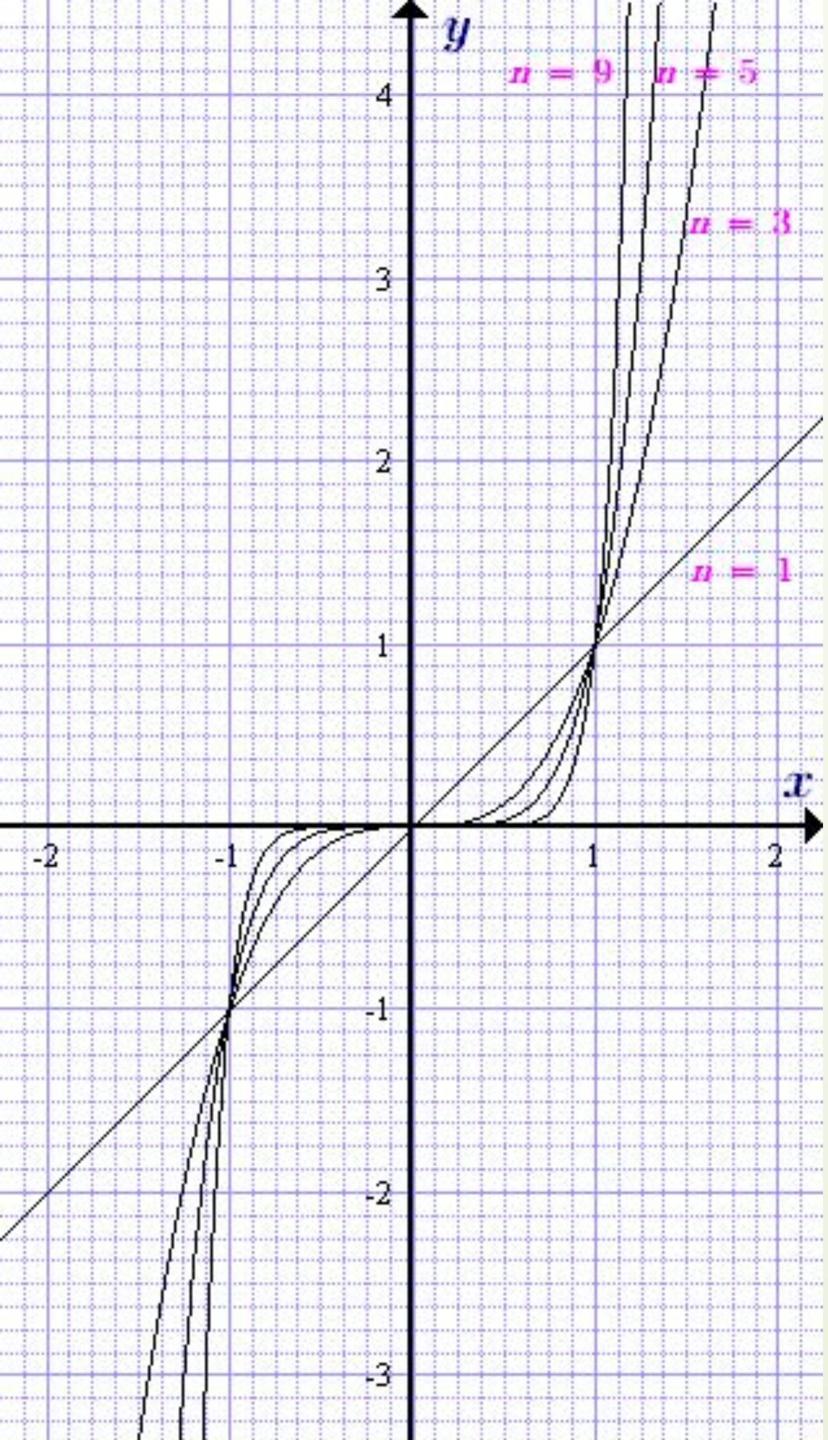
Степенные функции и их графики

МБОУ «СОШ №64» г. Чебоксары

Гаврилова Елена Варсонофьевна

Свойства основных элементарных функций :

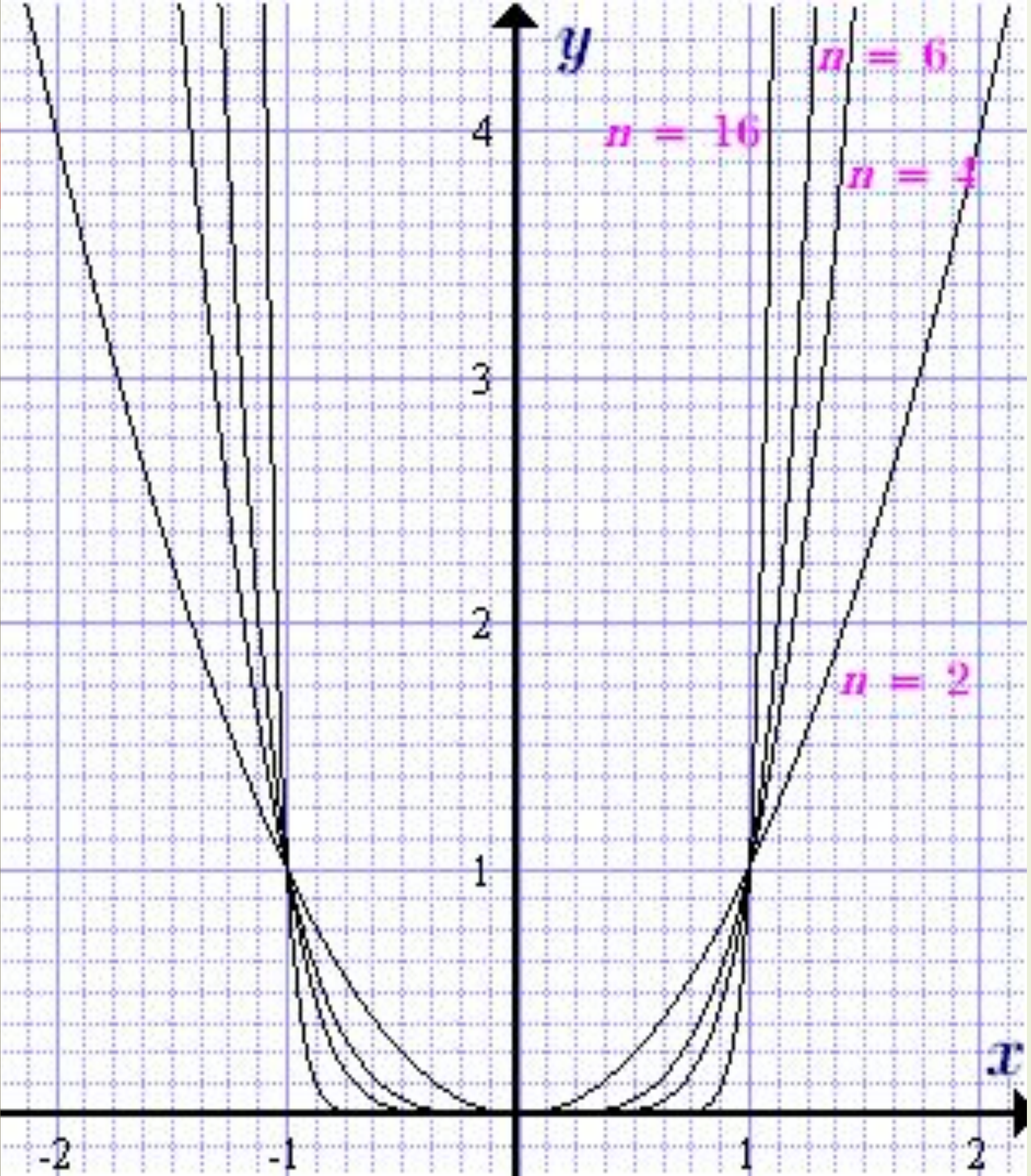
- область определения функции;
- поведение функции на границах области определения;
- четность и нечетность;
- область значений функции;
- промежутки возрастания и убывания, точки экстремума;
- асимптоты;
- особые свойства некоторых функций (например, наименьший положительный период у тригонометрических функций).



Степенная функция с нечетным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с натуральным нечетным показателем степени n = 1, 3, 5, ...

- Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (-\infty; +\infty)$
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$ и вогнутая при $x \in [0; +\infty)$ (кроме линейной функции).
- Точка *(0;0)* является точкой перегиба .
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(-1;-1)*, *(0;0)*, *(1;1)*.



Степенная функция с четным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с натуральным нечетным показателем степени n = 2, 4, 6, ...

Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значений: $y \in (0; +\infty)$.

Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.

Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$,

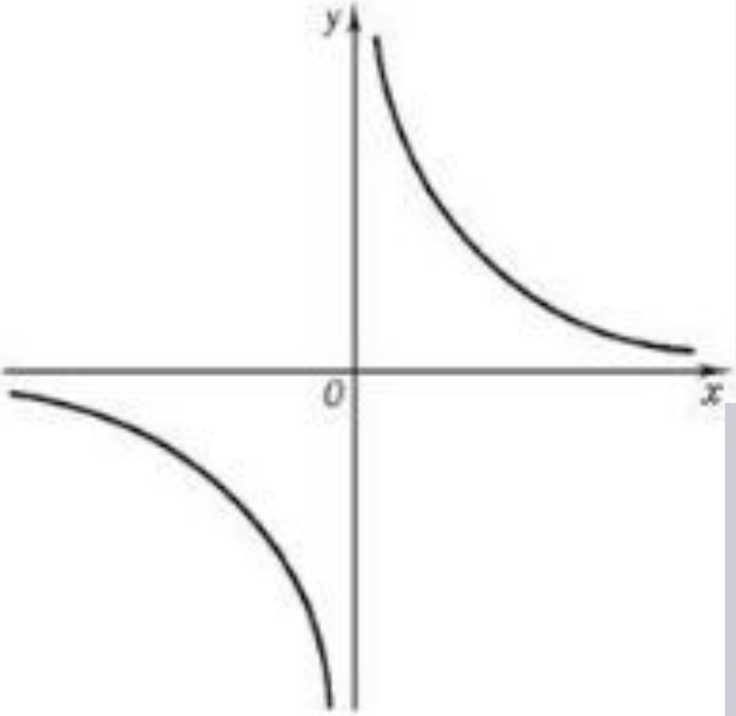
убывает при $x \in (-\infty; 0)$.

Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.

Точек перегиба нет.

Асимптот нет.

Функция проходит через точки (-1;1), (0;0), (1;1).



Степенная функция с нечетным отрицательным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ с натуральным нечетным показателем степени

n = -1,-3, ...

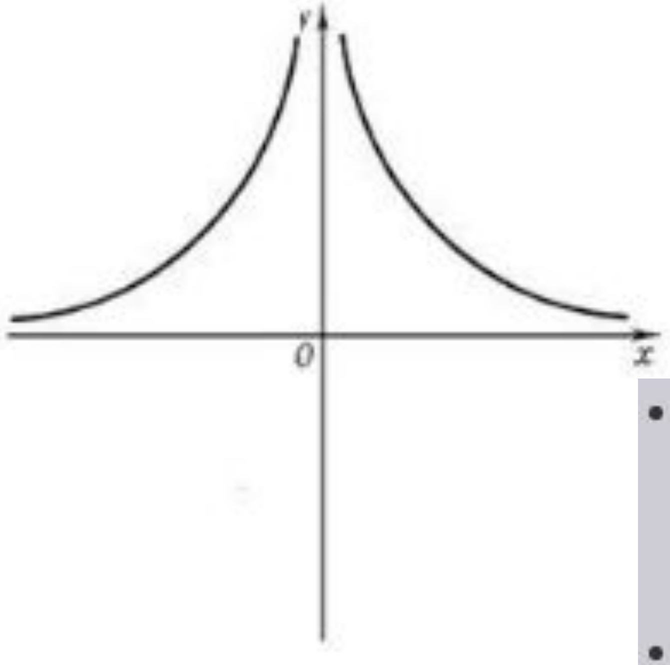
- Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

  При $x=0$ имеем разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} x^a = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при $a=-1,-3,-5,\ldots$. Следовательно, прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и вогнутая при $x \in (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$, так как

  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \to \infty} (x^a - kx) = 0 \quad \Rightarrow$$

  $$y = kx + b = 0$$

  при $a=-1,-3,-5,\ldots$.
- Функция проходит через точки $(-1;-1)$, $(1;1)$.



Степенная функция с четным отрицательным показателем.

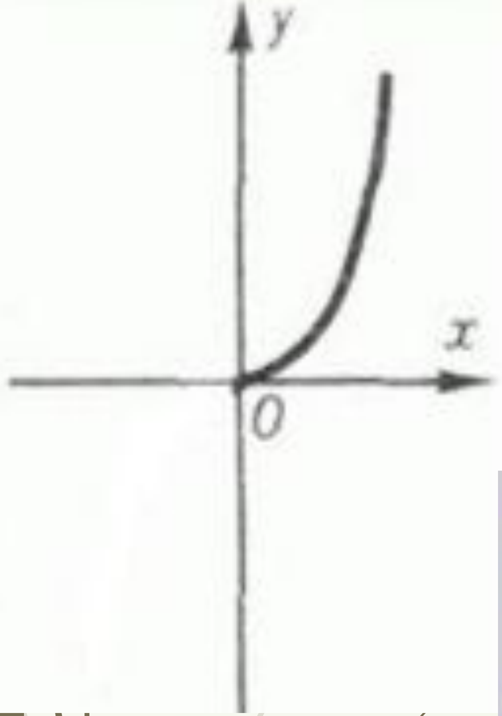
- Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

  При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} x^a = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при *a=-2,-4,-6,…*. Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0)$, убывает при $x \in (0; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*, так как

  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \to \infty}(x^a - kx) = 0 \quad \Rightarrow$$

  $$y = kx + b = 0$$

  при a=-2,-4,-6,….
- Функция проходит через точки *(-1;1)*, *(1;1)*.

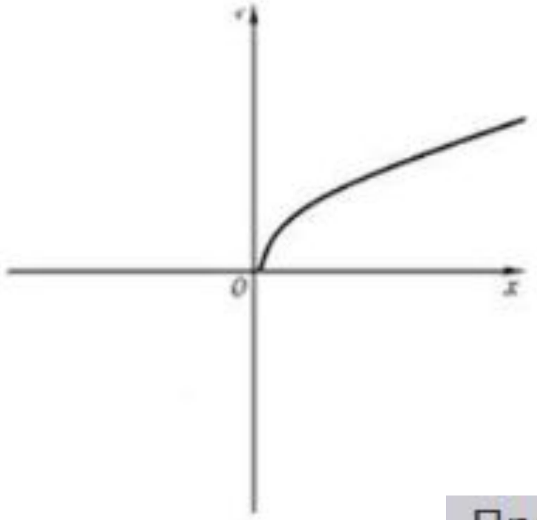


Степенная функция с нецелым рациональным или иррациональным показателем, большим единицы

При других значениях показателя степени *a*, $a > 1$ графики функции $y = x^a$ будут иметь схожий вид.

Свойства степенной функции при $a > 1$.

- Область определения: $x \in [0; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (0; +\infty)$, если $1 < a < 2$; при $x \in [0; +\infty)$, если $a > 2$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(0;0)*, *(1;1)*.

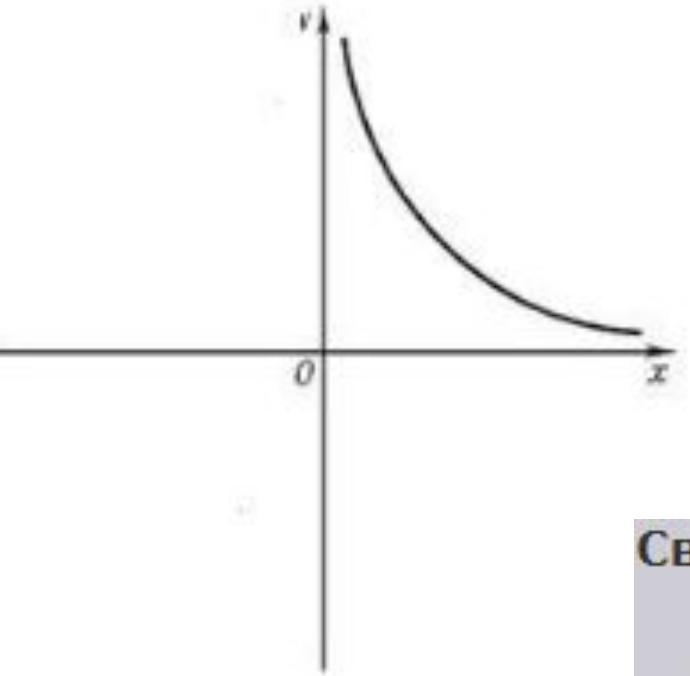


Степенная функция с рациональным или иррациональным показателем, значение которого больше нуля и меньше единицы.

При других значениях показателя степени а, $0 < a < 1$ графики функции $y = x^a$ будут иметь схожий вид.

Свойства степенной функции при $0 < a < 1$**.**

- Область определения: $x \in [0; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(0;0)*, *(1;1)*.



Степенная функция с действительным показателем, который больше минус единицы и меньше нуля.

Свойства степенной функции с показателем a, $-1 < a < 0$.

- Область определения: $x \in (0;+\infty)$.

  $\lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при $-1 < a < 0$, следовательно, *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (0;+\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция убывает при $x \in (0;+\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y=0*.
- Функция проходит через точку *(1;1)*.