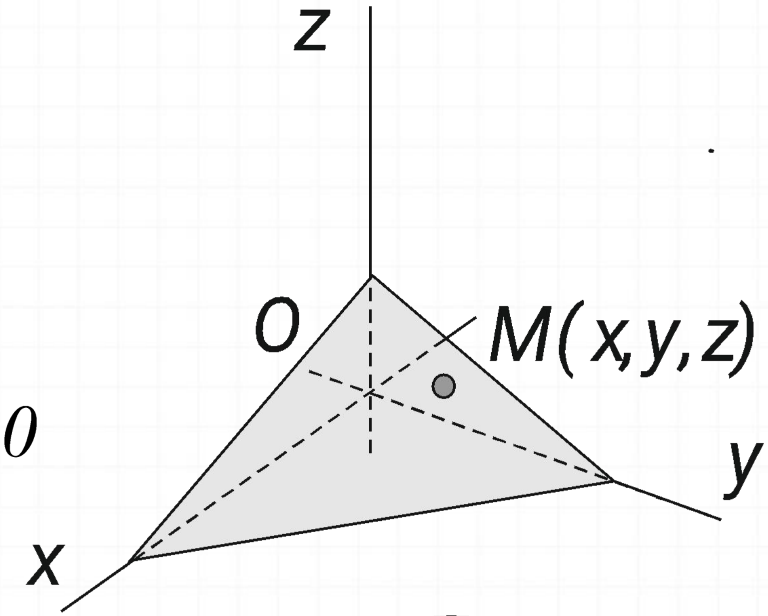
$$f\left(\overline{r},\dot{\overline{r}},t\right)=0$$

$$\begin{cases} f_1\left(x,y\right)=x_M-\xi\left(t\right)=0; \\ f_2\left(x,y\right)=y_M=0. \end{cases}$$

Классификация связей

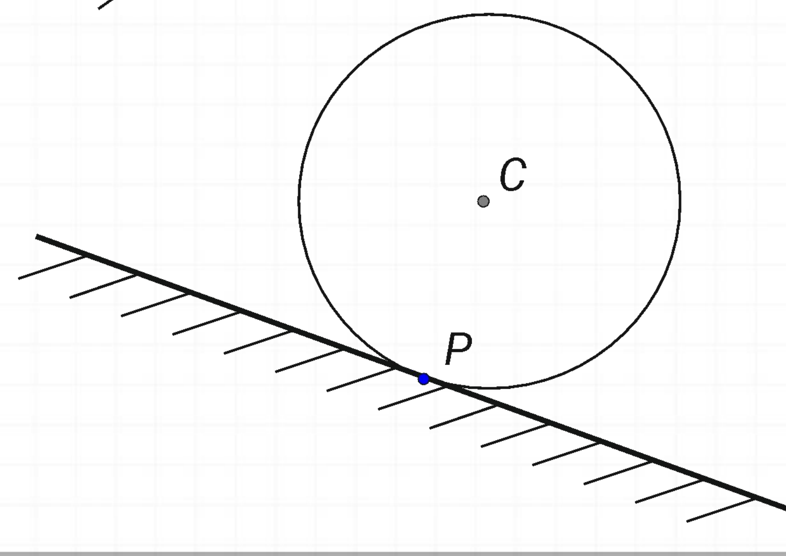
Геометрические

$$f\left(x, y, z\right) = ax + by + cz + d = 0$$

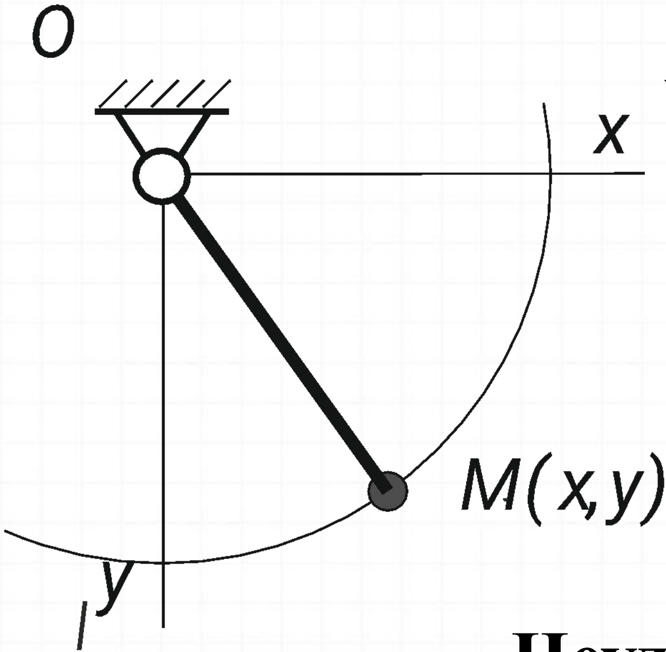


Кинематические

$$v_P = 0$$



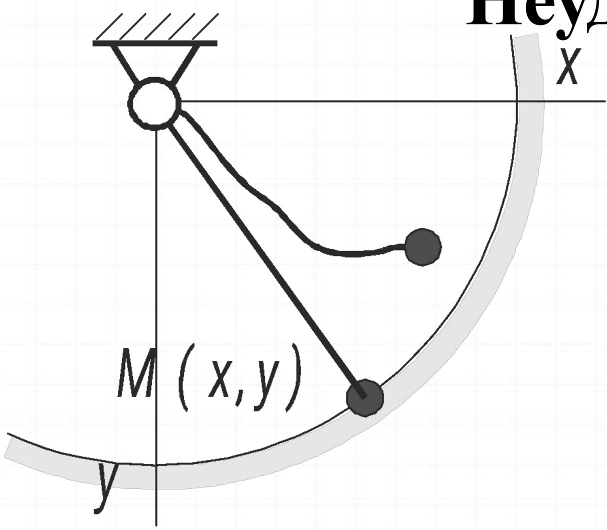
Классификация связей



Удерживающие (двухсторонние)

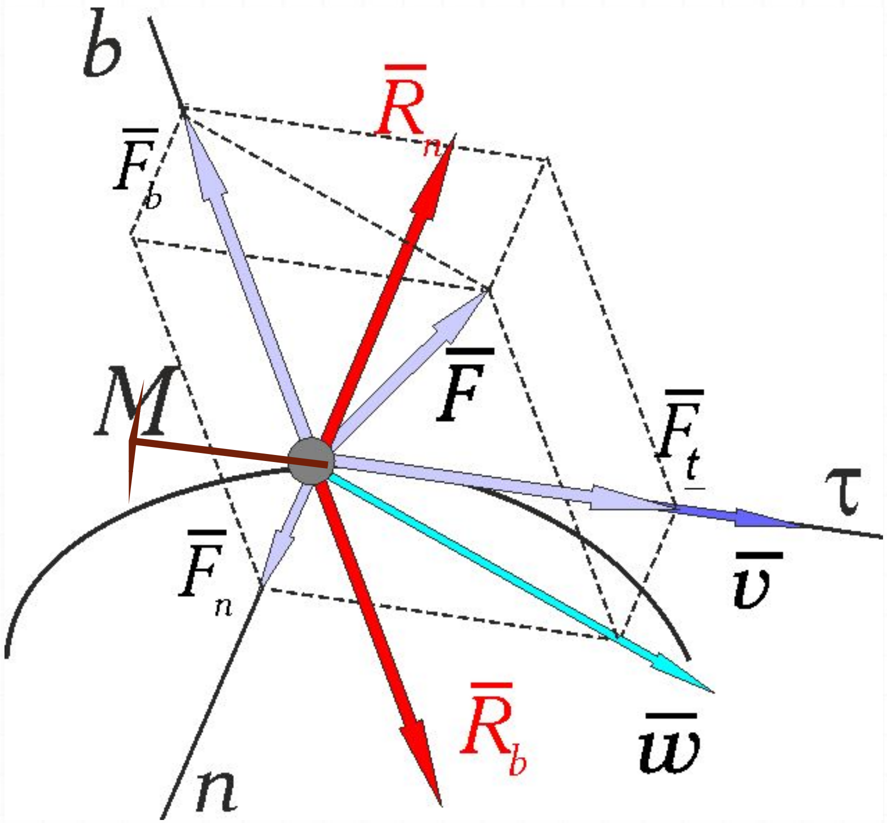
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

Неудерживающие (односторонние)



$$f(x,y) = x^2 + y^2 - l^2 \leq 0$$

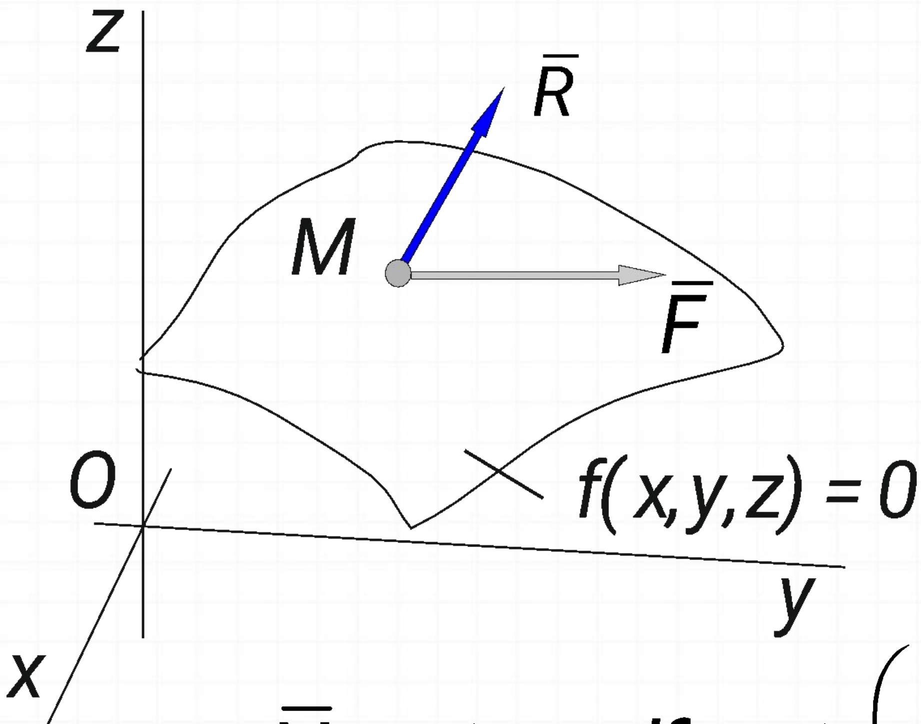
Уравнения движения точки по линии в форме Эйлера



$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, \dot{s}, s); \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n + R_n; \\ 0 = F_b + R_b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau(t, \dot{s}, s) - F_{\tau p}; \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n + R_n; \\ 0 = F_b + R_b. \end{cases}$$

Движение МТ по гладкой поверхности.



$$m\ddot{\bar{r}} = \bar{F} + \bar{N}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + N_x; \\ m\ddot{y} = F_y + N_y; \\ m\ddot{z} = F_z + N_z. \end{cases}$$

$$\bar{N} = \lambda \, grad f = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{k} \right)$$

$\lambda=\lambda(t)$ - неопределенный множитель Лагранжа

Уравнения Лагранжа первого рода

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}; \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}; \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z}; \end{cases}$$

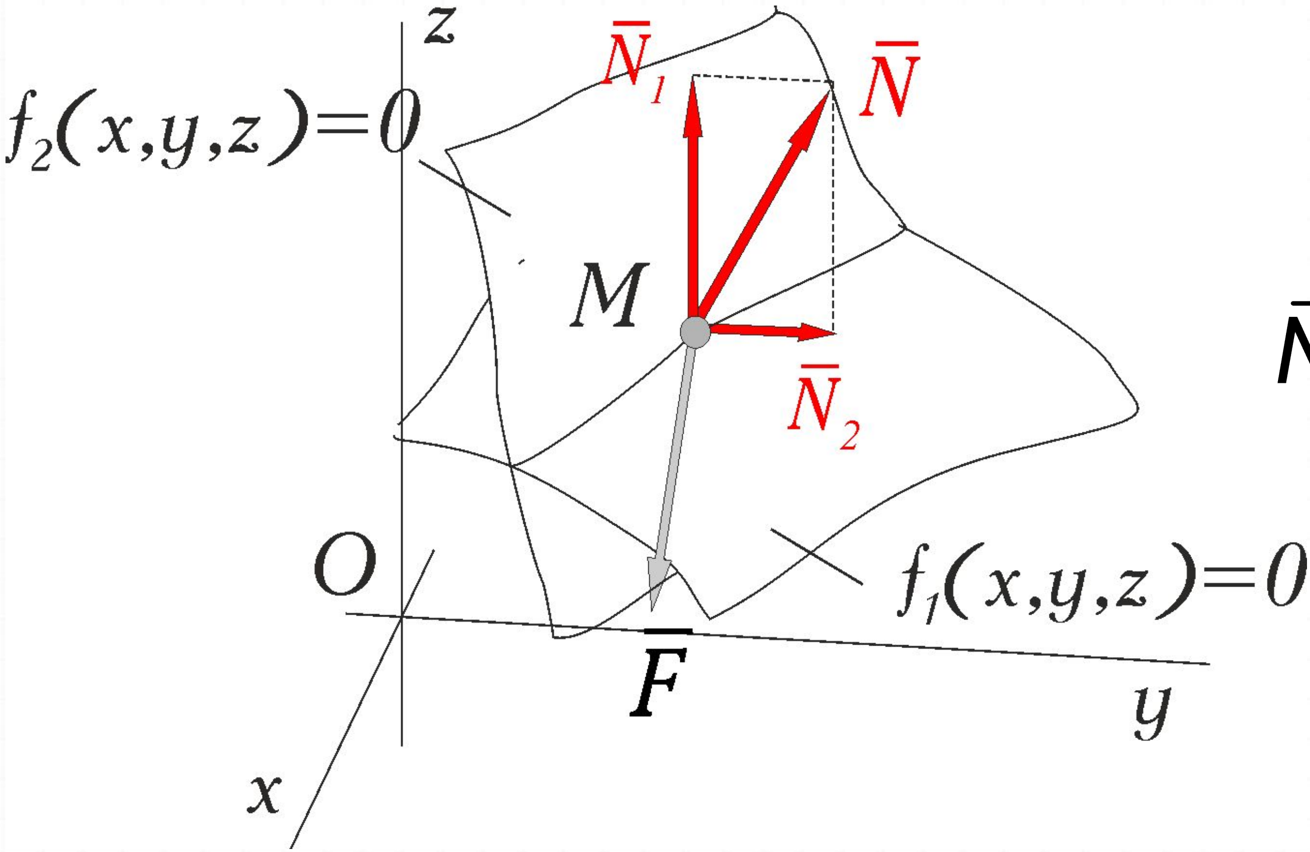
$$f\left(x, y, z\right) = 0.$$

Неизвестные функции

$x(t)\,, y(t)\,, z(t)\,, \lambda(t)$

$$\bar{N}\left(t\right) = \lambda\left(t\right) grad\, f$$

Уравнения Лагранжа первого рода при движении по линии



$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2$$

Уравнения Лагранжа первого рода при движении по линии

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x}; \\ m\ddot{y} = F_y + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y}; \\ m\ddot{z} = F_z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z}. \end{cases}$$

$$\bar{N}_1 = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 = \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \bar{k} \right);$$

$$\bar{N}_2 = \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \bar{k} \right).$$

$$f_1(x, y, z) = 0;$$

$$f_2(x, y, z) = 0.$$