

## Исследование функций с помощью производных

Т1.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<) \Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

До-во Т1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2. \Rightarrow$  (Т.Л.)  
 $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0 (<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
Т. доказана.

Исследование функций с помощью производных

Т1.  $f(x)$ :  $\forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<)$   $\Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

До-во Т1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2. \Rightarrow$  (Т.Л.)  
 $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
Т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, (-\infty, +\infty)$

## Исследование функций с помощью производных

Т.1.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<) \Rightarrow f(x)$  — строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

Опр.  $f(x)$  опред. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  — локальн. т. макс. (т. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0: \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) (\leq)$

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  — локальн. т. строго макс. (т. стр. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x) (<)$ .

Макс. и мин. — экстремумы.  
Стр. макс. и стр. мин. — строгий экстр.

} Это — локальные  
экстремумы

Д-во т.1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2. \Rightarrow (Т.1.)$   
 $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
Т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, (-\infty, +\infty)$

## Исследование функций с помощью производных

Т.1.  $f(x)$ :  $\forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<) \Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

Опр.  $f(x)$  опред. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв.: т. макс. (т. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) (\leq)$

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  - назыв. т. строгого макс. (т. стр. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x) (<)$ .

Макс. и мин. - экстремумы.

Стр. макс. и стр. мин. - строгие экстр.

} Это - локальные  
экстремумы

Т.2.  $x_0$  - т. экстр. для  $f(x) \Rightarrow$  или  $\exists f'(x_0)$ , или  $f'(x_0) = 0$ .

Д-во т.1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2 \Rightarrow$  (т.л.)

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$$

т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, (-\infty, +\infty)$

Д-во т.2.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow$  т. верно.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow$  (т. ф.)  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$  - строго возр.

## Исследование функций с помощью производных

Т1.  $f(x)$ :  $\forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0$  ( $<$ )  $\Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв. т. макс. (т. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0$ :  $\forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$  ( $\leq$ )

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв. т. строго макс. (т. стр. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0$ :  $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)$  ( $<$ ).

Макс. и мин. - экстремумы.  
Стр. макс. и стр. мин. - строгие экстр. } Это - локальные экстремумы

Т2.  $x_0$  - т. экстр. для  $f(x)$ .  $\Rightarrow$  или  $\exists f'(x_0)$ , или  $f'(x_0) = 0$ .

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв. стационарной (критической) точкой для  $f(x)$  если или  $\exists f'(x_0)$  или  $f'(x_0) = 0$ .

Д-во Т1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ :  $x_1 < x_2 \Rightarrow$  (Т1, Л.)  
 $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0 (<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$ ,  $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
Т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $(-\infty, +\infty)$

Д-во Т2.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow$  т. верна.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow$  (т. ф.)  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$   
Т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$  - строго возр.

## Исследование функций с помощью производных

Т1.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<) \Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

Опр.  $f(x)$  опред. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв. т. макс. (т. мин.),

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0: \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) (\leq)$

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  - назыв. т. строго макс. (т. стр. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x) (<)$ .

Макс. и мин. - экстремумы.  
Стр. макс. и стр. мин. - строгий экстр.

} Это - локальные  
экстремумы

Т2.  $x_0$  - т. экстр. для  $f(x) \Rightarrow$  или  $\bar{\exists} f'(x_0)$ , или  $f'(x_0) = 0$ .

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв. стационарной (критической) точкой для  $f(x)$  если или  $\bar{\exists} f'(x_0)$  или  $f'(x_0) = 0$ .

Т3.  $f(x): f(x)$  выпр. при  $x = x_0$ ,  $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\exists f'(x) < 0 (>); \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \exists f'(x) > 0 (<)$

$\Rightarrow x_0$  - т. стр. мин. (стр. макс.) для  $f(x)$ .

$D$ -во т1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2 \Rightarrow (т. л.)$   
 $\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{> 0 (<)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0}$ ,  $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $(-\infty, +\infty)$

$D$ -во т2.  $\bar{\exists} f'(x_0) \Rightarrow$  т. верна.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow (т. ф.) \Rightarrow f'(x_0) = 0$   
т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$  - строго возр.

$D$ -во т3.  $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (т. л. арг.) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) > 0 (<)$ ,  $\xi \in (x_0, x)$ .

т. доказана

Исследование функций с помощью производных

D-во т1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2. \Rightarrow (T, \Lambda.)$

T1.  $f(x) : \forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<) \Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$ ,  $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
T. доказана.

Опр.  $f(x)$  опред. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв.: т. макс. (т. мин.)  
для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) (\leq)$

Обратное неверно:  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, (-\infty, +\infty)$

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$ -назыв. т. строгого макс. (т. стр. мин.)  
для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x) (<)$ .

D-во т2.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow$  т. верно.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow (т. ф.) \Rightarrow f'(x_0) = 0$   
T. доказана.

Макс. и мин. - экстремумы.  
Стр. макс. и стр. мин. - строгий экстр.

} Это - локальные экстремумы

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$  - строго возр.

T2.  $x_0$  - т. экстр. для  $f(x) \Rightarrow$  или  $\exists f'(x_0)$ , или  $f'(x_0) = 0$ .

D-во т3.  $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (T, \Lambda \text{ алг.}) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) > 0 (<)$ ,  $\xi \in (x_0, x)$ .

Опр.  $f(x)$  опр. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  назыв. стационарной (критической) точкой для  $f(x)$  если или  $\exists f'(x_0)$  или  $f'(x_0) = 0$ .

D-во т4.  $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x-x_0)^{n-1} +$   
 $+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + r_n(x, f)$ ,  $r_n(x, f) = o((x-x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$   
T. доказана

T3.  $f(x) : f(x)$  выпр. при  $x = x_0, \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$   
 $\exists f'(x) < 0 (>); \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \exists f'(x) > 0 (<)$   
 $\Rightarrow x_0$  - т. стр. мин. (стр. макс.) для  $f(x)$ .

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + r_n(x, f) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$

$\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ sgn} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \text{sgn} f^{(n)}(x_0)$

T4.  $f(x) : \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$   
 $\Rightarrow$  если  $n$ -чётное, то  $x_0$  - стр. экстр. (стр. мин. при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , стр. макс. при  $f^{(n)}(x_0) < 0$ ),  
если  $n$ -нечётное, то экстремума нет.

$n$ -чётное, т.е.  $(x-x_0)^n > 0 \Rightarrow \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta$   
 $f(x) > f(x_0) (<)$ , т.е. экстремум.  
 $n$ -неч.  $\Rightarrow f(x) - f(x_0)$  меняет знак при переходе через  $x_0$ ,  
т.е. нет экстремума.

T. доказана

Исследование функций с помощью производных

Т.1.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<) \Rightarrow f(x)$  - строго  
возрастает (строго убывает) на  $(a, b)$ .

Опр.  $f(x)$  определ. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  - экстрем. т. макс. (т. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0: \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x) (\leq)$

Опр.  $f(x)$  определ. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  - экстрем. т. строго макс. (т. стр. мин.)

для  $f(x)$ , если  $\exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x) (<)$ .

Макс. и мин. - экстремумы.  
Стр. макс. и стр. мин. - строгие экстр.

} Это - локальные экстремумы

Т.2.  $x_0$  - т. экстр. для  $f(x) \Rightarrow$  или  $\exists f'(x_0)$ , или  $f'(x_0) = 0$ .

Опр.  $f(x)$  определ. в окр.  $x_0$ .  $x_0$  - экстрем. стационарной (критической) точки для  $f(x)$  если или  $\exists f'(x_0)$  или  $f'(x_0) = 0$ .

Т.3.  $f(x): f(x)$  выпр. при  $x = x_0, \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\exists f'(x) < 0 (>); \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \exists f'(x) > 0 (<)$

$\Rightarrow x_0$  - т. стр. мин. (стр. макс.) для  $f(x)$ .

Т.4.  $f(x): \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2: f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$  если  $n$  - четное, то  $x_0$  - стр. экстр. (стр. мин. при  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , стр. макс. при  $f^{(n)}(x_0) < 0$ ),  
если  $n$  - нечетное, то экстремума нет.

Сл.  $f(x): f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$  - стр. минимум

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$  - стр. максимум

Д-во т.1.  $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2 \Rightarrow (Т.Л.) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$   
Т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2, (-\infty, +\infty)$

Д-во т.2.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow$  т. верно.  $\exists f'(x_0) \Rightarrow (Т.Ф.) \Rightarrow f'(x_0) = 0$   
Т. доказана.

Обратное неверно:  $f(x) = x^3$  - строго выпр.

Д-во т.3.  $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (Т.Л. алг.) \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) > 0 (<), \xi \in (x_0, x)$

Д-во т.4.  $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x, f), r_n(x, f) = o((x-x_0)^n)$  при  $x \rightarrow x_0$   
Т. доказана

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x, f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0:$

$\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \operatorname{sgn} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$

$n$  - четное, т.е.  $(x-x_0)^n > 0 \Rightarrow \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta f(x) > f(x_0) (<)$ , т.е. экстремум.

$n$  - неч.  $\Rightarrow f(x) - f(x_0)$  меняет знак при переходе через  $x_0$ , т.е. нет экстремума.

Т. доказана



Опр.  $f(x)$  опред. на  $(a, b)$ .  $f(x)$  назыв. воспуклой  
вверх (воис. вниз, стр. воис. вверх, стр. воис. вниз)

на  $(a, b)$ , если  $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

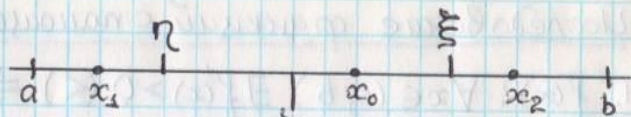
$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} \quad (\leq, >, <)$$

Опр.  $f(x)$  опред. на  $(a, b)$ .  $f(x)$  назыв. вогнута  
 вверх (вогн. вниз, стр. вогн. вверх, стр. вогн. вниз)  
 на  $(a, b)$ , если  $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} (\leq, >, <)$$

Л5.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<). \Rightarrow$   
 $f(x)$  строго вогн. вниз (стр. вогн. вверх) на  $(a, b)$

Д-во Л5.



$$\begin{aligned} \forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \\ f(x_0) - \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= \\ = \frac{f(x_0)(x_0 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)(x_0 - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= \\ = \frac{(f(x_0) - f(x_2))(x_0 - x_1) + (f(x_0) - f(x_1))(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= (\text{Т.Л.}) = \\ = \frac{f'(\xi)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) + f'(\eta)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= \\ = \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} \stackrel{<0}{=} \stackrel{>0}{f''(\xi)} \stackrel{>0}{(\eta - \xi)} \stackrel{>0}{(x_0 - x_1)} \stackrel{>0}{(x_2 - x_0)} &= \\ & \stackrel{>0}{x_2 - x_1} \cdot \end{aligned}$$

Т. доказано.

Опр.  $f(x)$  опред. на  $(a, b)$ .  $f(x)$  назыв. вогнута  
 вверх (вогн. вниз, вып. вогн. вверх, вып. вогн. вниз)

на  $(a, b)$ , если  $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} (\leq, >, <)$$

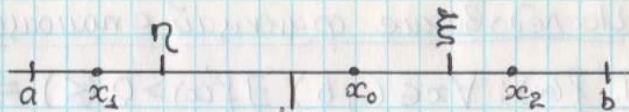
T5.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<). \Rightarrow$

$f(x)$  строго вогн. вниз (стр. вогн. вверх) на  $(a, b)$ .

T6.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<). \Rightarrow$

$$\forall x_0, x_1 \in (a, b): x_1 \neq x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) (<)$$

До-во T5.

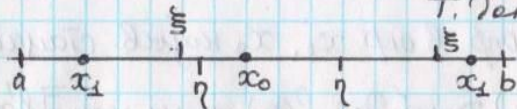


$$\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b$$

$$\begin{aligned} f(x_0) - \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= \\ = \frac{f(x_0)(x_0 - x_1) + f(x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)(x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= \\ = \frac{(f(x_0) - f(x_2))(x_0 - x_1) + (f(x_0) - f(x_1))(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= (\text{Т.Л.}) = \\ = \frac{f'(\xi)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) + f'(\eta)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &= \\ = \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} &\stackrel{\text{Т.Л.}}{=} \underbrace{f''(\xi)}_{< 0} \underbrace{(\eta - \xi)}_{> 0} \underbrace{(x_0 - x_1)}_{> 0} \underbrace{(x_2 - x_0)}_{> 0} \end{aligned}$$

Т. Доказана.

До-во T6.



$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) &\stackrel{\text{Т.Л.}}{=} f'(\xi)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ = (f'(\xi) - f'(x_0))(x_1 - x_0) &\stackrel{\text{Т.Л.}}{=} f''(\eta) \underbrace{(\xi - x_0)}_{> 0} \underbrace{(x_1 - x_0)}_{> 0} \end{aligned}$$

Т. Доказана

Это значит, что график  $y = f(x)$  лежит выше (ниже) касательной

Опр.  $f(x)$  опред. на  $(a, b)$ .  $f(x)$  назыв. **вогнутой** вверх (воис. вниз, стр. воис. вверх, стр. воис. вниз) на  $(a, b)$ , если  $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} (\leq, >, <)$$

Т5.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f'(x) > 0 (<). \Rightarrow$

$f(x)$  строго воис. вниз (стр. воис. вверх) на  $(a, b)$ .

Т6.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<). \Rightarrow$

$$\forall x_0, x_1 \in (a, b): x_1 \neq x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) (<)$$

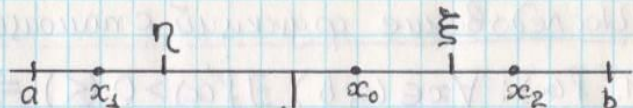
Опр.  $f(x)$  непр. в окр.  $x_0$  и  $y = f(x)$  имеет касат. при  $x = x_0$

$x_0$  - Т. перегиба  $y = f(x)$ , если  $x_0$  одновременно конец

интервала стр. воис. вверх и конец интервала стр. воис. вниз.

Т7.  $f(x): f''(x)$  непр. на  $(a, b)$ ,  $x_0$  - Т. перегиба,  $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ .

Д-во Т5.



$$\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b$$

$$f(x_0) - \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{f(x_0)(x_0 - x_1) + f(x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)(x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

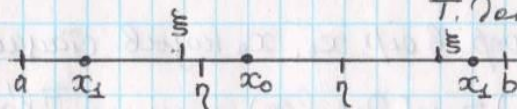
$$= \frac{(f(x_0) - f(x_2))(x_0 - x_1) + (f(x_0) - f(x_1))(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = (\text{Т.Л.}) =$$

$$= \frac{f'(\xi)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) + f'(\eta)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} \stackrel{\text{Т.Л.}}{=} \frac{f''(\xi)(\eta - \xi)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{\frac{x_2 - x_1}{>0}}$$

Т. доказано.

Д-во Т6.



$$f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \stackrel{\text{Т.Л.}}{=} f'(\xi)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= (f'(\xi) - f'(x_0))(x_1 - x_0) \stackrel{\text{Т.Л.}}{=} \frac{f''(\eta)(\xi - x_0)(x_1 - x_0)}{>0}$$

Т. доказано.

Это значит, что график  $y = f(x)$  лежит выше (ниже) касательной

Д-во Т7.  $f''(x_0) \neq 0 \stackrel{(\text{непр.})}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn} f''(x_0)$

$\Rightarrow$  (Т5)  $\Rightarrow f(x)$  стр. воис. на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Т. доказано.

Опр.  $f(x)$  опред. на  $(a, b)$ .  $f(x)$  назыв. **вогнута** вверх (вопн. вниз, стр. вопн. вверх, стр. вопн. вниз) на  $(a, b)$ , если  $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} \quad (\leq, >, <)$$

T5.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<)$ .  $\Rightarrow$   
 $f(x)$  строго вопн. вниз (стр. вопн. вверх) на  $(a, b)$ .

T6.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<)$ .  $\Rightarrow$   
 $\forall x_0, x_1 \in (a, b): x_1 \neq x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) (<)$

Опр.  $f(x)$  непр. в окр.  $x_0$  и  $y = f(x)$  имеет касат. при  $x = x_0$   
 $x_0$  - Т. перегиба  $y = f(x)$ , если  $x_0$  одновременно конец интервала стр. вопн. вверх и конец интервала стр. вопн. вниз.

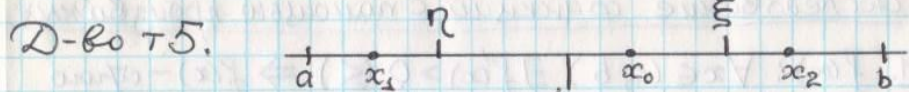
T7.  $f(x): f''(x)$  непр. на  $(a, b)$ ,  $x_0$  - Т. перегиба  $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ .

T8.  $f(x)$  непр. в окр.  $x_0$ ,  $\exists$  касат. при  $x = x_0 \exists \delta > 0: \forall x$

$$0 < |x - x_0| < \delta \exists f''(x): \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f''(x) < 0 (>)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f''(x) > 0 (<)$$

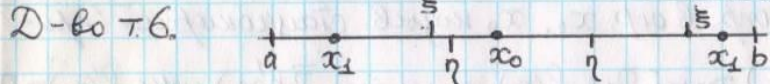
$\Rightarrow x_0$  - Т. перегиба.



$$\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b$$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0) - \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1}}{x_2 - x_1} = \\ & = \frac{f(x_0)(x_0 - x_1) + f(x_0) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)(x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = \\ & = \frac{(f(x_0) - f(x_2))(x_0 - x_1) + (f(x_0) - f(x_1))(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = (\text{Т.Л.}) = \\ & = \frac{f'(\xi)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) + f'(\eta)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = \\ & = \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_0 - x_1)(x_2 - x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f''(\xi) \underbrace{(\eta - \xi)}_{< 0} \underbrace{(x_0 - x_1)}_{> 0} \underbrace{(x_2 - x_0)}_{> 0}}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Т. доказана.



$$\begin{aligned} & f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f'(\xi)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) = \\ & = (f'(\xi) - f'(x_0))(x_1 - x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f''(\eta) \underbrace{(\xi - x_0)}_{> 0} \underbrace{(x_1 - x_0)}_{> 0} \end{aligned}$$

Т. доказана

Это значит, что график  $y = f(x)$  лежит выше (ниже) касательной

Д-во T7.  $f''(x_0) \neq 0$  (непр.)  $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn} f''(x_0)$

$\Rightarrow$  (T5)  $\Rightarrow f(x)$  стр. вопн. на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Т. доказана.

Д-во T8.  $f(x)$  стр. вогнута на  $(x_0 - \delta, x_0)$  и на  $(x_0, x_0 + \delta)$ , применим в разные стороны. Т. доказана

Опр.  $f(x)$  опред. на  $(a, b)$ .  $f(x)$  назыв. **вогнутая** вверх (вопн. вниз, стр. вопн. вверх, стр. вопн. вниз) на  $(a, b)$ , если  $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} (\leq, >, <)$$

Т5.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<).$   $\Rightarrow$   
 $f(x)$  строго вопн. вниз (стр. вопн. вверх) на  $(a, b)$ .

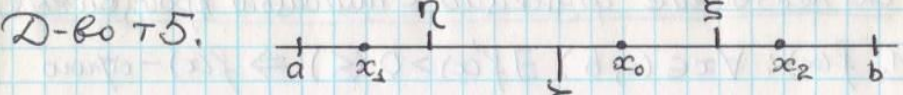
Т6.  $f(x): \forall x \in (a, b) \exists f''(x) > 0 (<).$   $\Rightarrow$   
 $\forall x_0, x_1 \in (a, b): x_1 \neq x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) (<)$

Опр.  $f(x)$  непр. в окр.  $x_0$  и  $y = f(x)$  имеет касат. при  $x = x_0$ .  
 $x_0$  - Т. перегиба  $y = f(x)$ , если  $x_0$  одновременно конец интервала стр. вопн. вверх и конец интервала стр. вопн. вниз.

Т7.  $f(x): f''(x)$  непр. на  $(a, b)$ ,  $x_0$  - Т. перегиба,  $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ .

Т8.  $f(x)$  непр. в окр.  $x_0$ ,  $\exists$  касат. при  $x = x_0 \exists \delta > 0: \forall x$   
 $0 < |x - x_0| < \delta \exists f''(x): \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) f''(x) < 0 (>)$   
 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) f''(x) > 0 (<)$   
 $\Rightarrow x_0$  - Т. перегиба.

Т9.  $f(x): f''(x)$  непр. в окр.  $x_0$ ,  $f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$   
 $\Rightarrow x_0$  - Т. перегиба.



$$\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b$$

$$f(x_0) - \frac{f(x_2) \cdot (x_0 - x_1) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

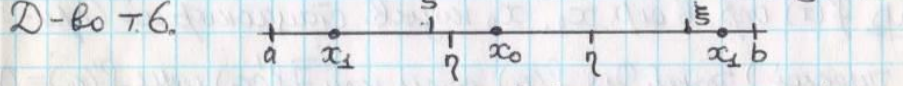
$$= \frac{f(x_0)(x_0 - x_1) + f(x_0)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_2)(x_0 - x_1) + f(x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f(x_0) - f(x_2))(x_0 - x_1) + (f(x_0) - f(x_1))(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} = (\text{Т.Л.}) =$$

$$= \frac{f'(\xi)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) + f'(\eta)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(f'(\eta) - f'(\xi))(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} \stackrel{\text{Т.Л.}}{=} \frac{f''(\xi)(\eta - \xi)(x_0 - x_1)(x_2 - x_0)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{> 0}}$$

Т. Доказана.



$$f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \stackrel{\text{Т.Л.}}{=} f'(\xi)(x_1 - x_0) - f'(x_0)(x_1 - x_0) =$$

$$= (f'(\xi) - f'(x_0))(x_1 - x_0) \stackrel{\text{Т.Л.}}{=} f''(\eta)(\xi - x_0)(x_1 - x_0)$$

Т. Доказана

Это значит, что график  $y = f(x)$  лежит выше (ниже) касательной  
 Д-во Т. 7.  $f''(x_0) \neq 0$   $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \text{sgn} f''(x) = \text{sgn} f''(x_0)$   
 $\Rightarrow$  (Т5)  $\Rightarrow f(x)$  стр. вопн. на  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Т. Доказана.

Д-во Т8.  $f(x)$  стр. вогнуто на  $(x_0 - \delta, x_0)$  и на  $(x_0, x_0 + \delta)$ , применим в разные стороны. Т. Доказана

Д-во Т9.  $0 \neq f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{x - x_0}$   
 $\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \text{sgn} \frac{f''(x)}{x - x_0} = \text{sgn} f'''(x_0) \Rightarrow f''(x)$   
 меняет знак при переходе через  $x_0 \Rightarrow x_0$  - Т. перега. Т. Доказана.