Исследование функций с помощью производных

T1. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x) > 0\ (<) \Rightarrow f(x)$ - строго возрастает (строго убывает) на (a,b).

Д-во Т1. $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2. \Rightarrow$ (Т. Л.)

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0},\ \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$$

Т. доказана.

Исследование функций с помощью производных

<u>Т1.</u> $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x) > 0\ (<) \Rightarrow f(x)$ – строго возрастает (строго убывает) на (a,b).

Д-во Т1. $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2. \Rightarrow$ (Т. Л.)

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \ \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$

Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $(-\infty, +\infty)$

Исследование функций с помощью производных

T1. $f(x)$: $\forall x \in (a, b)$ $\exists f'(x) > 0$ $(<)$ $\Rightarrow f(x)$ – строго возрастает (строго убывает) на (a, b).

Опр. $f(x)$ опред. в окр. x_0. x_0 назыв. т. макс. (т. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$ $(\leq)$

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 – назыв. т. строгого макс. (т. стр. мин) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)$ $(<)$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Макс. и мин. – экстремум.}\\ \text{Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстр.}\end{array}\right\}$ Это – локальные экстремумы

Д-во т1. $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2. \Rightarrow$ (Т. Л.)

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0\,(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$, $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $(-\infty, +\infty)$

Исследование функций с помощью производных

Т1. $f(x)$: $\forall x \in (a, b)\ \exists f'(x) > 0\ (<) \Rightarrow f(x)$ – строго возрастает (строго убывает) на (a, b).

Опр. $f(x)$ опред. в окр. x_0. x_0 назыв. т. макс. (т. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)\ (\leq)$

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 – назыв. т. строгого макс. (т. стр. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)\ (<)$.

Макс. и мин. — экстремумы. } Это – локальные
Стр. макс. и стр. мин. – строгие экстр. } экстремумы

Т. 2. x_0 – т. экстр. для $f(x)$. $\Rightarrow$ или $\nexists f'(x_0)$, или $f'(x_0) = 0$.

Д-во Т1. $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2. \Rightarrow$ (т. Л.)

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0},\quad \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$$

Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $(-\infty, +\infty)$

Д-во Т2. $\nexists f'(x_0) \Rightarrow$ т. верна. $\exists f'(x_0) \Rightarrow$ (т. Ф.) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$ – строго возр.

Исследование функций с помощью производных

Т1. $f(x): \forall x\in(a,b)\ \exists f'(x)>0\ (<) \Rightarrow f(x)$ — строго возрастает (строго убывает) на (a,b).

Опр. $f(x)$ опред. в окр. x_0. x_0 называется т. макс. (т. мин.) для $f(x)$, если $\exists\delta>0: \forall x, |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x_0)\geq f(x)$ $(\leq)$

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 — называется т. строгого макс. (т. стр. мин) для $f(x)$, если $\exists\delta>0: \forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x_0)>f(x)$ $(<)$.

Макс. и мин. — экстремумы.
Стр. макс. и стр. мин. — строгие экстр.
} Это — локальные экстремумы

Т.2. x_0 — т. экстр. для $f(x) \Rightarrow$ или $\nexists f'(x_0)$, или $f'(x_0)=0$.

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 называется стационарной (критической) точкой для $f(x_0)$ если или $\nexists f'(x_0)$ или $f'(x_0)=0$.

Д-во Т1. $\forall x_1,x_2\in(a,b): x_1<x_2 \Rightarrow$ (Т. Л.)

$$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)}\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0},\quad \xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$$

Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $(-\infty,+\infty)$

Д-во Т2. $\nexists f'(x_0)\Rightarrow$ Т. верна. $\exists f'(x_0)\Rightarrow$ (Т. Ф.) $\Rightarrow f'(x_0)=0$

Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x)=x^3$ — строго возр.

Исследование функций с помощью производных

Т1. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x) > 0\ (<) \Rightarrow f(x)$ – строго возрастает (строго убывает) на (a,b).

Опр. $f(x)$ опред. в окр. x_0. x_0 назыв. т. макс. (т. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)\ (\leq)$

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 – назыв. т. строгого макс. (т. стр. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)\ (<)$.

Макс. и мин. – экстремум.
Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстр.
} Это – локальные экстремумы

Т. 2. x_0 – т. экстр. для $f(x) \Rightarrow$ или $\not\exists f'(x_0)$, или $f'(x_0) = 0$.

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 назыв. стационарной (критической) точкой для $f(x_0)$ если или $\not\exists f'(x_0)$ либо $f'(x_0) = 0$.

Т 3. $f(x): f(x)$ непр. при $x = x_0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $\exists f'(x) < 0\ (>)$; $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ \exists f'(x) > 0\ (<)$
$\Rightarrow x_0$ – т. стр. мин. (стр. макс.) для $f(x)$.

Д-во Т1. $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow$ (Т. Л.)
$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0\,(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}$, $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $(-\infty, +\infty)$

Д-во Т2. $\not\exists f'(x_0) \Rightarrow$ Т. верна. $\exists f'(x_0) \Rightarrow$ (Т. Ф.) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$ – строго возр.

Д-во Т3. $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (Т. Лагр.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) > 0\ (<)$, $\xi \in (x_0, x)$.

Т. доказана

Исследование функций с помощью производных

Т1. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x) > 0\ (<) \Rightarrow f(x)$ - строго возрастает (строго убывает) на (a,b).

Опр. $f(x)$ опред. в окр. x_0. x_0 назыв. т. макс. (т. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)\ (\leq)$

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0-назыв. т. строгого макс. (т. стр. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)\ (<)$.

Макс. и мин. — экстремум.
Стр. макс. и стр. мин. - строгий экстр. } Это - локальные экстремумы

Т.2. x_0 - т. экстр. для $f(x)$. $\Rightarrow$ или $\not\exists f'(x_0)$, или $f'(x_0) = 0$.

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 назыв. стационарной (критической) точкой для $f(x_0)$ если или $\not\exists f'(x_0)$ или $f'(x_0) = 0$.

Т3. $f(x): f(x)$ непр. при $x = x_0$, $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $\exists f'(x) < 0\ (>)$; $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)\ \exists f'(x) > 0\ (<)$
$\Rightarrow x_0$ - т. стр. мин. (стр. макс.) для $f(x)$.

Т4. $f(x): \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$
$\Rightarrow$ если n-чётное, то x_0 - стр. экстр. (стр. мин. при $f^{(n)}(x_0) > 0$, стр. макс. при $f^{(n)}(x_0) < 0$), если n-нечётное, то экстремума нет.

Д-во Т1. $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2 \Rightarrow$ (т. Л.)
$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0\,(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0},\ \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$$
Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $(-\infty, +\infty)$

Д-во Т2. $\not\exists f'(x_0) \Rightarrow$ т. верна. $\exists f'(x_0) \Rightarrow$ (т. Ф.) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$ - строго возр.

Д-во Т3. $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (т. Лагр.) $\Rightarrow$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) > 0\ (<),\ \xi \in (x_0, x).$$
Т. доказана

Д-во Т.4. $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x,f)$, $r_n(x,f) = \bar{\bar{o}}((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$
$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x,f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$$
$$\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \quad \operatorname{sgn} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)^n} = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$$
n - чётное, т.е. $(x-x_0)^n > 0 \Rightarrow \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta$ $f(x) > f(x_0)\ (<)$, т.е. экстремум.

n - неч. $\Rightarrow f(x) - f(x_0)$ меняет знак при переходе через x_0, т.е. нет экстремума.

Т. доказана

Исследование функций с помощью производных

Т1. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f'(x) > 0\ (<) \Rightarrow f(x)$ – строго возрастает (строго убывает) на (a,b).

Опр. $f(x)$ опред. в окр. x_0. x_0 называв. т. макс. (т. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0: \forall x, |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x)$ ($\leq$)

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 – называв. т. строгого макс. (т. стр. мин.) для $f(x)$, если $\exists \delta > 0: \forall x, 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) > f(x)$ ($<$).

Макс. и мин. – экстремум. Стр. макс. и стр. мин. – строгий экстр. } это – локальные экстремумы

Т.2. x_0 – т. экстр. для $f(x) \Rightarrow$ или $\overline{\exists} f'(x_0)$, или $f'(x_0) = 0$.

Опр. $f(x)$ опр. в окр. x_0. x_0 называв. стационарной (критической) точкой для $f(x_0)$ если или $\overline{\exists} f'(x_0)$ или $f'(x_0) = 0$.

Т3. $f(x): f(x)$ непр. при $x = x_0$, $\exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $\exists f'(x) < 0\ (>)$; $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ \exists f'(x) > 0\ (<)$ $\Rightarrow x_0$ – т. стр. мин. (стр. макс.) для $f(x)$.

Т4. $f(x): \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2: f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ если n – чётное, то x_0 – стр. экстр. (стр. мин. при $f^{(n)}(x_0) > 0$, стр. макс. при $f^{(n)}(x_0) < 0$), если n – нечётное, то экстремума нет.

Сл. $f(x): f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ – стр. минимум
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ – стр. максимум

Д-во Т1. $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 < x_2 \Rightarrow$ (Т. Л.)
$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0(<0)} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}, \ \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$$
Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $(-\infty, +\infty)$

Д-во Т2. $\overline{\exists} f'(x_0) \Rightarrow$ Т. верна. $\exists f'(x_0) \Rightarrow$ (Т. Ф.) $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
Т. доказана.

Обратное неверно: $f(x) = x^3$ – строго возр.

Д-во Т3. $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$ (Т. Лагр.) $\Rightarrow$
$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0) > 0\ (<), \ \xi \in (x_0, x).$$
Т. доказана

Д-во Т.4. $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x, f)$, $r_n(x,f) = \overline{o}((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$
$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x,f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0:$$
$$\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \quad \operatorname{sgn} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0)$$
n – чётное, т.е. $(x - x_0)^n > 0 \Rightarrow \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta$ $f(x) > f(x_0)$ ($<$), т.е. экстремум.

n – неч. $\Rightarrow f(x) - f(x_0)$ меняет знак при переходе через x_0, т.е. нет экстремума.

Т. доказана

Опр. $f(x)$ опред. на (a, b). $f(x)$ называется. выпуклой вверх (вып. вниз, стр. вып. вверх, стр. вып. вниз) на (a, b), если $\forall x_0, x_1, x_2$: $a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

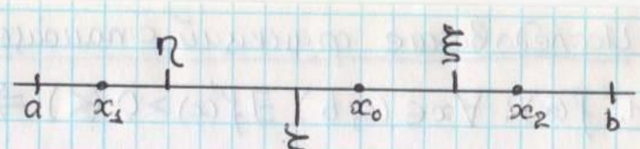
$$f(x_0) \geqslant \frac{f(x_2)\cdot(x_0 - x_1) + f(x_1)\cdot(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} \quad (\leqslant, >, <)$$

Опр. $f(x)$ опред. на (a,b). $f(x)$ назыв. выпуклой вверх (вып. вниз, стр. вып. вверх, стр. вып. вниз) на (a,b), если $\forall x_0, x_1, x_2 : a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \quad (\leq, >, <)$$

Т5. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f''(x) > 0\ (<). \Rightarrow$
$f(x)$ строго вып. вниз (стр. вып. вверх) на (a,b).

Д-во Т5.



$\forall x_0, x_1, x_2 : a < x_1 < x_0 < x_2 < b$

$$f(x_0) - \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{f(x_0)(x_0-x_1)+f(x_0)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_2)(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(f(x_0)-f(x_2))(x_0-x_1)+(f(x_0)-f(x_1))(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \overset{(\text{Т.Л.})}{=}$$

$$= \frac{f'(\xi)(x_0-x_2)(x_0-x_1)+f'(\eta)(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(f'(\eta)-f'(\xi))(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \overset{\text{Т.Л.}}{=} \frac{f''(\xi)\overbrace{(\eta-\xi)}^{<0}\overbrace{(x_0-x_1)}^{>0}\overbrace{(x_2-x_0)}^{>0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}.$$

Т. доказана.

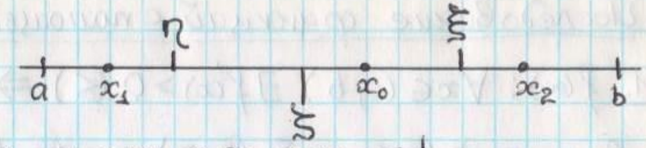
Опр. $f(x)$ опред. на (a,b). $f(x)$ назыв. выпуклой вверх (вып. вниз, стр. вып. вверх, стр. вып. вниз) на (a,b), если $\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geqslant \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \quad (\leqslant, >, <)$$

Т5. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f''(x) > 0\ (<). \Rightarrow$
$f(x)$ строго вып. вниз (стр. вып. вверх) на (a,b).

Т6. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f''(x) > 0\ (<). \Rightarrow$
$\forall x_0, x_1 \in (a,b): x_1 \neq x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x_1 - x_0)\ (<)$

Д-во Т5.

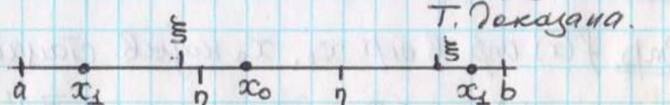


$\forall x_0, x_1, x_2: a < x_1 < x_0 < x_2 < b$

$$f(x_0) - \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{f(x_0)(x_0-x_1)+f(x_0)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_2)(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{(f(x_0)-f(x_2))(x_0-x_1)+(f(x_0)-f(x_1))(x_2-x_0)}{x_2-x_1} = (\text{Т.Л.}) =$$
$$= \frac{f'(\xi)(x_0-x_2)(x_0-x_1)+f'(\eta)(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$
$$= \frac{(f'(\eta)-f'(\xi))(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \overset{\text{Т.Л.}}{=} \frac{f''(\xi)\overbrace{(\eta-\xi)}^{<0}\overbrace{(x_0-x_1)}^{>0}\overbrace{(x_2-x_0)}^{>0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}.$$

Т. доказана.

Д-во Т.6.



$$f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x_1-x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f'(\xi)(x_1-x_0) - f'(x_0)(x_1-x_0) =$$
$$= (f'(\xi)-f'(x_0))(x_1-x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f''(\eta)\underbrace{(\xi-x_0)(x_1-x_0)}_{>0}$$

Т. доказана

Это значит, что график $y = f(x)$ лежит выше (ниже) касательной

Опр. $f(x)$ опред. на (a, b). $f(x)$ назыв. выпуклой вверх (вып. вниз, стр. вып. вверх, стр. вып. вниз) на (a,b), если $\forall x_0, x_1, x_2 : a < x_1 < x_0 < x_2 < b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \quad (\leq, >, <)$$

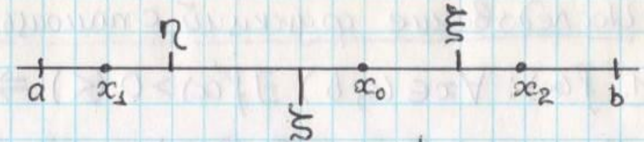
Т5. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f''(x) > 0\ (<). \Rightarrow$
$f(x)$ строго вып. вниз (стр. вып. вверх) на (a,b).

Т6. $f(x): \forall x \in (a,b)\ \exists f''(x) > 0\ (<). \Rightarrow$
$\forall x_0, x_1 \in (a,b): x_1 \neq x_0 \quad f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x_1 - x_0)\ (<)$

Опр. $f(x)$ непр. в окр. x_0 и $y = f(x)$ имеет касат. при $x = x_0$
x_0 – т. перегиба $y = f(x)$, если x_0 одновременно конец интервала стр. вып. вверх и конец интервала стр. вып. вниз.

Т7. $f(x)$: $f''(x)$ непр. на (a,b), x_0 – т. перегиба $\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

Д-во Т5.



$\forall x_0, x_1, x_2 : a < x_1 < x_0 < x_2 < b$

$$f(x_0) - \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{f(x_0)(x_0-x_1)+f(x_0)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_2)(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$

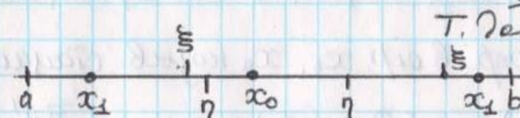
$$= \frac{(f(x_0)-f(x_2))(x_0-x_1)+(f(x_0)-f(x_1))(x_2-x_0)}{x_2-x_1} = (\text{Т.Л.}) =$$

$$= \frac{f'(\xi)(x_0-x_2)(x_0-x_1)+f'(\eta)(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$

$$= \frac{(f'(\eta)-f'(\xi))(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \overset{\text{Т.Л.}}{=} \frac{f''(\xi)\overbrace{(\eta-\xi)}^{<0}\overbrace{(x_0-x_1)}^{>0}\overbrace{(x_2-x_0)}^{>0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}.$$

Т. доказана.

Д-во Т.6.



$$f(x_1) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x_1-x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f'(\xi)(x_1-x_0) - f'(x_0)\cdot(x_1-x_0) =$$

$$= (f'(\xi)-f'(x_0))(x_1-x_0) \overset{\text{Т.Л.}}{=} f''(\eta)\underbrace{(\xi-x_0)(x_1-x_0)}_{>0}$$

Т. доказана

Это значит, что график $y = f(x)$ лежит выше (ниже) касательной

Д-во Т.7. $f''(x_0) \neq 0 \overset{(\text{непр.})}{\Rightarrow} \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ \operatorname{sgn} f''(x) = \operatorname{sgn} f''(x_0)$
$\Rightarrow (\text{Т5}) \Rightarrow f(x)$ стр. вып. на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Т. доказана.

Опр. $f(x)$ опред. на (a, b). $f(x)$ назыв. выпуклой вверх (вып. вниз, стр. вып. вверх, стр. вып. вниз) на (a, b), если $\forall x_0, x_1, x_2:\ a<x_1<x_0<x_2<b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geqslant \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1}\ (\leqslant, >, <)$$

Т5. $f(x): \forall x \in (a, b)\ \exists f''(x)>0\ (<). \Rightarrow$ $f(x)$ строго вып. вниз (стр. вып. вверх) на (a, b).

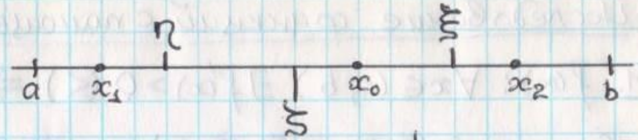
Т6. $f(x): \forall x \in (a, b)\ \exists f''(x)>0\ (<). \Rightarrow$ $\forall x_0, x_1 \in (a, b): x_1 \neq x_0\ \ f(x_1)>f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x_1-x_0)\ (<)$

Опр. $f(x)$ непр. в окр. x_0 и $y=f(x)$ имеет касат. при $x=x_0$. x_0 – т. перегиба $y=f(x)$, если x_0 одновременно конец интервала стр. вып. вверх и конец интервала стр. вып. вниз.

Т7. $f(x)$: $f''(x)$ непр. на (a, b), x_0 – т. перегиба. $\Rightarrow f''(x_0)=0$.

Т8. $f(x)$ непр. в окр. x_0, $\exists$ касат. при $x=x_0$ $\exists \delta>0: \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta\ \exists f''(x): \forall x \in (x_0-\delta, x_0)\ f''(x)<0\ (>)$
$\forall x \in (x_0, x_0+\delta)\ f''(x)>0\ (<)$
$\Rightarrow x_0$ – т. перегиба.

Д-во Т5.

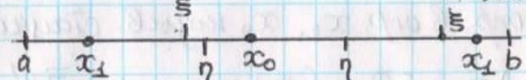


$\forall x_0, x_1, x_2:\ a<x_1<x_0<x_2<b$

$$f(x_0)-\frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{f(x_0)(x_0-x_1)+f(x_0)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_2)(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{(f(x_0)-f(x_2))(x_0-x_1)+(f(x_0)-f(x_1))(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=(\text{Т.Л.})=$$
$$=\frac{f'(\xi)(x_0-x_2)(x_0-x_1)+f'(\eta)(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{(f'(\eta)-f'(\xi))(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1}\overset{\text{Т.Л.}}{=}\frac{f''(\xi)\overbrace{(\eta-\xi)}^{<0}\overbrace{(x_0-x_1)}^{>0}\overbrace{(x_2-x_0)}^{>0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}.$$

Т. доказана.

Д-во Т6.



$$f(x_1)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x_1-x_0)\overset{\text{Т.Л.}}{=}f'(\xi)(x_1-x_0)-f'(x_0)(x_1-x_0)=$$
$$=(f'(\xi)-f'(x_0))(x_1-x_0)\overset{\text{Т.Л.}}{=}f''(\eta)\underbrace{(\xi-x_0)(x_1-x_0)}_{>0}$$

Т. доказана

Это значит, что график $y=f(x)$ лежит выше (ниже) касательной.

Д-во Т.7. $f''(x_0)\neq 0 \overset{(\text{непр.})}{\Rightarrow} \exists \delta>0: \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ \operatorname{sgn} f''(x)=\operatorname{sgn} f''(x_0)$
$\Rightarrow (\text{Т5}) \Rightarrow f(x)$ стр. вып. на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Т. доказана.

Д-во Т8. $f(x)$ стр. выпукла на $(x_0-\delta, x_0)$ и на $(x_0, x_0+\delta)$, причём в разные стороны. Т. доказана

Опр. $f(x)$ опред. на (a,b). $f(x)$ назыв. выпуклой вверх (вып. вниз, стр. вып. вверх, стр. вып. вниз) на (a,b), если $\forall x_0, x_1, x_2:\ a<x_1<x_0<x_2<b \Rightarrow$

$$f(x_0) \geq \frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} \quad (\leq, >, <)$$

Т5. $f(x): \forall x\in(a,b)\ \exists f''(x)>0\ (<). \Rightarrow$ $f(x)$ строго вып. вниз (стр. вып. вверх) на (a,b).

Т6. $f(x): \forall x\in(a,b)\ \exists f''(x)>0\ (<). \Rightarrow$ $\forall x_0, x_1\in(a,b): x_1\neq x_0\quad f(x_1)>f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x_1-x_0)\ (<)$

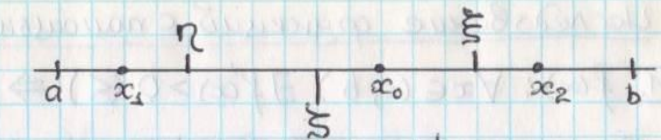
Опр. $f(x)$ непр. в окр. x_0 и $y=f(x)$ имеет касат. при $x=x_0$. x_0 – т. перегиба $y=f(x)$, если x_0 одновременно конец интервала стр. вып. вверх и конец интервала стр. вып. вниз.

Т7. $f(x): f''(x)$ непр. на (a,b), x_0 – т. перегиба $\Rightarrow f''(x_0)=0$.

Т8. $f(x)$ непр. в окр. x_0, $\exists$ касат. при $x=x_0$ $\exists\delta>0: \forall x,$ $0<|x-x_0|<\delta\ \exists f''(x): \forall x\in(x_0-\delta, x_0)\ f''(x)<0\ (>)$
$\forall x\in(x_0, x_0+\delta)\ f''(x)>0\ (<)$
$\Rightarrow x_0$ – т. перегиба.

Т9. $f(x): f''(x)$ непр. в окр. x_0, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$ $\Rightarrow x_0$ – т. перегиба.

Д-во Т5.

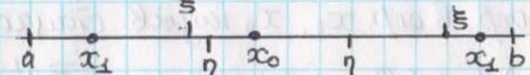


$\forall x_0, x_1, x_2:\ a<x_1<x_0<x_2<b$

$$f(x_0)-\frac{f(x_2)\cdot(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1} =$$
$$=\frac{f(x_0)(x_0-x_1)+f(x_0)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_2)(x_0-x_1)+f(x_1)\cdot(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{(f(x_0)-f(x_2))(x_0-x_1)+(f(x_0)-f(x_1))(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=(\text{т. Л.})=$$
$$=\frac{f'(\xi)(x_0-x_2)(x_0-x_1)+f'(\eta)(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{(f'(\eta)-f'(\xi))(x_0-x_1)(x_2-x_0)}{x_2-x_1}\overset{\text{т. Л.}}{=}\frac{f''(\xi)\overbrace{(\eta-\xi)}^{<0}\overbrace{(x_0-x_1)}^{>0}\overbrace{(x_2-x_0)}^{>0}}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}}.$$

Т. доказана.

Д-во Т6.



$$f(x_1)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x_1-x_0)\overset{\text{т. Л.}}{=}f'(\xi)(x_1-x_0)-f'(x_0)(x_1-x_0)=$$
$$=(f'(\xi)-f'(x_0))(x_1-x_0)\overset{\text{т. Л.}}{=}f''(\eta)\underbrace{(\xi-x_0)(x_1-x_0)}_{>0}$$

Т. доказана

Это значит, что график $y=f(x)$ лежит выше (ниже) касательной.

Д-во Т. 7. $f''(x_0)\neq 0 \overset{(\text{непр.})}{\Rightarrow} \exists\delta>0: \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\ \mathrm{sgn} f''(x)=\mathrm{sgn} f''(x_0)$ $\Rightarrow (\text{Т5}) \Rightarrow f(x)$ стр. вып. на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Т. доказана.

Д-во Т8. $f(x)$ стр. выпукла на $(x_0-\delta, x_0)$ и на $(x_0, x_0+\delta)$, причём в разные стороны. Т. доказана

Д-во Т9. $0\neq f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}$
$\Rightarrow \exists\delta>0: \forall x, 0<|x-x_0|<\delta\ \mathrm{sgn}\frac{f''(x)}{x-x_0}=\mathrm{sgn} f'''(x_0)\Rightarrow f''(x)$ меняет знак при переходе через $x_0 \Rightarrow x_0$ – т. перег. Т. доказана.