

Выигрышная стратегия



Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** или **два** камня или увеличить количество камней в куче в **три** раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 46. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 46 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 45$.

Будем говорить, что игрок имеет *выигрышную стратегию*, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

1. а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть в один ход. Обоснуйте, что найдены все нужные значения S , и укажите выигрывающий ход для каждого указанного значения S .

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

1. а) Петя может выиграть, если $S = 16, \dots, 45$. Во всех этих случаях достаточно утроить количество камней. При меньших значениях S за один ход нельзя получить кучу, в которой больше 45 камней.

б) Ваня может выиграть первым ходом (как бы ни играл Петя), если исходно в куче будет $S = 15$ камней. Тогда после первого хода Пети в куче будет 16, 17 или 45 камней. Во всех случаях Ваня утраивает количество камней и выигрывает в один ход.

2. Укажите 3 таких значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход и может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Для каждого указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

2. Возможные значения S : 5, 13, 14. В этих случаях Петя, очевидно, не может выиграть первым ходом. Однако он может получить кучу из 15 камней: в первом случае утроением пяти камней, во втором – добавлением двух камней, в третьем – добавлением одного камня. Эта позиция разобрана в п. 1б. В ней игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выиграть не может, а его противник (то есть Петя) следующим ходом выиграет.

3. Укажите значение S , при котором:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы).

3. Возможное значение S : 12. После первого хода Пети в куче будет 13, 14 или 36 камней. Если в куче станет 36 камней, Ваня утроит количество камней и выиграет первым ходом. Ситуация, когда в куче 13 или 14 камней, разобрана в п. 2. В этих ситуациях игрок, который будет ходить (теперь это Ваня), выигрывает своим вторым ходом.

	Положения после очередных ходов			
Исходная позиция	1-й ход Пети (разобраны все ходы)	1-й ход Вани (только ход по стратегии)	2-й ход Пети (разобраны все ходы)	2-й ход Вани
				(только ход по стратегии)
12	$12 + 1 = \mathbf{13}$	$13 + 2 = \mathbf{15}$	$15 + 1 = \mathbf{16}$	<u>$16 * 3 = \mathbf{48}$</u>
			$15 + 2 = \mathbf{17}$	<u>$17 * 3 = \mathbf{51}$</u>
			$15 * 3 = \mathbf{45}$	<u>$45 * 3 = \mathbf{135}$</u>
	$12 + 2 = \mathbf{14}$	$14 + 1 = \mathbf{15}$	$15 + 1 = \mathbf{16}$	<u>$16 * 3 = \mathbf{48}$</u>
			$15 + 2 = \mathbf{17}$	<u>$17 * 3 = \mathbf{51}$</u>
			$15 * 3 = \mathbf{45}$	<u>$45 * 3 = \mathbf{135}$</u>
	$12 * 3 = \mathbf{36}$	<u>$36 * 3 = \mathbf{108}$</u>		

