5.3. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Если каждому элементу х множества Х ставится в соответствие определенный элемент у множества У, то говорят, что на множестве Х задана функция

$$y = f(x)$$

x называется независимой переменной

y называется зависимой переменной

X – область определения функции

Y – область значений функции

Совокупность точек плоскости ХОУ, удовлетворяющих уравнению

$$y = f(x)$$

называется графиком этой функции.

Способы задания функций

1. Аналитический

Функция задана формулой вида $y = f(x)$

Например:

1 $y = x^3$

Область определения: $-\infty < x < +\infty$

Область значений: $-\infty < y < +\infty$

2

$$y=\sqrt{1-x^2}$$

Область определения: $-1 \le x \le 1$

Область значений: $0 \le y \le 1$

3

$$y=\begin{cases} x^3, & x<0 \\ x+1, & x\ge 0 \end{cases}$$

2. Табличный

Функция задана таблицей, в которой содержатся значения аргумента *x* и соответствующие значения функции *f(x)*.

Например: таблицы логарифмов.

3. Графический

Функция задана в виде графика *y=f(x)*.

Свойства функций

1. Четность

Функция y=f(x) называется <u>четной</u>, если для любого x

$$f(-x) = f(x)$$

Функция y=f(x) называется <u>нечетной</u>, если для любого x

$$f(-x) = -f(x)$$

Если оба эти условия не выполняются, то функция называется функцией общего вида.

Например:

1 $y = x^3$ **- нечетная, т.к.** $(-x)^3 = -x^3$

2 $y = x^2$ **- четная, т.к.** $(-x)^2 = x^2$

3 $y = x^2 + x^3$ **- общего вида .**

График четной функции симметричен относительно оси ординат.
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2. Монотонность

Функция y=f(x) называется <u>возрастающей</u> (убывающей) на промежутке X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

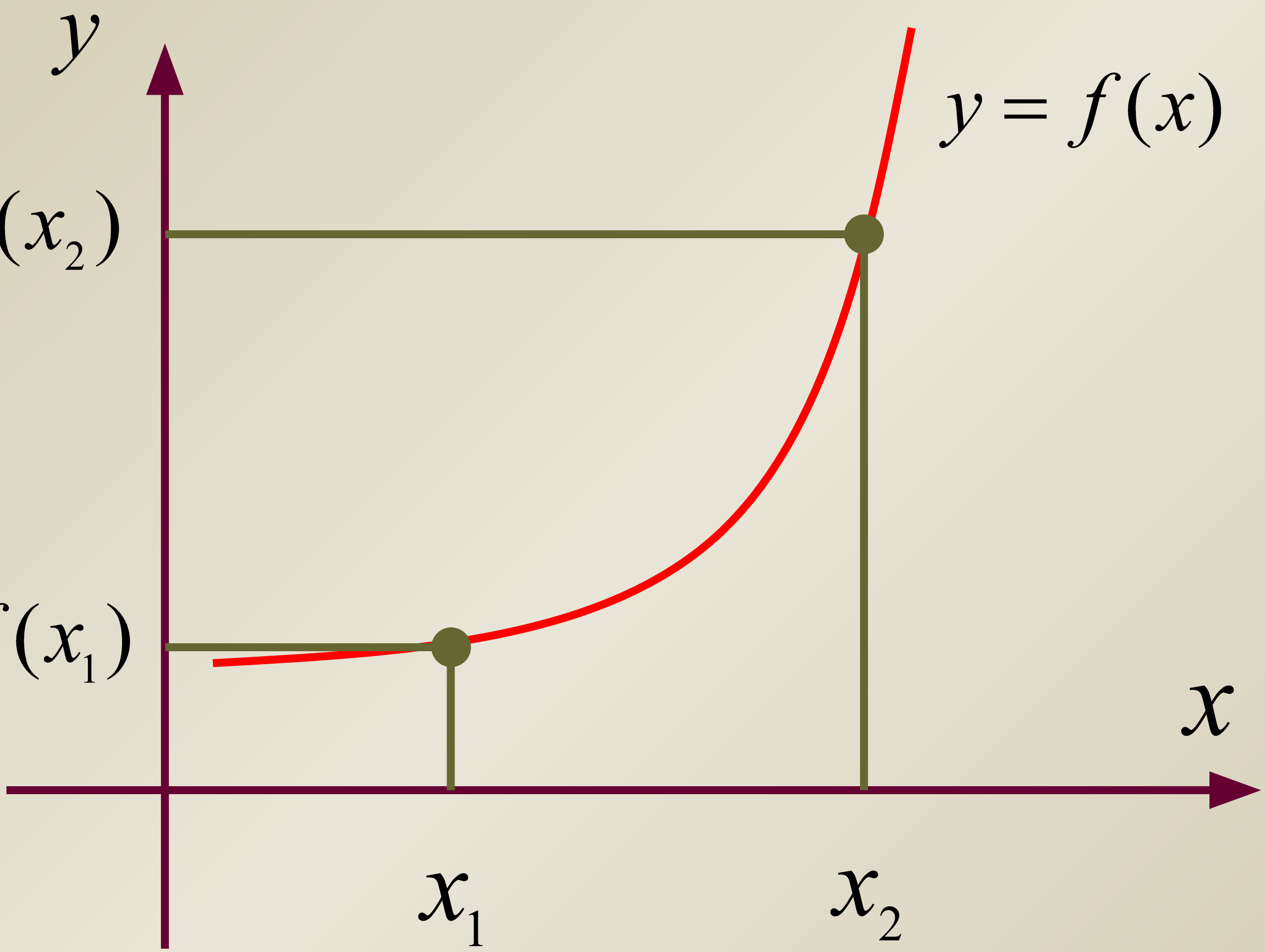
$x_1, x_2 \in X \qquad x_2 > x_1$

$$\boxed{f(x_2) > f(x_1)}$$

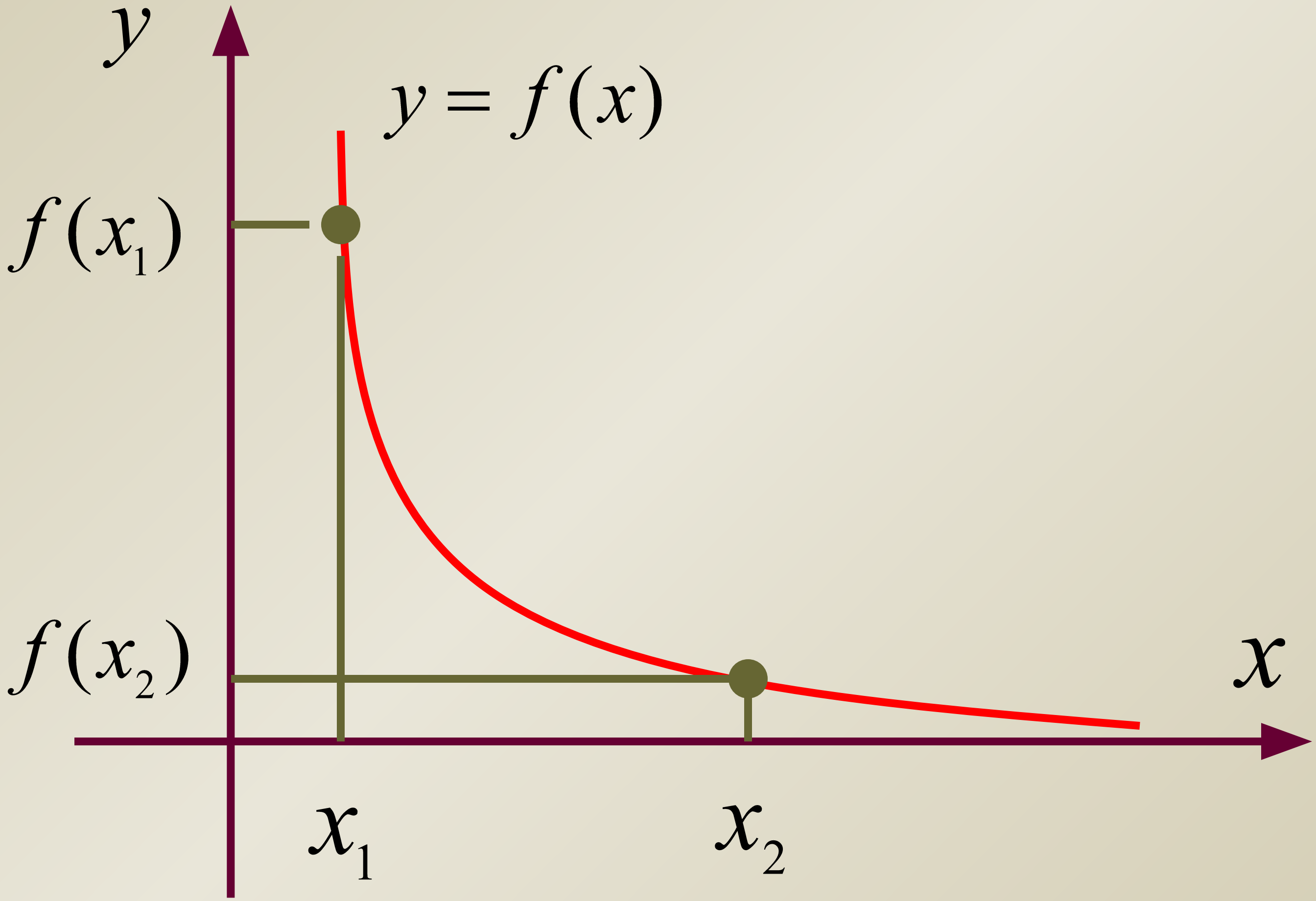
- функция возрастает

$$\boxed{f(x_2) < f(x_1)}$$

- функция убывает



$f(x_2) > f(x_1)$ - **функция возрастает**



$f(x_2) < f(x_1)$ - **функция убывает**

Функции, возрастающие и убывающие называются <u>монотонными</u>.

Например:

$$y = x^2$$

Возрастает на промежутке: $[0;+\infty)$

Убывает на промежутке: $(-\infty;0]$

3. Ограниченность

Функция y=f(x) называется <u>ограниченной</u> на промежутке X, если существует число M>0, такое, что для любого x выполняется неравенство:

$$\left|f(x)\right| \le M$$

В противном случае функция называется *неограниченной.*

Например:

$$y = \cos x$$

- ограничена на всей числовой оси, т.к. для любого х

$$|\cos x| \le 1$$

4. Периодичность

Функция y=f(x) называется <u>периодичной</u> с периодом T, не равным нулю, если для любого x выполняется равенство:

$$f(x+T)=f(x)$$

Например:

$$y = \cos x$$

-периодичная с периодом, равным *2П*, т.к. для любого *x*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Введем понятие обратной функции.

Пусть задана функция от аргумента *x*: *y=f(x)* , определенная на множестве *X* с областью значений *У*.

Поставим в соответствие каждому значению

$$y \in Y$$

единственное значение

$$x \in X$$

при котором *f(x) =y*.

Функция x=φ(y) определенная на множестве У с областью значений Х, называется <u>обратной</u> к функции y=f(x) .

Традиционно функцию обозначают *y* а аргумент – *x*. Поэтому обратную функцию обозначают

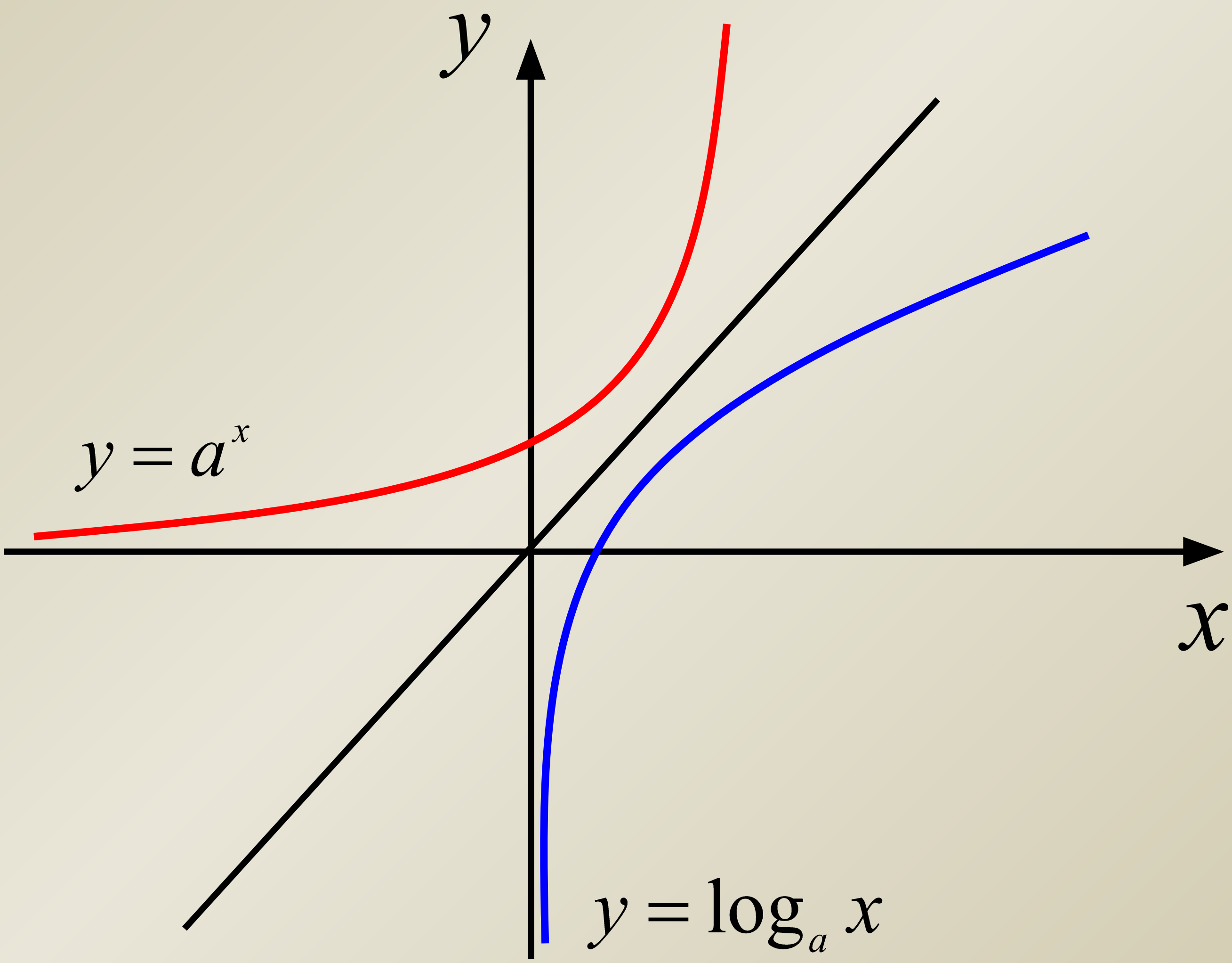
$$y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$$

Например:

Для функции $y = a^x$

обратной будет функция $y = \log_a x$

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.



y
x
$y = a^x$
$y = \log_a x$

Введем понятие <u>сложной</u> функции.

Пусть задана функция от аргумента *u*: *y=f(u)* , определенная на множестве *U* с областью значений *У*.

Пусть *u* в свою очередь, является функцией от переменной *x*: *u=φ(x)*, определенной на множестве *X* с областью значений *U*.

Функция y=f [φ(x)] определенная на множестве X с областью значений Y, называется <u>сложной</u> функцией.