ШАЛАЕВ Ю.Н.
доцент каф. ИПС, АВТФ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАНЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Лекции- 26 часов

Практические занятия- 26 часов

Экзамен, зачет.

Литература

- 1 .Гмурман В.Е. Курс теории вероятностей. М.: В.Ш. 1977,1999.
- 2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей М.: Наука, 1979,2000.
- 3. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.:1987.
- Свешников А.А. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М.: Наука, 1965.

Пространство элементарных событий Ω

- Пространством элементарных событий Ω называется множество элементарных событий ω_i, удовлетворяющих данному эксперименту:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Случайные события

- Случайным событием или просто событием называется подмножество А множества Ω:

$$A \subseteq \Omega.$$

$$A=\{\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_m\},$$

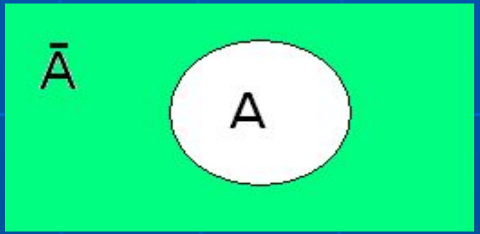
где m-число элементарных событий случайного события А.

- Для дискретного Ω число случайных событий

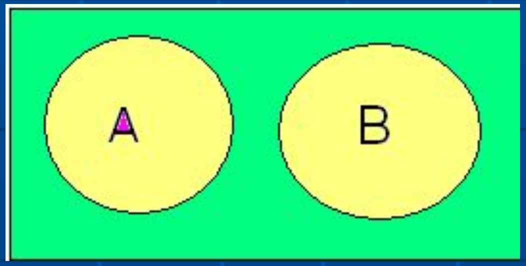
$$N=2^n.$$

Действия над событиями

- **A ∪ B** - объединение множеств (событий)
- **A∩B –** пересечение множеств (событий)
- $\bar{A}$= Ω – A –противоположное событие



- **A∩B=∅** – несовместные события



Комбинаторика

- **Основное правило комбинаторики:** пусть требуется совершить одно за другим К действий и первое действие можно осуществить n_1 способами, второе n_2 и так до К действия, которое можно осуществить n_k способами, то все К действий можно осуществить

$$N=n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$$

способами.

- Сочетания:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

- Перестановки:

$$P_n = n!$$

- Размещения:

$$A_n^m = P_m * C_n^m = m! * \frac{n!}{m!(n-m)!} = n * (n-1) *** (n-m+1)$$

- Комбинации с возвращением:

$$B_n^m = n^m$$

Вероятность

- **Аксиоматическое определение вероятности:** Вероятность на пространстве элементарных событий Ω называется функция $P(A)$, обладающая свойствами:

$$P(\Omega)=1;$$

$$0 \le P(A) \le 1;$$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B),\ A \cap B=\varnothing$$

- Классическая вероятность:
  $$P(A)=m/n,$$
  n-число элементарных событий для Ω;
  m-число элементарных событий для A.
- Геометрическая вероятность:
  $$P(A)=L_A/L_\Omega;\ P(A)=S_A/S_\Omega;\ P(A)=V_A/V_\Omega,$$
  где L-длина, S-площадь, V-объем.
- Статистическая вероятность:
  $$P(A)=\lim_{n-\infty} n_A/n.$$

Вероятность суммы

вероятность суммы для совместных событий А и В определяется по соотношению

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

Вероятность противоположного события

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Условная вероятность

- Условная вероятность для зависимых событий определяется по соотношению

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B).$$

- События A и B независимы, если условная вероятность равна своей безусловной вероятности

$$P(A/B) = P(A);$$

Вероятность произведения

- Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятностей одного из этих событий на условную вероятность другого при условии, что первое произошло:

$$P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B/A);$$

- Для трех событий:

$$P(A \cap B \cap C)=P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB);$$

- для независимых событий вероятность произведения равна произведению вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B);$$

- Вероятность произведения коммутативна:

$$P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B/A);$$

$$P(A \cap B)=P(B) \cdot P(A/B).$$

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) * P(A/H_i)$$

А-произвольное событие;

События H_1, H_2,…H_n попарно несовместны, называются гипотезами и образуют полную группу событий, при этом

$P(H_i)>0$,

Формула Байеса

$$P(H_k/A) = P(H_k) * P(A/H_k) / \sum_{i=1}^{n} P(H_i) * P(A/H_i)$$

- Это вероятность наступления К гипотезы при условии,
  что событие А произошло.

Испытания Бернулли

- Производится последовательность независимых испытаний, в каждом из которых с постоянной вероятностью Р происходит событие А (успех) и событие $\bar{A}$ с вероятностью $q=1-p$. Необходимо определить вероятность появления события А в этой
 в этой серии ровно m раз:

$$P_n(m) = C_n^m * P^m * q^{n-m}$$

Случайная величина

Случайная величина ξ это действительная функция

$$\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega,$$

определенная на пространстве элементарных событий.

Т.е. случайная величина-это функция; аргумент у которой, элементарное событие; значение- число.

Случайные события (A,B,…) качественные характеристики случайных явлений. Случайная величина дает количественную характеристику явлений.

Случайная величина дискретного типа

- Закон задается в виде ряда распределения-это совокупность пар чисел (x_k,P_k), где
  xk-значения, которые принимает случайная величина $\xi= x_k$;
  P_k-вероятность, которую принимает это значение x_k:

$$P_k=P(\xi= x_k)>0:$$

$$\sum_{k-1}^{n} P_k = 1$$

$\xi= x_k$		x_1	x_2		x_n
P_k		P_1	P_2		P_n

Функция распределения

- $$F(x)=P(\xi<x)$$
- Это вероятность того, что случайная величина
  принимает значение расположенное левее точки x.
- Функция распределения неслучайная функция;
  аргумент-вещественное x; значение-число.

Свойства функции распределения

1. $F(-\infty)=0$; $F(\infty)=1$;
2. $F(x)$-неубывающая функция; $x_1<x_2$, $F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $F(x)$-непрерывная функция; $\lim F(x)=F(x_0)$; $x \to x_0-0$;
4. Вероятность попадания случайной величины на заданный интервал [а,в) равно приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \leq \xi < в)= F(в) - F(a)$$

Случайная величина непрерывного типа

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$$

- f(x) – плотность распределения вероятностей случайной величины ξ.

Плотность вероятностей

Плотность распределения вероятностей случайной
величины ξ, называется предел отклонения вероятности попадания ξ на малый интервал к
длине этого интервала:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le \xi < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

Если этот предел существует, то он равен производной
от функции распределения

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Свойства плотности вероятностей

- График плотности вероятностей f(x) – кривая распределения вероятностей;
- Плотность вероятностей неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0;$$

- Плотность вероятностей нормирована на единицу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

- Вероятность попадания на интервал [а,в):

$$P(a \leq \xi < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Числовые характеристики случайных величин

- **Математическое ожидание – это число, которое характеризует среднее значение случайной величины: для дискретной ξ**

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i * P_i$$

- **Для непрерывной ξ:**

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\, dx$$

Свойства математического ожилания

1 Математическое ожидание постоянной величины С равно самой постоянной величине:

$$MC=C;$$

2 Постоянную величину можно выносить за оператор математического ожидания:

$$MC\xi=CM\xi;$$

3 Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M(\xi + \eta)=M\xi + M\eta :$$

4 Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математическое ожиданий этих величин:

$$M\xi\eta=M\xi*M\eta.$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2,$$

Которое является мерой рассеяния случайной значений

величины около ее математического ожидания.

После преобразования правой части получим второе

соотношение для дисперсии:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

- Для дискретной ξ:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^2 * P_i$$

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 * P_i - (M\xi)^2$$

- Для непрерывной ξ:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 * f(x)\, dx$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 * f(x)\, dx - (M\xi)^2$$

Свойства дисперсии

1 Дисперсия положительная величина

$$D\xi \geq 0;$$

2 Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$DC = 0;$$

3 Константу можно выносить за оператор дисперсии в квадрате

$$DC\xi = C^2 D\xi;$$

4 Дисперсия суммы и разности независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин :

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta;$$

$$D(\xi-\eta)=D\xi+D\eta;$$

5 Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$$

6 Дисперсия показывает средний квадрат разброса случайной величины относительно центра (математического ожидания).

Моменты

- Начальный момент К порядка:

$$v_k = M\xi^k, \quad v_1 = M\xi;$$

Для дискретной ξ:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i$$

Для непрерывной ξ:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\,dx$$

- Центральный момент К порядка:

$\mu_к = M(\xi - M\xi)^к$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D\xi$;

Для дискретной ξ:

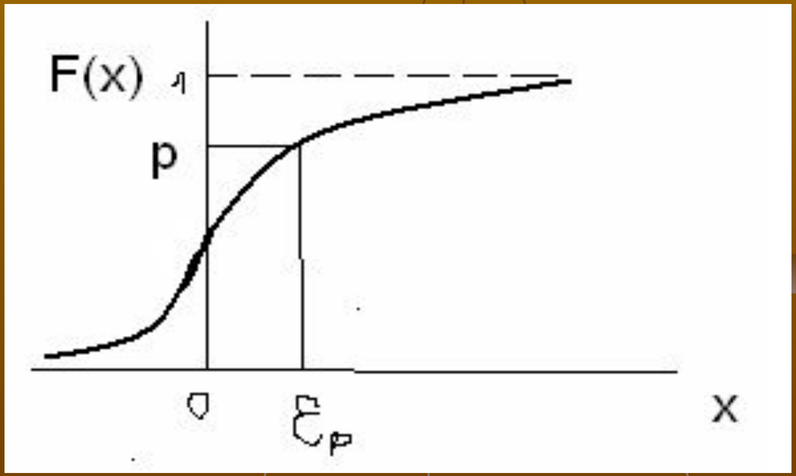
$$\mu_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^k * P_i$$

Для непрерывной ξ:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k * f(x)\,dx$$

Квантиль

- Квантиль порядка P для распределения F(x)
называется значение ε_P для которого $F(\varepsilon_P) = P$.



Типовые законы распределения случайных величин

- Биномиальный закон:

Проводится серия из “n”однородных и независимых опытов. А – событие успеха, которое может появится в опыте. Случайная величина ξ – число успехов появления события А в серии из “n” опытов.
ξ – дискретная случайная величина и ее значения целые числа:
ξ=k; k=0,1,2,..., “n” .

- Целочисленная случайная величина ξ подчинена биномиальному закону, если вероятности ряда распределения вычисляются по формуле Бернулли:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{1,n}$$

Математическое ожидание: Mξ=np;

Дисперсия: D ξ=npq.

Закон Пуассона

- ξ – дискретная случайная величина, которая принимает целые неотрицательные значения:
  k=0,1,2,…,k,…,
  последовательность этих значений не ограничена $n \to \infty$, $p \to 0$ так, что np=const.
  Случайная величина ξ подчинена закону Пуассона, если вероятности ряда распределения вычисляются по формуле Пуассона :
- $$P(\xi) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad (\mathrm{k} = 0, 1, 2 \ldots), \mathrm{a} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}.$$
- Математическое ожидание Mξ=a;
  Дисперсия Dξ=a.

Равномерное распределение

- Непрерывная случайная величина ξ распределена по равномерному закону, если плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & a\le x;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Равномерное распределение применяется при определении ошибок вычислений (измерений). Датчик случайных чисел в ЭВМ.

Функция распределения

- $$F(x) = \begin{cases} 0, & a \le x; \\ \dfrac{x - a}{b - a}, & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание: $M\xi=(в+a)/2$;

Дисперсия: $D\xi=(b-a)^2/12$.

Закон экспоненциального распределения

- Непрерывная случайная величина ξ распределена по экспоненциальному закону, если плотность вероятностей задана формулой:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0, \ \lambda > 0. \end{cases}$$

Применяется при расчете надежности различных технических систем.

Функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}; & \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание: $M\xi = 1/\lambda$;

Дисперсия: $D\xi = 1/\lambda^2$.

Закон нормального распределения (закон Гаусса)

- Плотность вероятностей:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2},$$

- Функция распределения:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-(y-a)^2/2\sigma^2} dy.$$

Математическое ожидание: $M\xi = a$;
Дисперсия: $D\xi = \sigma^2$.

Интеграл вероятностей

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt.$$

Интеграл вероятностей есть функция распределения Гауссовской случайной величины Z:

MZ=0; DZ=1; F(-∞)=0; F(0)=0.5; F(∞)=1;

F(-z)=1 – F(z)

Локальная теорема Муавра-Лапласа

При неограниченном увеличении числа испытаний “n” формула Бернулли сводится к формуле Гаусса:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-(k-np)^2 / 2npq}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

При неограниченном увеличении числа испытаний “n”
вероятность попадания случайной на заданный интервал (a,b] равна

$$P(a \le \xi < b) = F\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

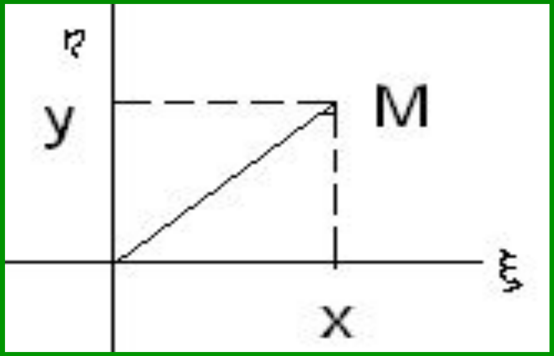
где F(z) – интеграл вероятностей.

Системы случайных величин

Совокупность нескольких случайных величин, рассматриваемых совместно называется системой случайных величин:

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_n\}.$$

Система двух случайных величин $\{\xi, \eta\}$ изображается на плоскости в виде вектора; каждой точки соответствует единственный вектор



Законы распределения системы

Таблица распределения является формой записи закона распределения системы дискретной случайной величины:

$P_{ij}=P(\xi=x_i,\ \eta=y_j)$;

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}=1$$

y \ x	y_1	y_2	.	y_j
X_1	P_{11}	P_{12}	.	P_{jj}
X_2	P_{21}	P_{22}	.	P_{2j}
	.	.	.	.
X_n	P_{i1}	P_{i2}	.	P_{ij}

Функция распределения системы

$$F(x,y)=P(\xi<x, \eta<y);$$

Для непрерывной системы случайных величин:

$$F(x,y)=P(\xi<x,\eta<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$f(x,y)$ – плотность распределения системы случайных величин.

Плотность системы случайных величин

$$f(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{P(x\le\xi<x+\Delta x,\ y\le\eta<y+\Delta y)}{\Delta x*\Delta y}$$

Свойства плотности вероятностей системы

1 Плотность системы неотрицательная функция

$f(x,y) \ge 0$

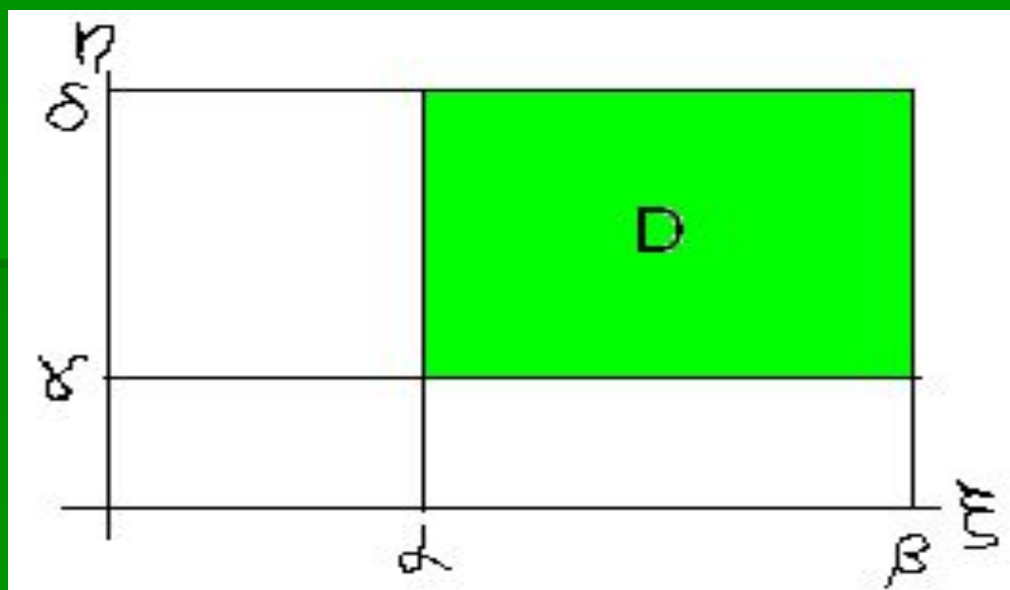
2 Плотност... вана на единицу:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

- Вероятность попадания системы в область D:

$$P(\alpha \le \xi < \beta, \gamma \le \eta < \delta) = F(\beta,\delta) + F(\alpha,\gamma) - F(\alpha,\delta) - F(\beta,\gamma)$$

$$P(\alpha \le \xi < \beta, \gamma \le \eta < \delta) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\,dx\,dy$$



Дисперсия системы

Дисперсия системы определяется по законам отдельных составляющих системы:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M\xi)^2 p_i; \quad D\eta = \sum_{j=1}^{\infty} (y_j - M\eta)^2 p_j.$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f_1(x)dx, \ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\, f_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(x, y)dy;$$

$$D\eta = \int_{-\infty}^{\infty} (y - M\eta)^2 f_2(y)dy, \ \tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\, f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(x, y)dx;$$

Среднее квадратическое отклонение характеризует рассеивание системы относительно центра (математического ожидания).

Корреляционный момент

Корреляционный момент есть математическое ожидание центрированной системы:

$$K_{\xi\eta} = M\overset{\circ}{\xi}\overset{\circ}{\eta} = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta),$$

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\xi} = \xi - M\xi; \\ \overset{\circ}{\eta} = \eta - M\eta. \end{cases}$$

Для дискретной системы:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M\xi)(\eta - M\eta)P_{ij};$$

.

Для непрерывной системы:

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)(y - M\eta)f(x, y)dxdy;$$

x,y – возможные значения ξ, η;

f(x,y) – плотность вероятностей системы.

Геометрически $К_{\xi\eta}$ показывает величину отклонения системы от центра. Если $К_{\xi\eta} \neq 0$, то система коррелированна. Если $К_{\xi\eta} = 0$, то система не коррелированна. Из независимости системы вытекает некоррелированность, обратное может быть и неверно.

Свойства корреляционного момента

- Корреляционный момент симметричен:

$$К_{\xi\eta} = К_{\eta\xi};$$

- $К_{\xi\xi} = D\xi$; $К_{\xi\xi} = M(x-M\xi)(x-M\xi)=D\xi$;
- $K_{\eta\eta}= D\eta$; $K_{\eta\eta}= M(y-M\eta)(y-M\eta)=D\eta$;
- Совокупность всех корреляционных моментов, расположенных в квадратной таблице называется корреляционной матрицей системы:

$$K = \begin{bmatrix} k_{\xi\xi} k_{\xi\eta} \\ k_{\eta\xi} k_{\eta\eta} \end{bmatrix}.$$

Коэффициент корреляции

- Наличие размерности у корреляционного момента вызывает неудобства, поэтому вместо корреляционного момента используют коэффициент корреляции:

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma\xi\,\sigma\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi D\eta}} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{K_{\xi\xi}K_{\eta\eta}}}$$

Коэффициент корреляции обладает свойствами корреляционного момента:

- показывает меру линейной связи между случайными величинами:
- $r_{\xi\eta} = 0$, если ξ,η некоррелированные случайные величины;
- коэффициент корреляции системы симметричен: $r_{\xi\eta} = r_{\eta\xi}$;
- $/ r_{\xi\eta} / \le 1$; (1 – максимальное значение);
- Совокупность всех коэффициентов корреляции в виде таблице образуют нормированную корреляционную матрицу системы:

$$r = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r}_{\xi\eta} \\ \mathbf{r}_{\eta\xi} & 1 \end{bmatrix}.$$

Условное математическое ожидание; линейная регрессия

- Для дискретной ξ:

$$M(\eta/\xi = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x) = \varphi(x);$$

- Для непрерывной ξ :

$$M(\eta/\xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy = \varphi(x);$$

Функция регрессии показывает среднее значение η на ξ. С помощью регрессии осуществляется наилучший прогноз η по ξ.

- В практике функция регрессии относится к линейной:

$$\varphi(x)=\beta_0 + \beta_1 x;$$

$\beta_{0,}\ \beta_1$ – параметры – коэффициенты регрессии.

Коэффициенты регрессии подбирают так, чтобы обеспечить минимум среднего разброса η относительно прямой регрессии (метод наименьших квадратов): вводится уклонение η относительно прямой регрессии:

$$\Delta = (y - (\beta_0 + \beta_1 x)):$$

находим дисперсию:

$$\Delta^2(\beta_{0,}\ \beta_1) = M(y - (\beta_0 + \beta_1 x))^2 \min\rightarrow \beta_{0,}\ \beta_1 :$$

после преобразования получим:

$$\varphi(x)=\beta_0 + \beta_1 x = M\eta + r_{\xi\eta}\cdot\sigma\eta/\sigma\xi\cdot(x - M\xi).$$