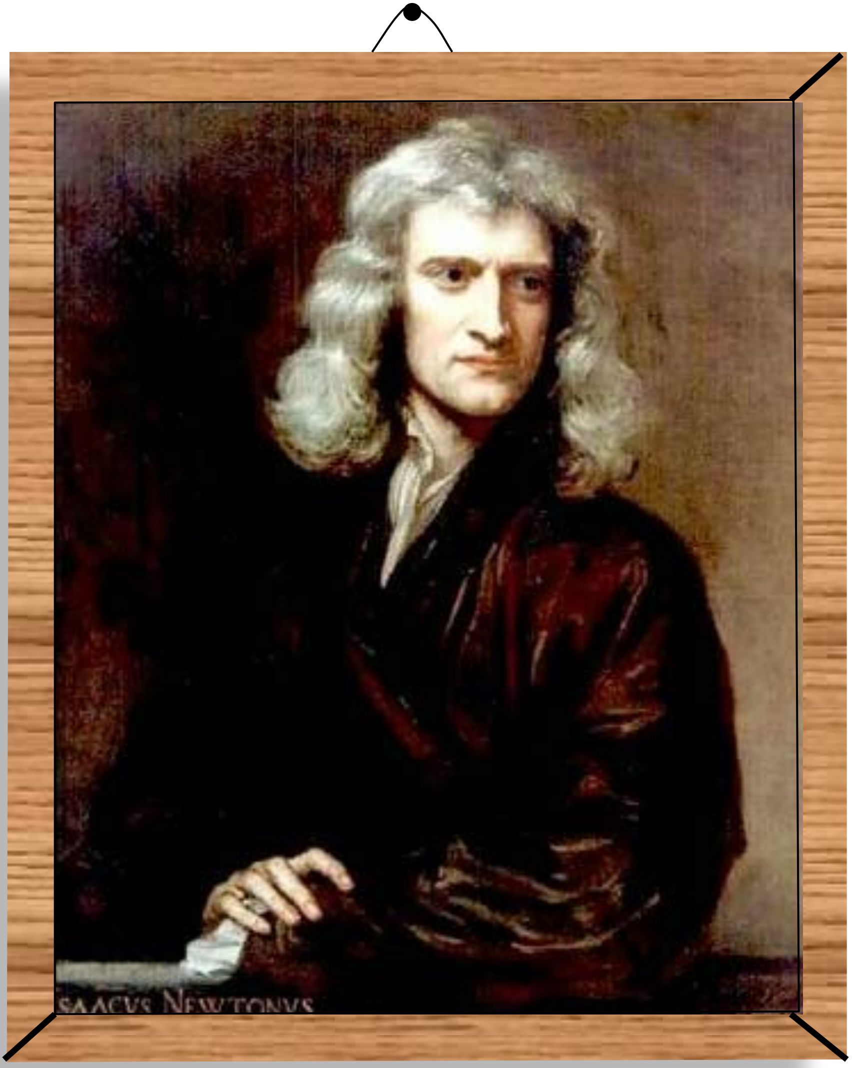
Степенная функция и ее график



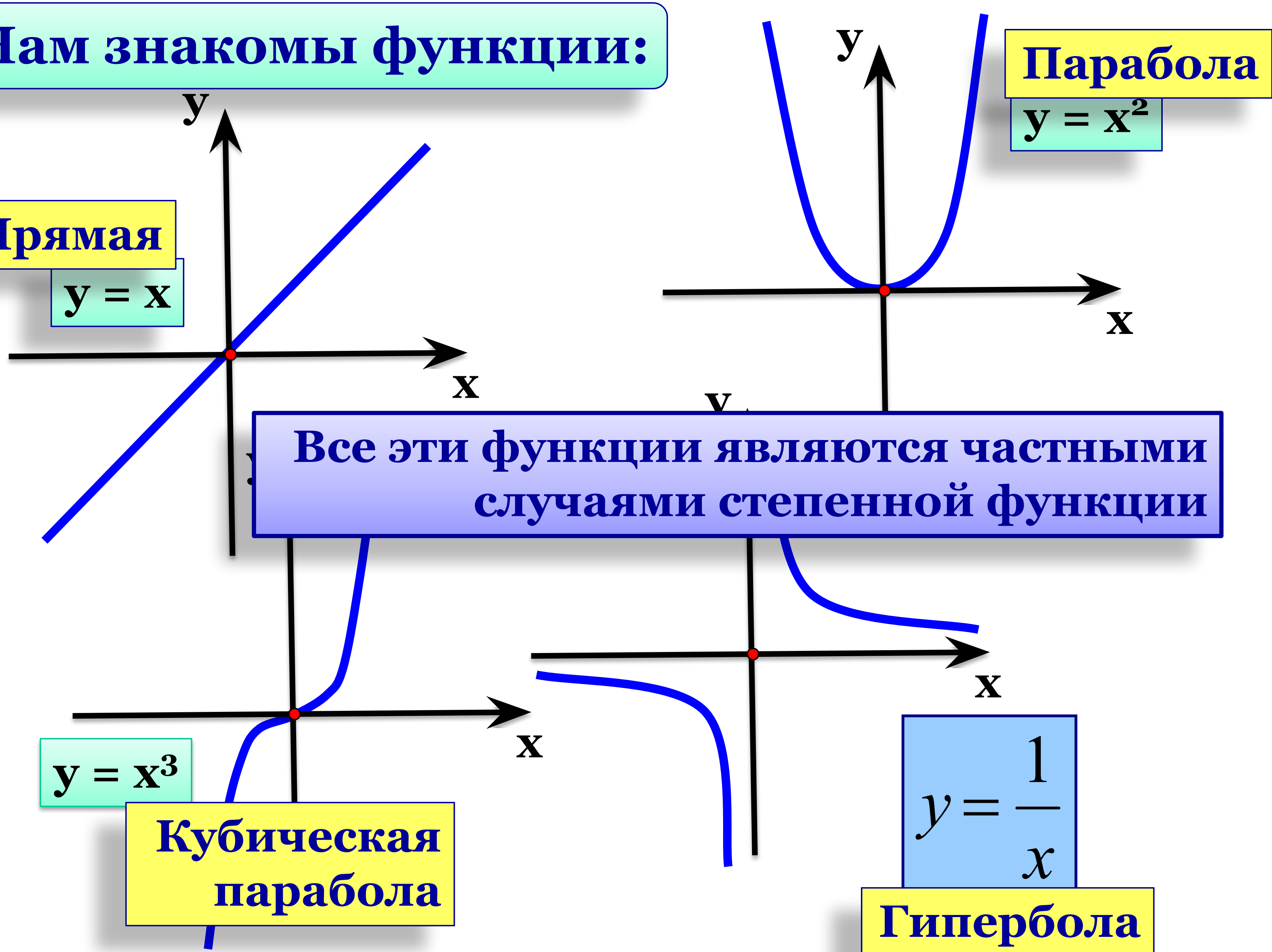
Как алгебраисты вместо АА, ААА, … пишут $А^2$, $А^3$, … так я вместо

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}$$

пишу $а^{-1}$, $а^{-2}$, $а^{-3}$, …

Ньютон И.

Нам знакомы функции:



Все эти функции являются частными случаями степенной функции

Определение:

Степенной функцией называется функция вида

$$y = x^p$$

где p – заданное действительное число

Свойства и график степенной функции зависят от свойств степени с действительным показателем, и в частности от того, при каких значениях *x и p* имеет смысл степень x^p.

Степенная функция:

Показатель $p = 2n$ – четное натуральное число $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$, …

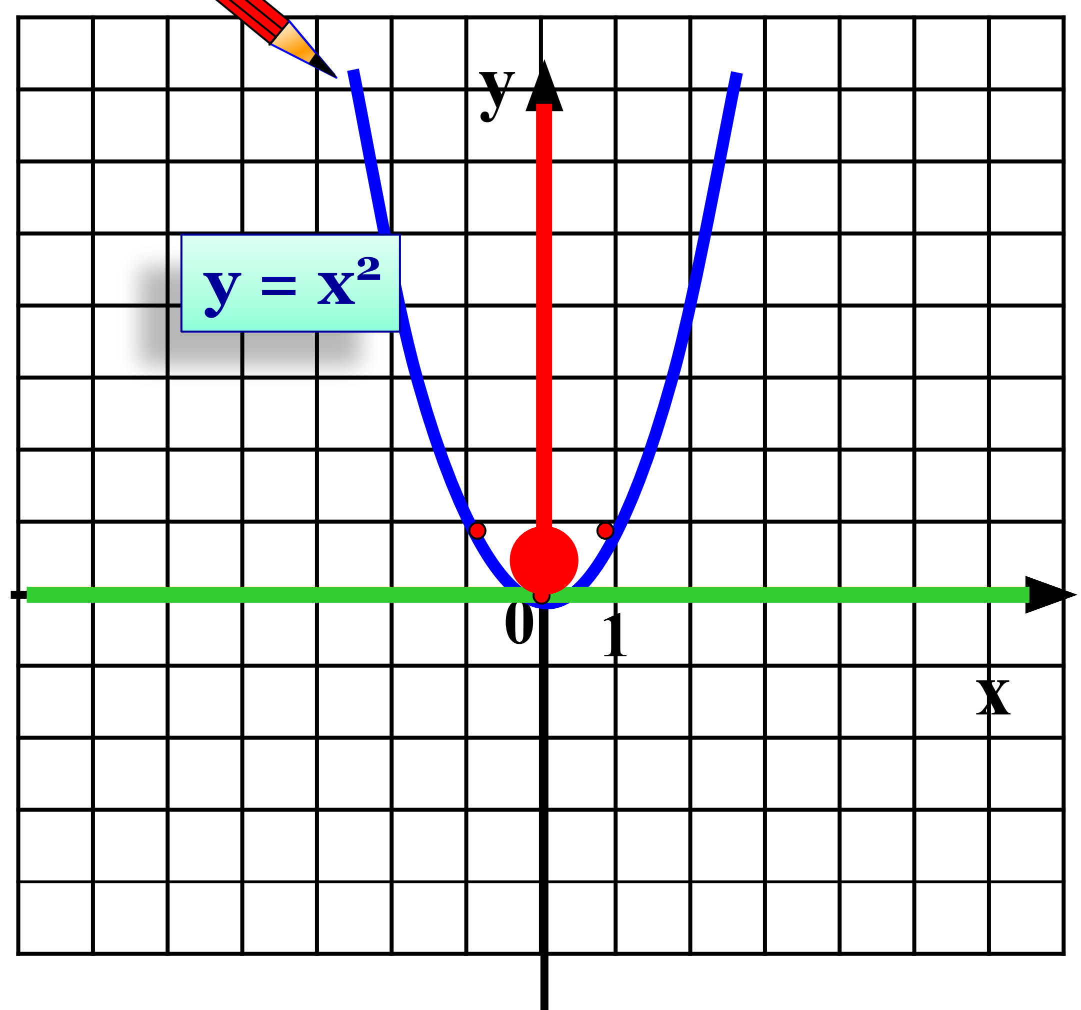
$D(y): x \in R$

$E(y):\ y \geq 0$

Функция $y = x^{2n}$ четная, т.к. $(-x)^{2n} = x^{2n}$

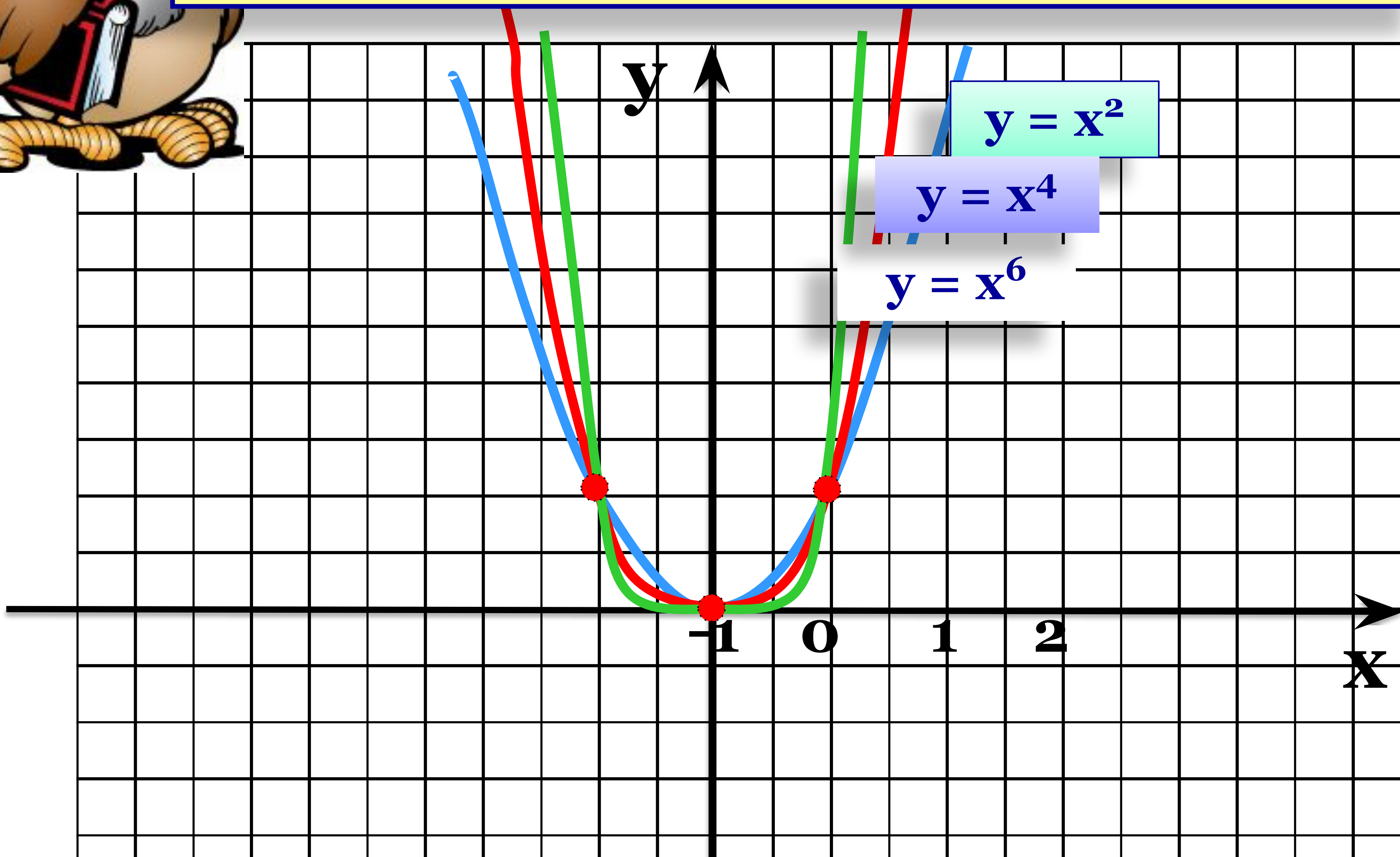
Функция убывает на промежутке $(-\infty;0]$

Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$



Степенная функция:

Показатель $p = 2n$ – четное натуральное число $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$, …



Степенная функция:

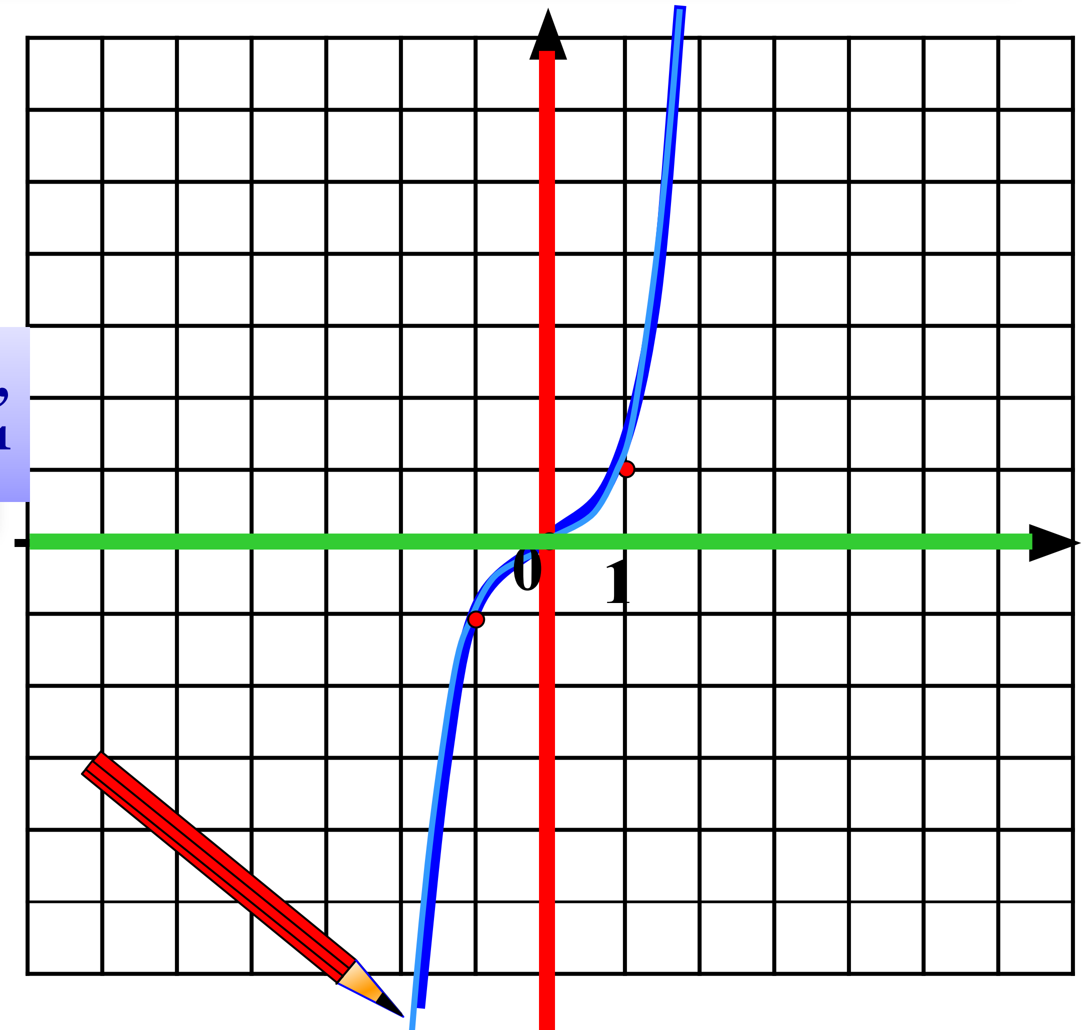
Показатель $p = 2n-1$ – нечетное натуральное число $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$, ...

$$D(y): x \in R$$

$$E(y): \ y \in R$$

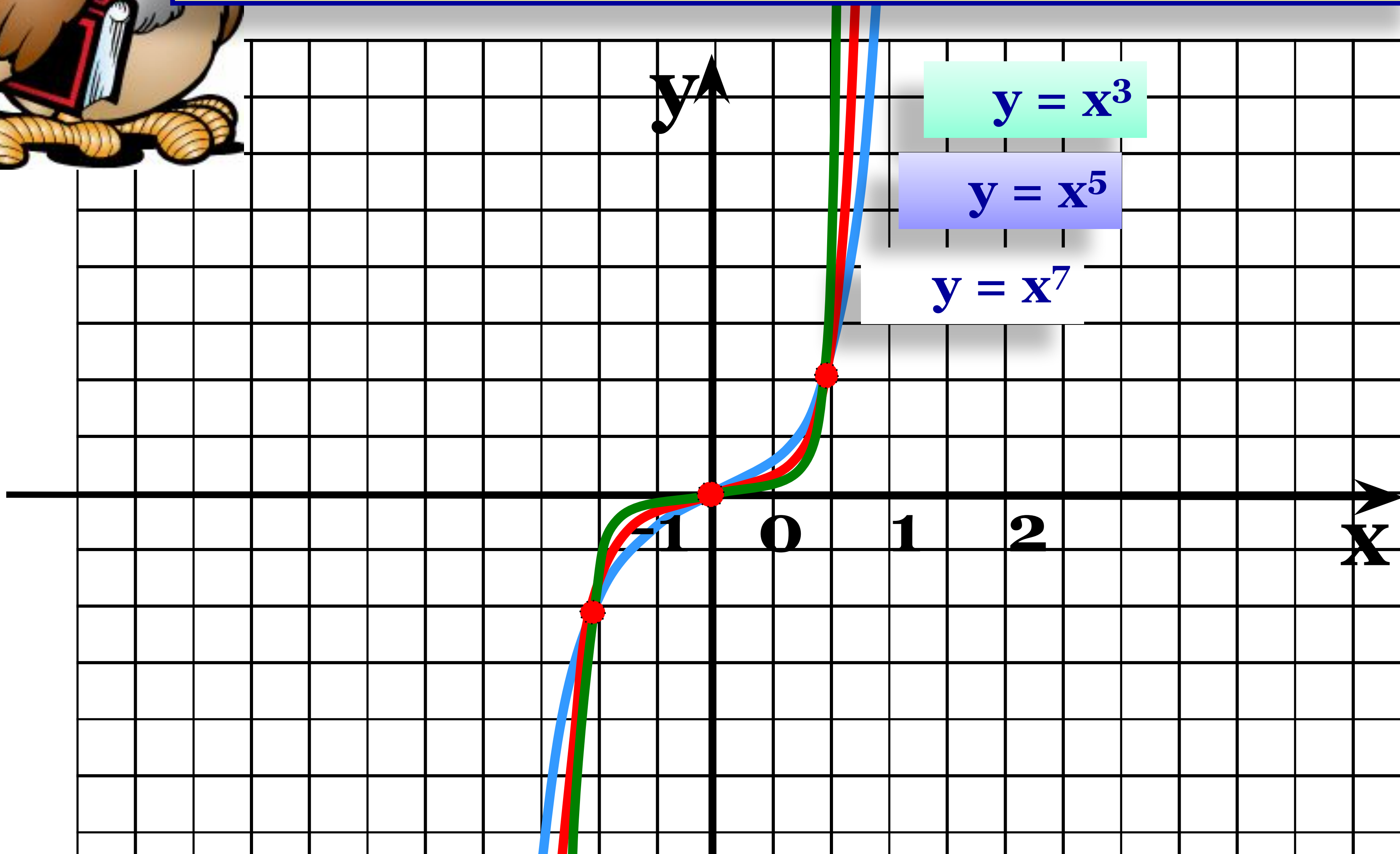
Функция $y=x^{2n-1}$ нечетная, т.к. $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$

Функция возрастает на $(-\infty;+\infty)$ промежутке



Степенная функция:

Показатель $p = 2n-1$ – нечетное натуральное число $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$, …



Степенная функция:

Показатель $p = -2n$ – где n натуральное число $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$, $y = x^{-8}$, …

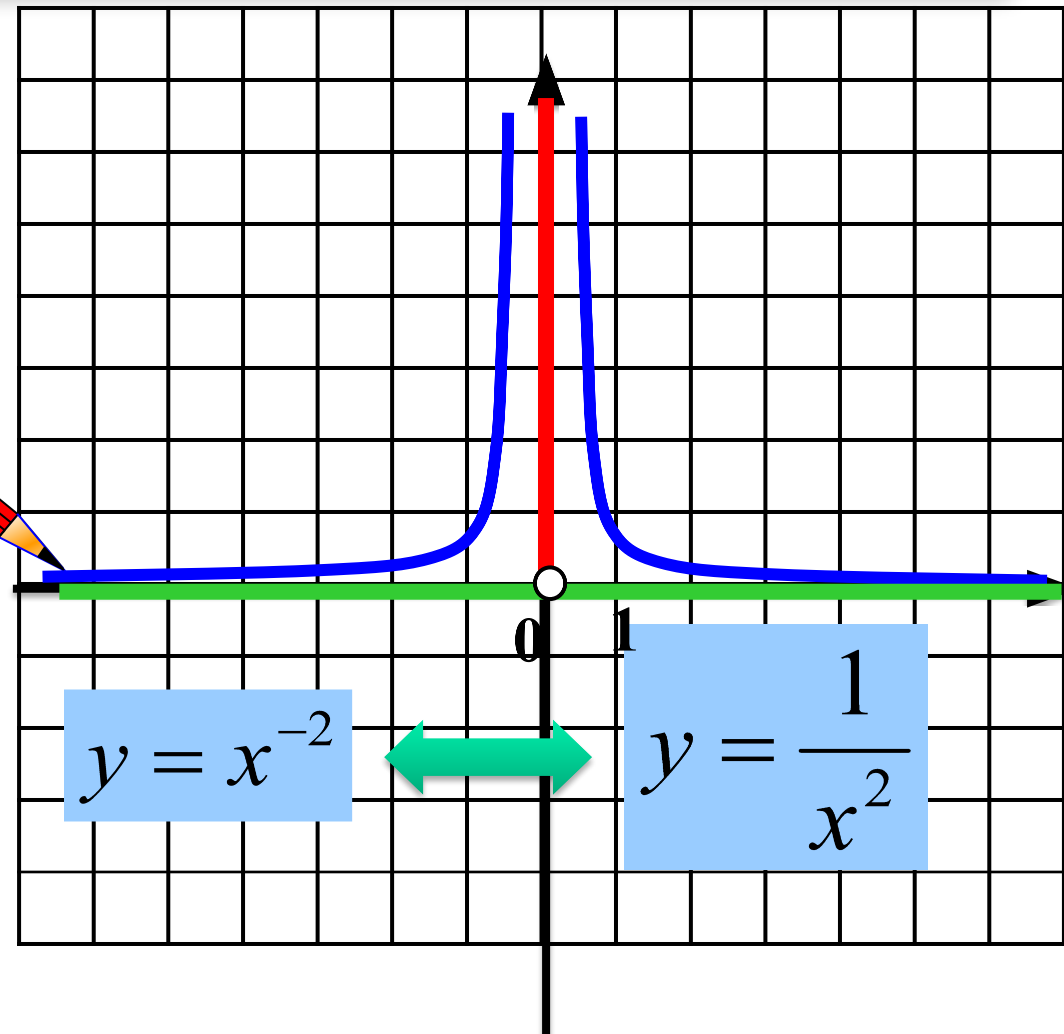
$D(y): x \neq 0$

$E(y):\ y > 0$

Функция $y=x^{-2n}$ четная, т.к. $(-x)^{-2n} = x^{-2n}$

Функция возрастает на $(-\infty;0)$ промежутке

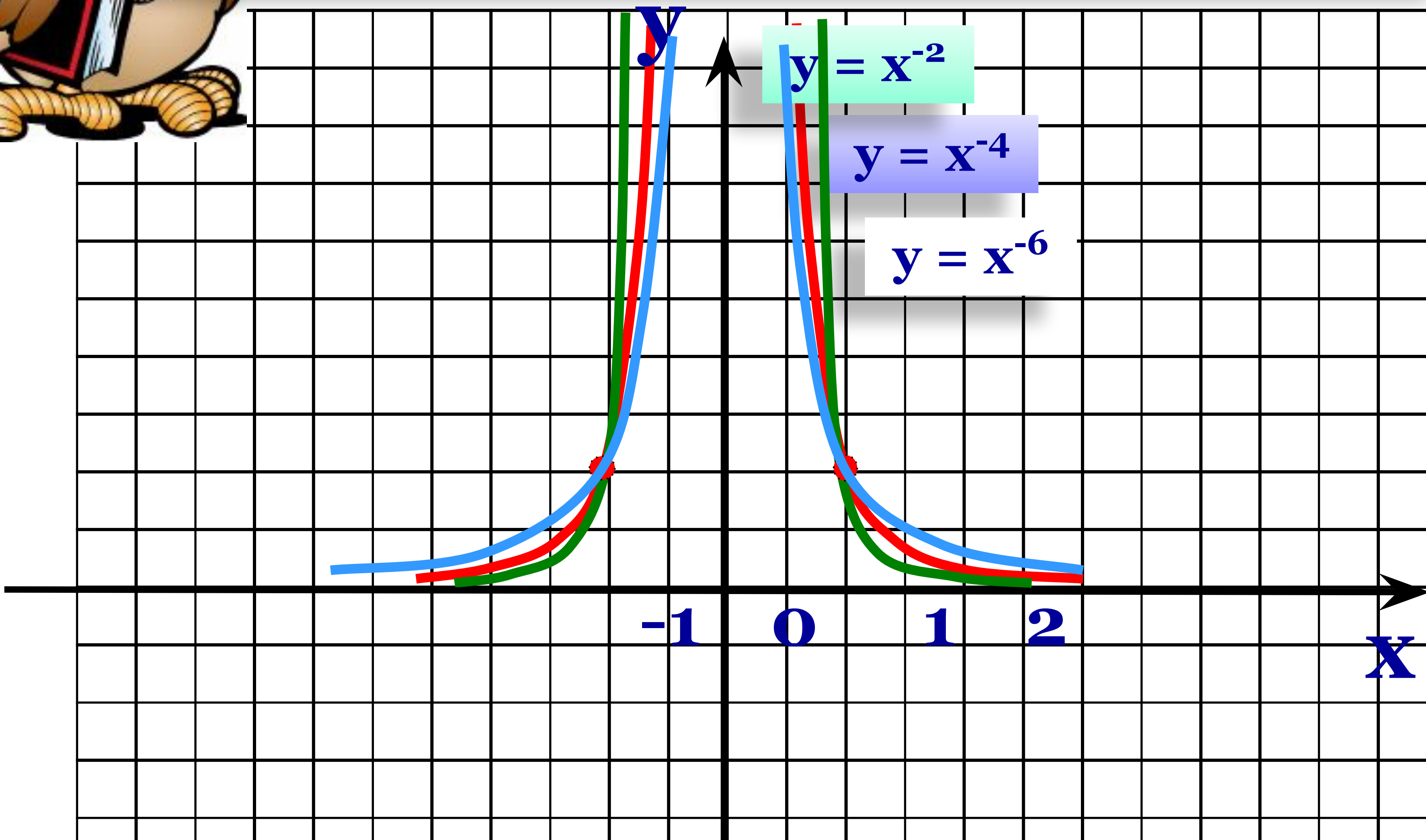
Функция убывает $(0;+\infty)$ на промежутке



$y = x^{-2} \iff y = \dfrac{1}{x^2}$

Степенная функция:

Показатель $p = -2n$ – где n натуральное число $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$, $y = x^{-8}$, …



Степенная функция:

Показатель $p = -(2n-1)$ – где n натуральное число $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, $y = x^{-7}$, $y = x^{-9}$, …

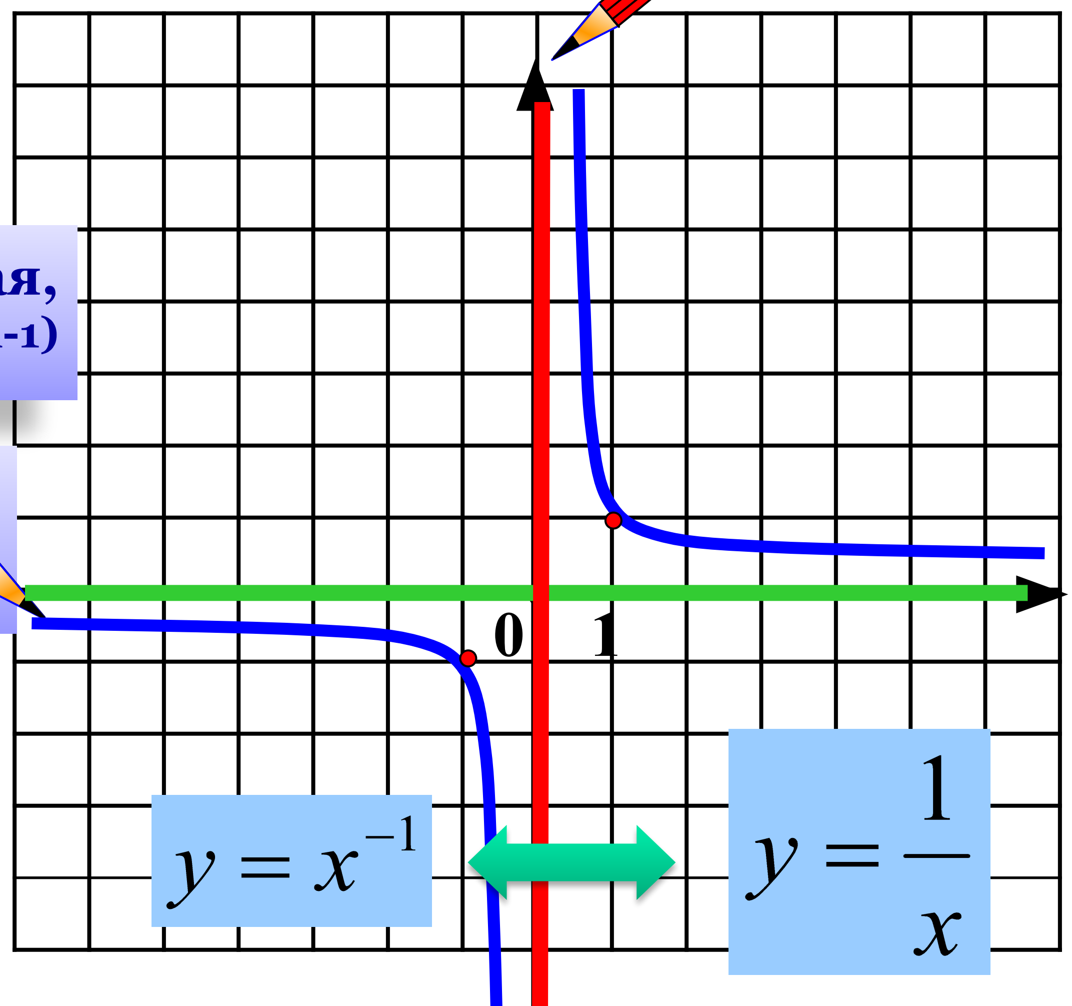
$$D(y): x \neq 0$$

$$E(y):\ y \neq 0$$

Функция $y=x^{-(2n-1)}$ нечетная, т.к. $(-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)}$

Функция убывает на промежутке $(-\infty;0)$

Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$

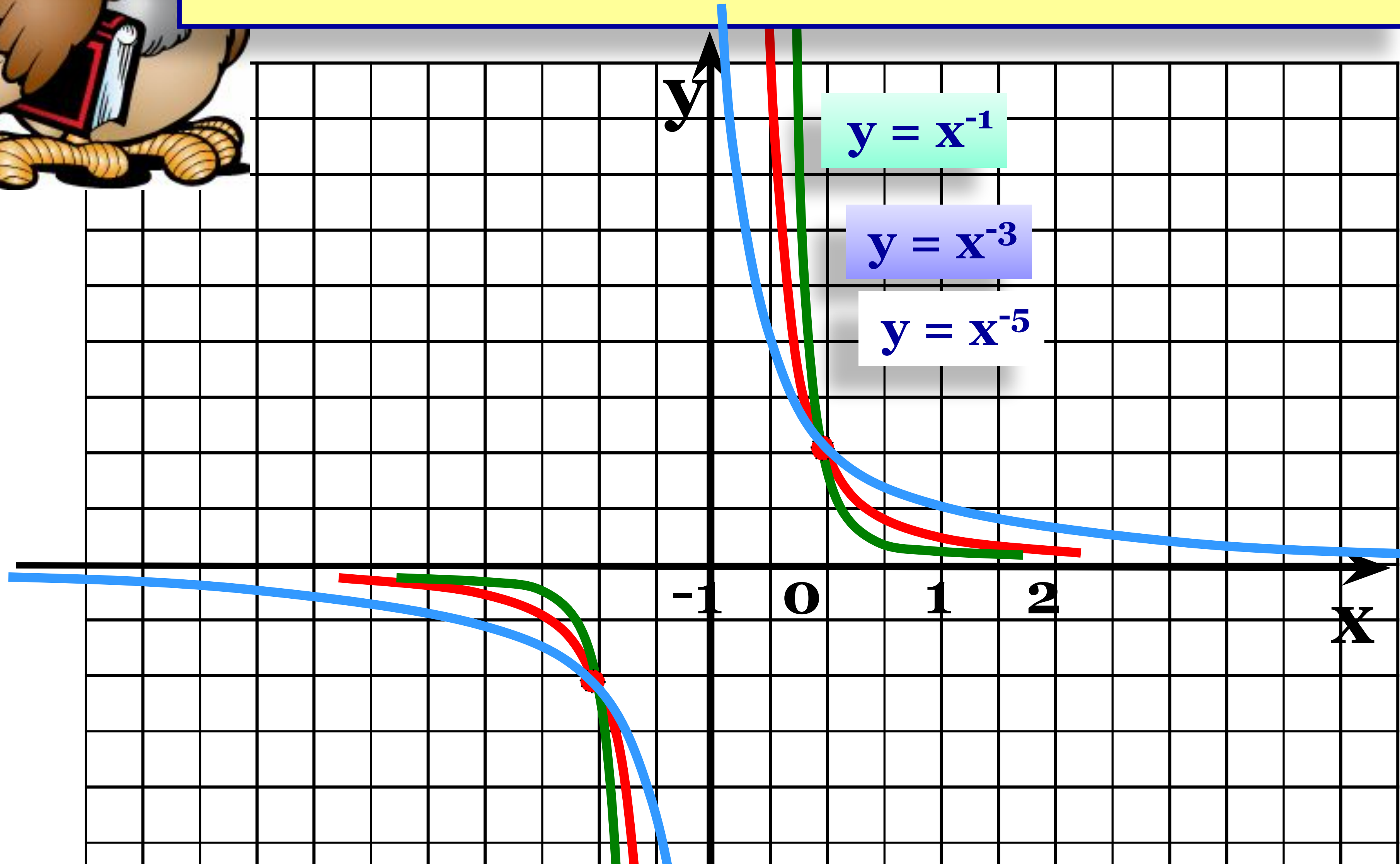


$$y = x^{-1}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Степенная функция:

Показатель $p = -(2n-1)$ – где n натуральное число $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, $y = x^{-7}$, $y = x^{-9}$, …



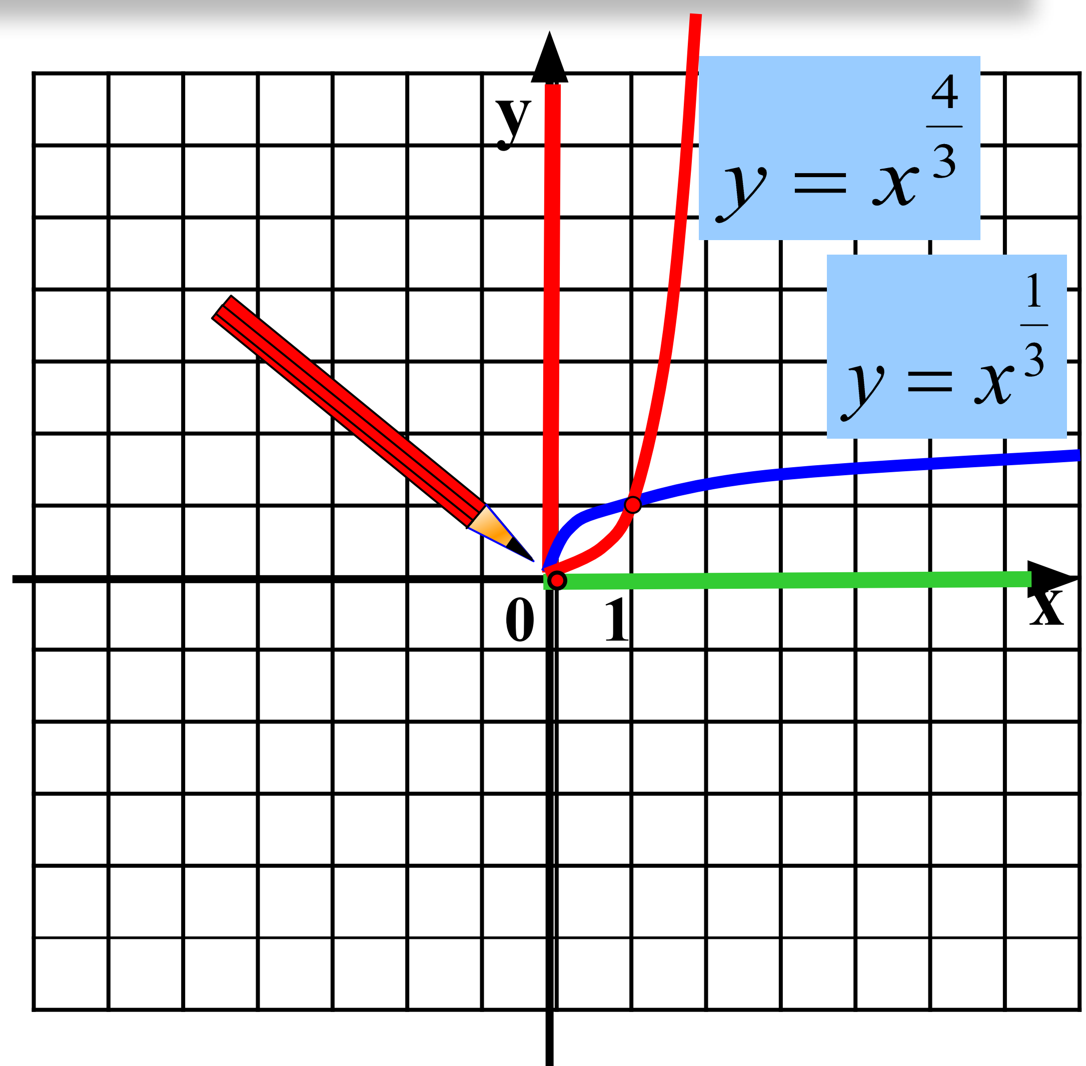
Степенная функция:

Показатель p – положительное действительное нецелое число $y = x^{1,3}$, $y = x^{0,7}$, $y = x^{2,2}$, $y = x^{1/3}$,…

$$D(y): x \geq 0$$

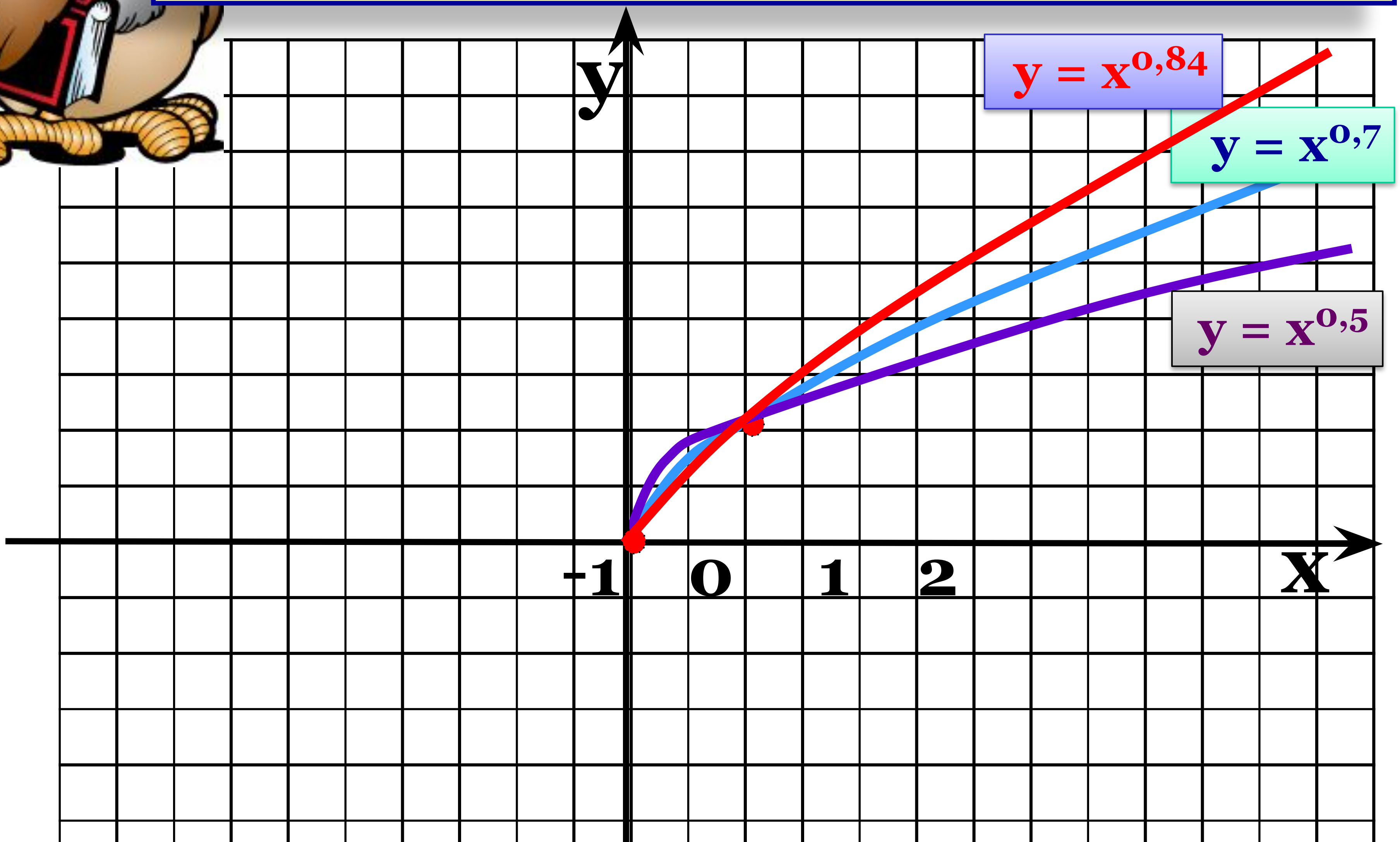
$$E(y):\ \ y \geq 0$$

Функция возрастает на $[0;+\infty)$ **промежутке**



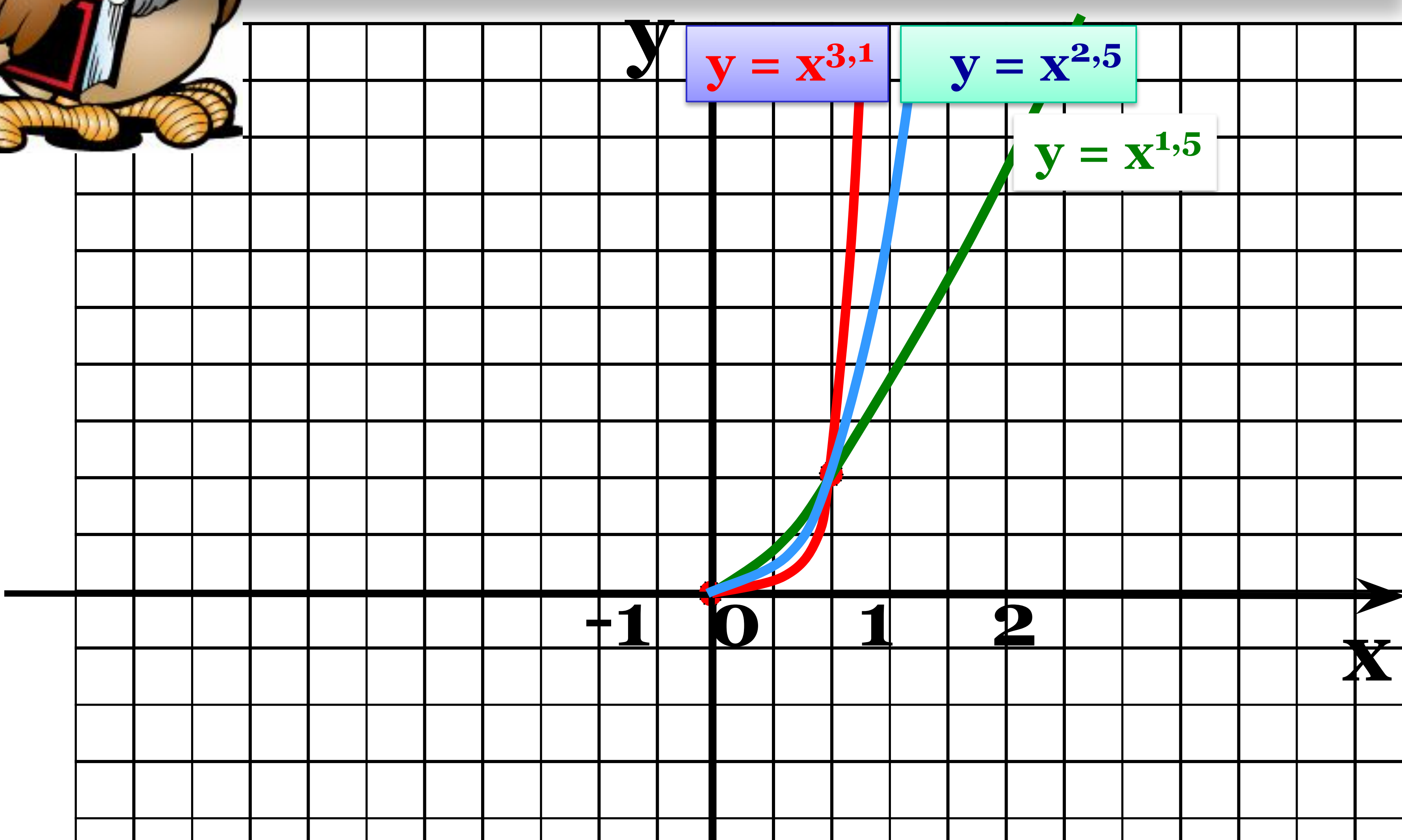
Степенная функция:

Показатель p – положительное действительное нецелое число $y = x^{1,3}$, $y = x^{0,7}$, $y = x^{2,2}$, $y = x^{1/3}$,…



Степенная функция:

Показатель **p** – положительное действительное нецелое число $y = x^{1,3}$, $y = x^{0,7}$, $y = x^{2,2}$, $y = x^{1/3}$,…



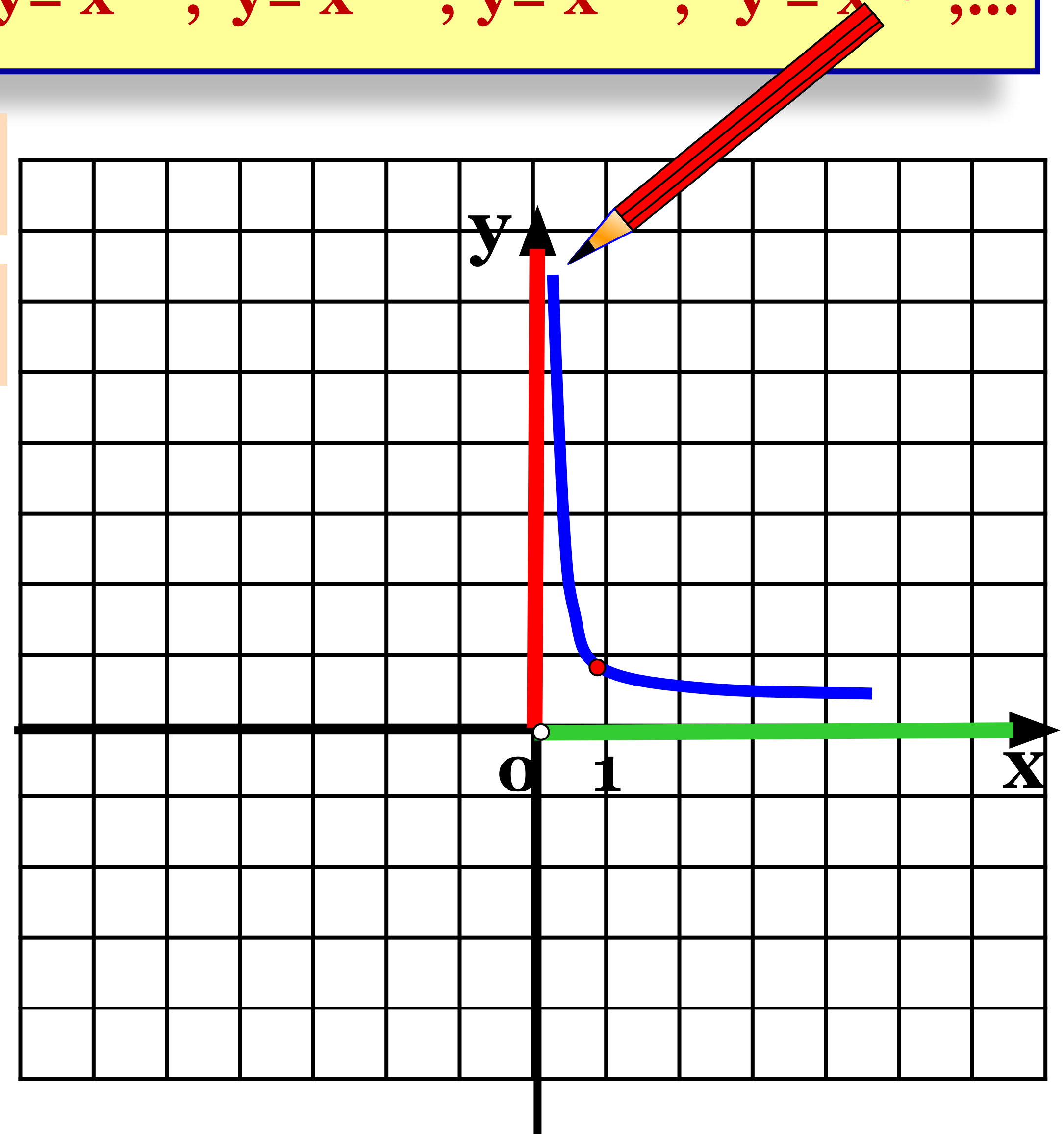
Степенная функция:

Показатель **р – отрицательное действительное нецелое число** $y = x^{-1,3}$, $y = x^{-0,7}$, $y = x^{-2,2}$, $y = x^{-1/3}$,...

$D(y): x > 0$

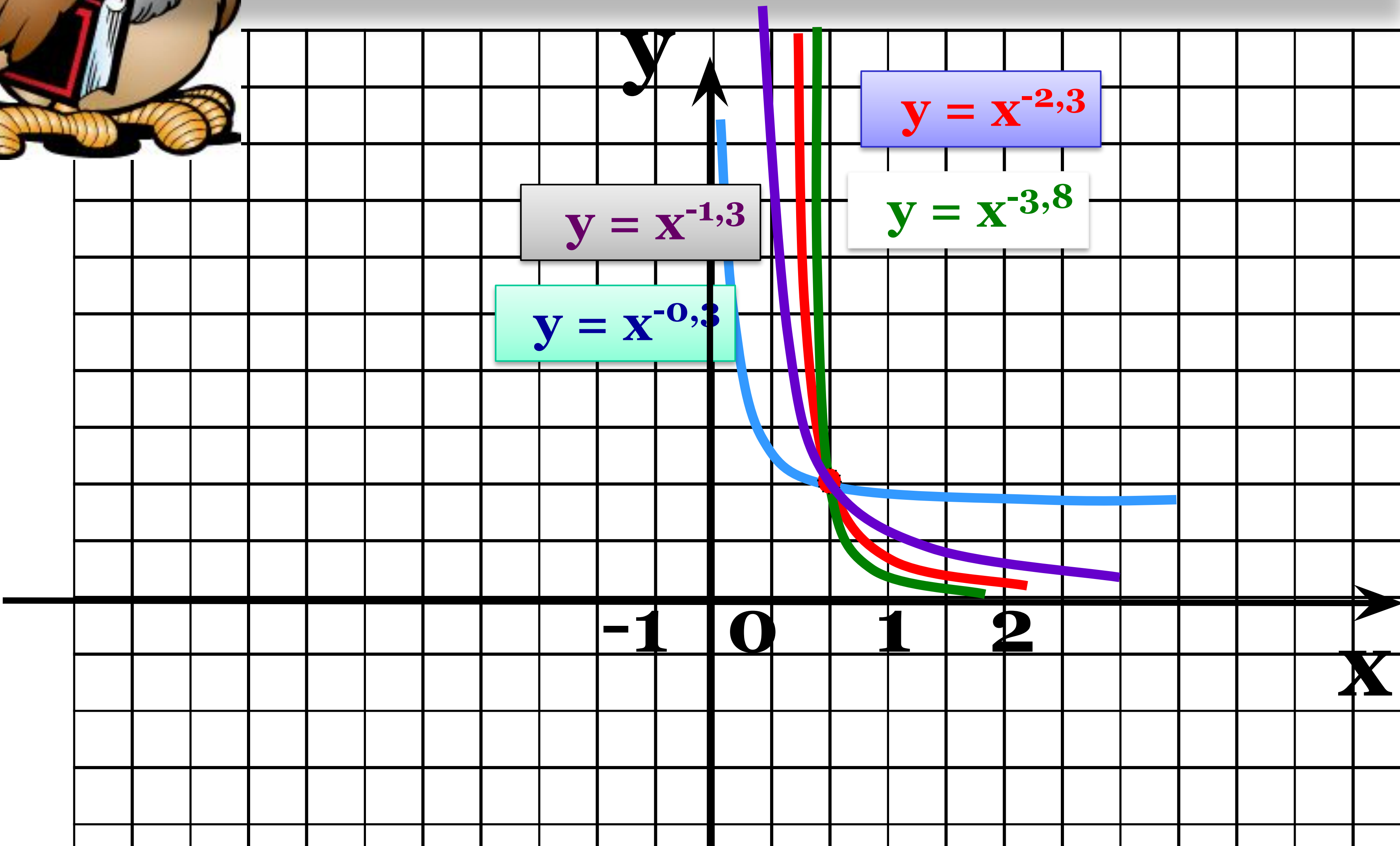
$E(y): \ y > 0$

Функция убывает на $(0;+\infty)$ **промежутке**



Степенная функция:

Показатель p – отрицательное действительное нецелое число $y = x^{-1,3}$, $y = x^{-0,7}$, $y = x^{-2,2}$, $y = x^{-1/3}$,…



Логарифмическая функция, её свойства и график

Потому-то словно пена,
Опадают наши рифмы.
И величие степенно
Отступает в логарифмы.
Борис Слуцкий

Понятие логарифмической функции

Функцию вида

$y = \log_a x$, где $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$

называют

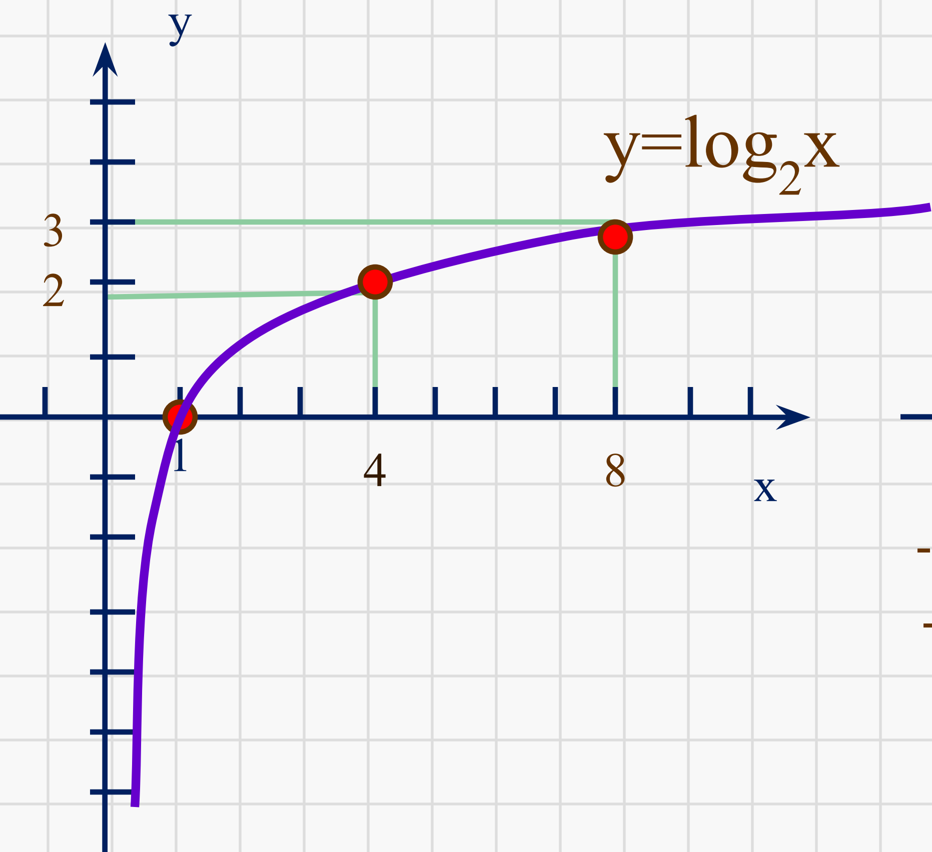
логарифмической функцией

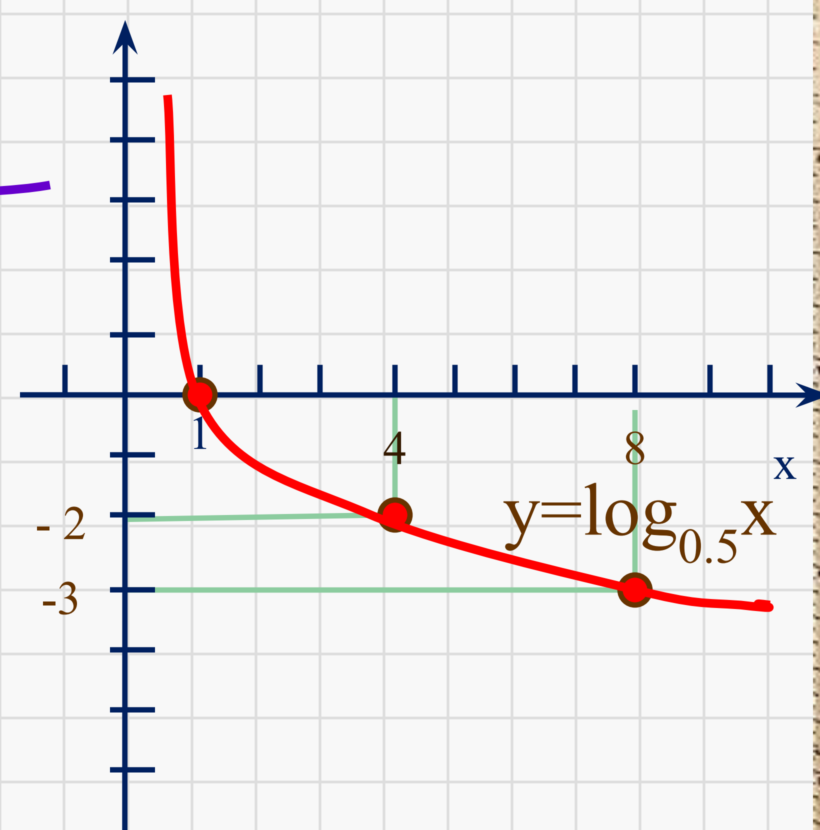
Построим график функции

$y=\log_2 x$ $y=\log_{0.5} x$

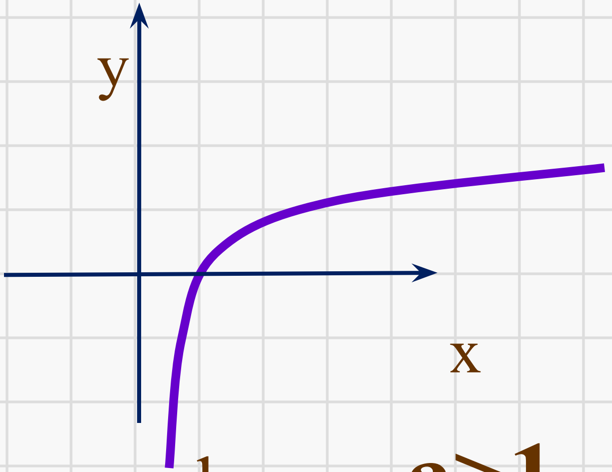
x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	-2	-1	0	1	2	3

x	1/4	1/2	1	2	4	8
y	2	1	0	-1	-2	-3

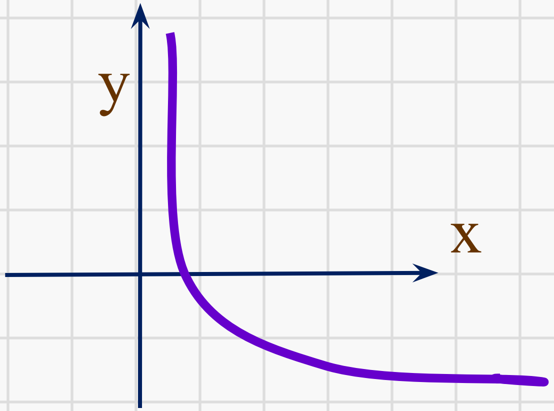




Свойства функции



$y=\log_a x$ **$a>1$**



$y=\log_a x$ **$0<a<1$**

<u>**Свойства функции $y=\log_a x$, при $a>1$**</u>

1) D(F):(0;+∞)
2) не является ни четной, ни нечетной
3) ***возрастает*** на своей области определения
4) не ограничена ни сверху, ни снизу
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений
6) непрерывна
7) E(F):(- ∞;+ ∞)
8) ***выпукла вверх***

<u>**Свойства функции $y=\log_a x$, при $0<a<1$**</u>

1) D(F):(0;+∞)
2) не является ни четной, ни нечетной
3) **убывает** на своей области определения
4) не ограничена ни сверху, ни снизу
5) не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений
6) непрерывна
7) E(F):(- ∞;+ ∞)
8) ***выпукла вниз***

Устно
Выполняем задание 15.12

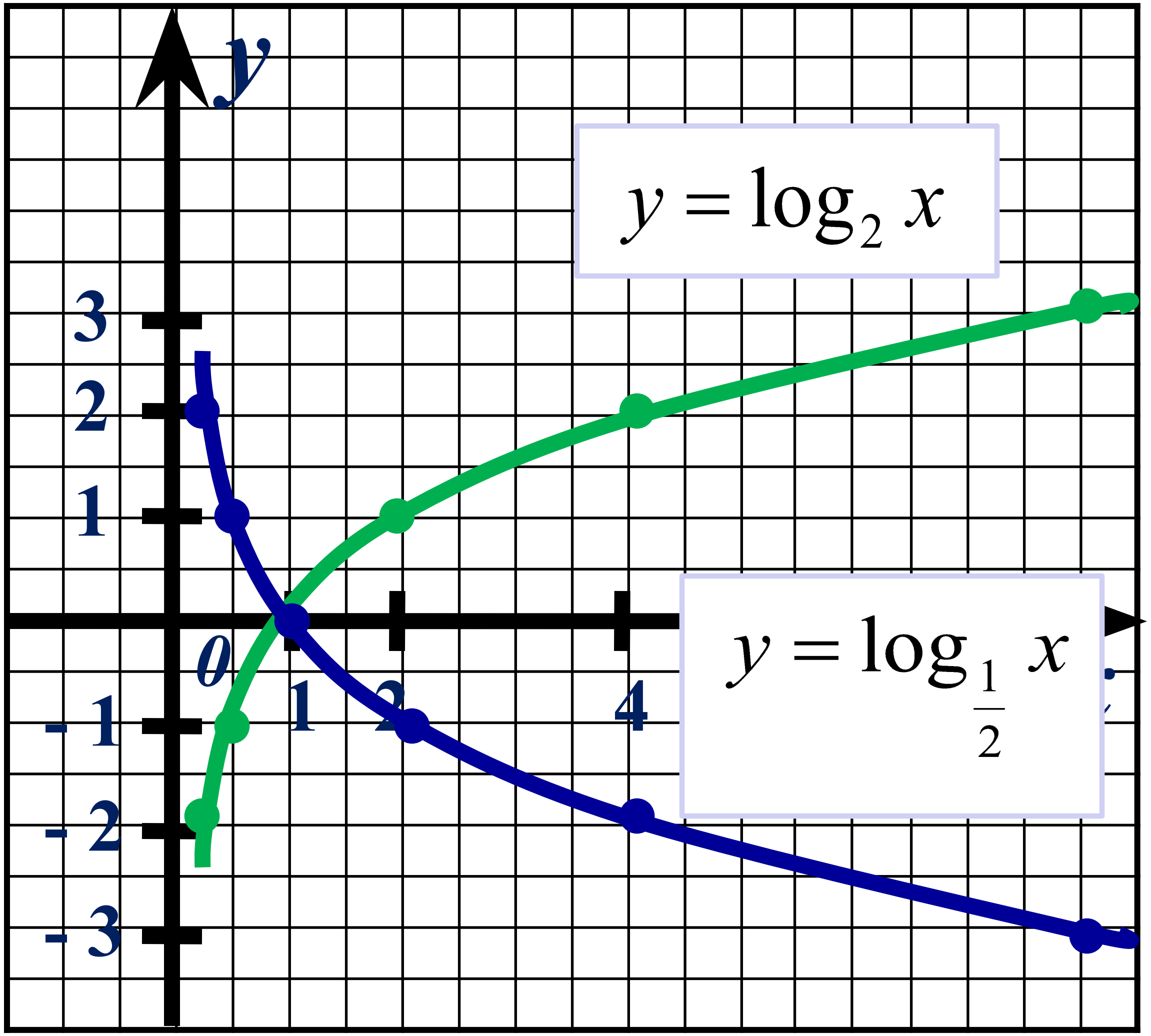


График логарифмической функции называют ***<u>логарифмической кривой.</u>***

Определите, какие из перечисленных ниже функций являются возрастающими, а какие убывающими:

1) $y = \log_3 x$;

2) $y = \log_2 x$;

3) $y = \log_{0,2} x$;

4) $y = \log_{0,5} (2x+5)$;

5) $y = \log_3 (x+2)$

Логарифмическая комедия математический софизм «2>3»

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8} - \textit{очевидно}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$2 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)} > 3 \cdot \cancel{\lg\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$2 > 3 - \textit{неверно}!!!$$

Показательная функция

$$y = a^{x};$$

где $a>0,\ a \neq 1$

Выполнила учитель математики МОУ Апоназыревская

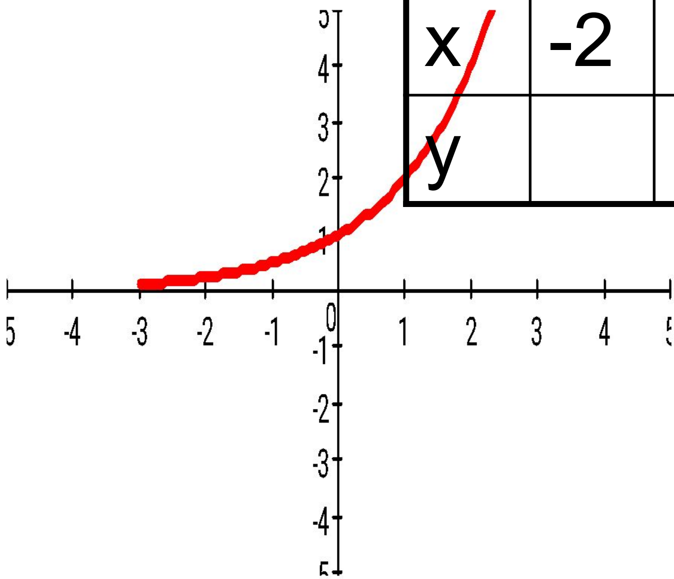
График показательной функции

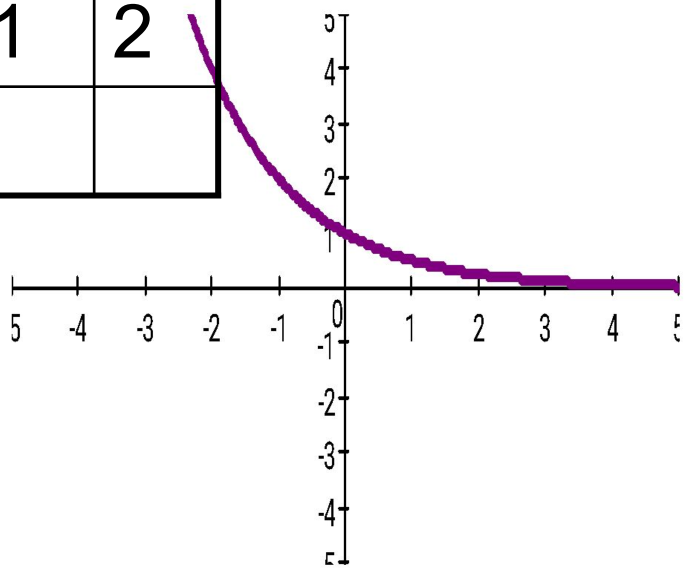
$y=2^x$ $a>1$

$У=a^x$

$У=(1/2)^x$ $0<a<1$

x	-2	-1	0	1	2
y					

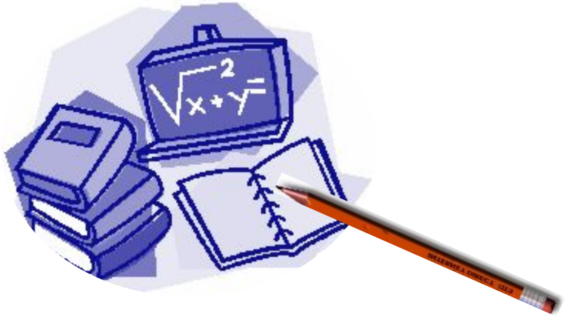




Свойства показательной функции

свойства	$a>1$	$0<a<1$
ООФ	Х$\in(-\infty;+\infty)$	
ОЗФ	У$\in(0;+\infty)$	
монотонность	возрастает	убывает
Наибол. и наимен. знач.	Не существует	
Нули	Не существуют	
непрерывность	Непрерывна на всей ООФ	

Логарифмические неравенства



Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Например, неравенства вида:

$$\log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \quad \log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$$

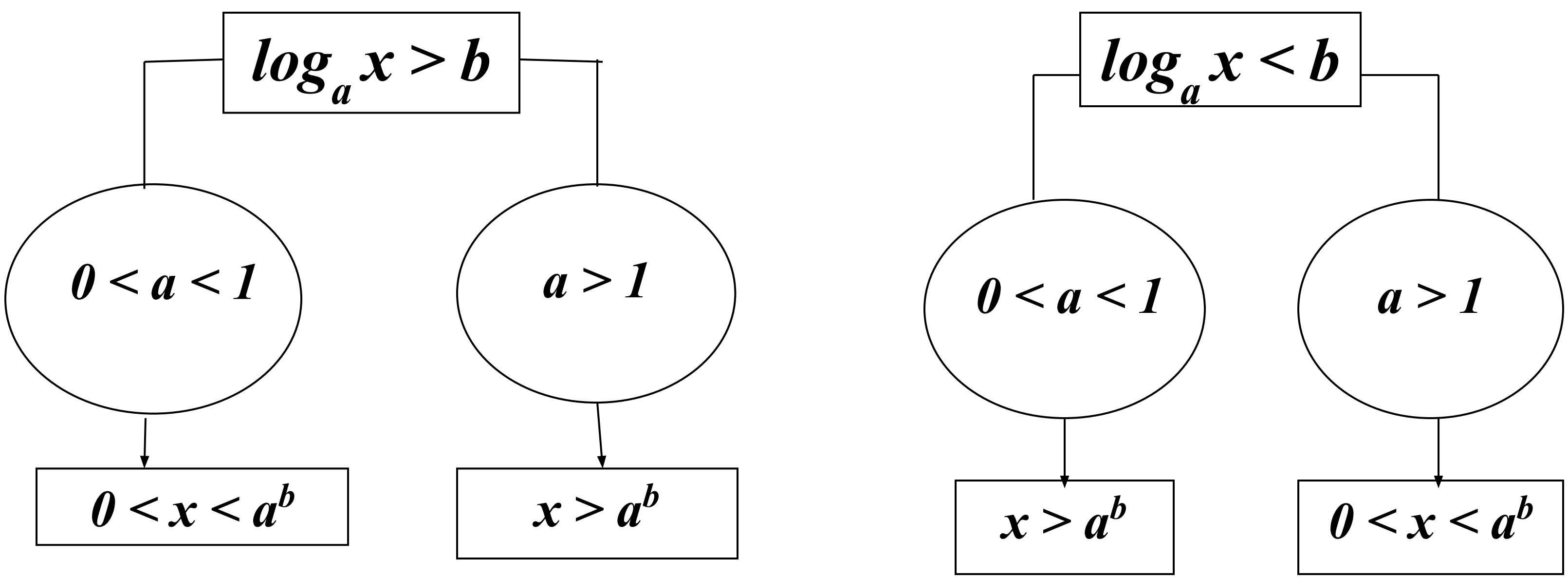
При a>o,a $\neq$ 1 являются

логарифмическими

По определению логарифма

Простейшие логарифмические неравенства записывается следующим образом: $\log_a f(x) > b$ $\log_a f(x) < b$

Схема сравнения логарифмических неравенств.



- **Устная работа**
- Решить неравенство:
- а)$\mathrm{Log}_2 X > \mathrm{Log}_2 8$;
- б)$\mathrm{Log}_{0,2} 4X < \mathrm{Log}_{0,2} 10$;
- в)$\mathrm{Log}_{0,5} X > \mathrm{Log}_{0,5} 2$;
- г)$\mathrm{Log}_4 2x < \mathrm{Log}_4 20$.

Логарифмические неравенства. Примеры

Пример 1

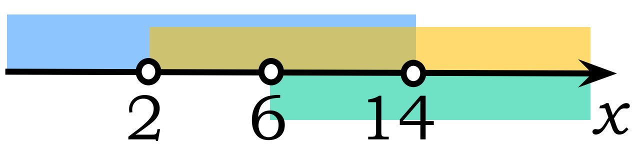
$$\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$$

$т.к.\ 3 > 1,\ то\ ф-ция\ возр.$

$$\begin{cases} 2x-4 > 14-x, \\ 2x-4 > 0, \\ 14-x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x > 18, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 6, \\ x > 2, \\ x < 14; \end{cases}$$



Ответ: (6; 14).

Пример 2

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le -4$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(16+4x-x^2) \le \log_{\frac{1}{2}}16$$

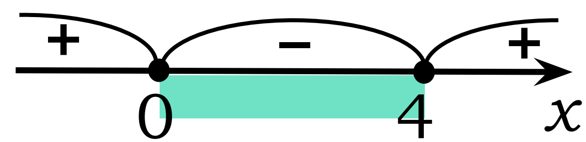
$т.к.\ \frac{1}{2} < 1,\ то\ ф-ция\ убыв.$

$$\begin{cases} 16+4x-x^2 \ge 16, \\ 16+4x-x^2 > 0; \end{cases} \quad -\text{лишнее условие}$$

$$4x - x^2 \ge 0$$

$$x^2 - 4x \le 0$$

$$x(x-4) \le 0$$



Ответ: [0; 4].

Показательные неравенства

Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$1)\ y = 5^x$$

$$2)\ y = 0{,}5^x$$

$$3)\ y = 10^x$$

$$4)\ y = \pi^x$$

Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$1)\, y = 5^x \qquad \textit{возрастающая, т.к.}\ 5 > 1$$

$$2)\, y = 0{,}5^x \qquad \textit{убывающая, т.к.}\ 0 < 0{,}5 < 1$$

$$3)\, y = 10^x \qquad \textit{возрастающая, т.к.}\ 10 > 1$$

$$4)\, y = \pi^x \qquad \textit{возрастающая, т.к.}\ \pi > 1$$

Какие из функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$5)\, y = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$6)\, y = 49^{-x}$$

Какие из функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$5)\, y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6)\, y = 49^{-x} \qquad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

Что нужно учесть при решении показательных неравенств ?

Решить неравенство

$$2^x > 1$$

$$2^x > 1 \;\Leftrightarrow\; 2^x > 2^0 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$$

1. Привести основания степени к одинаковому основанию

2. Использовать свойства монотонной функции

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

$$т.к.\ 3 > 1,\ то\ функция\ y = 3^x\ возрастающая$$

$$\underline{x > 4}$$

$$x \in (4; +\infty)$$

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$т.к. 0 < \frac{1}{2} < 1,\ то\ функция\ \ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{X}}\ \ убывающая$$

$$x \leq \frac{3}{2} \qquad\qquad x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решите неравенство:

$$2^{3x} \geq \frac{1}{2};$$

$$2^{3x} \geq 2^{-1};$$

$т.к.\ основание\ 2 > 1,\ то\ функция\ \ возрастающая$

$$3x \geq -1;$$

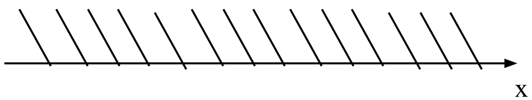
$$x \geq -\frac{1}{3};$$

$$x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Решите неравенства

$$8^x > -3$$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$



Ответ: $(-\infty; +\infty)$

$$8^x < -3$$

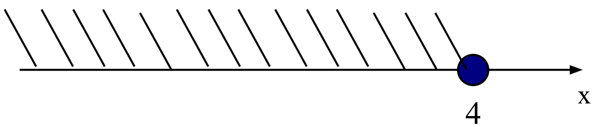
$$x \in \{\varnothing\}$$

Ответ: $\varnothing$

$$3^x \le 81$$

$$3^x \le 3^4$$

$$x \le 4$$



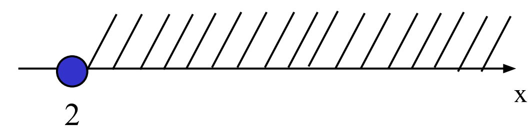
$$x \in (-\infty; 4]$$

Ответ: $(-\infty; 4]$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \le \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \le \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$x \ge 2$$



$$x \in [2; +\infty)$$

Ответ: $[2; +\infty)$

Решите неравенство

$$25^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$$

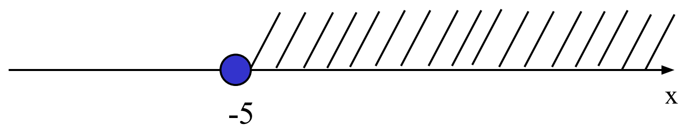
$$\left(5^2\right)^{-x+3} \geq \left(5^{-1}\right)^{3x-1}$$

$$5^{-2x+6} \geq 5^{-3x+1}$$

$$-2x+6 \geq -3x+1$$

$$-2x+3x \geq 1-6$$

$$x \geq -5$$



$$x \in [-5; +\infty)$$

Ответ: $[-5; +\infty)$