Добро пожаловать в Физику!

Welcome to Physics!

Zapraszamy do Fizyki!

Fizik`e hoş geldiniz!

Chào mừng bạn đến Vật lý!

Bienvenido a la física!

পদার্থবিদ্যা স্বাগতম!

Willkommen in Physik!

Лектор: Доцент, кандидат физ.-мат. наук, Андрей ОЛЬЧАК
Lecturer: Andrey OLCHAK, Professor Associate, DSc

Общая Физика

Физические основы механики

Лекция 7
Неинерциальные системы отсчета

Лектор:
доцент НИЯУ МИФИ, к.ф.-м.н.,
Ольчак Андрей Станиславович

Уравнение движения центра масс (2-ой закон Ньютона):

$$m\mathbf{w} = d\mathbf{P}/dt = \Sigma\mathbf{F}$$

Уравнение вращательного движения относительно оси 0Z:

$$dM_z/dt = \Sigma N_z$$

СПРАВЕДЛИВЫ В **ИНЕРЦИАЛЬНЫХ** СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА.

1. Где найти инерциальную стсьему?
2. Как быть, если система НЕ инерциальна?

Инерциальные и почти инерциальные системы (ИСО)

Все инерциальные системы отсчета (ИСО) покоятся или движутся равномерно и прямолинейно относительно друг друга.
Найдешь одну – найдешь все! Но где найти хоть одну?

ИСО НЕ должны
1) Вращаться
2) Двигаться по криволинейным траекториям
3) Иметь (заметные) линейные ускорения:

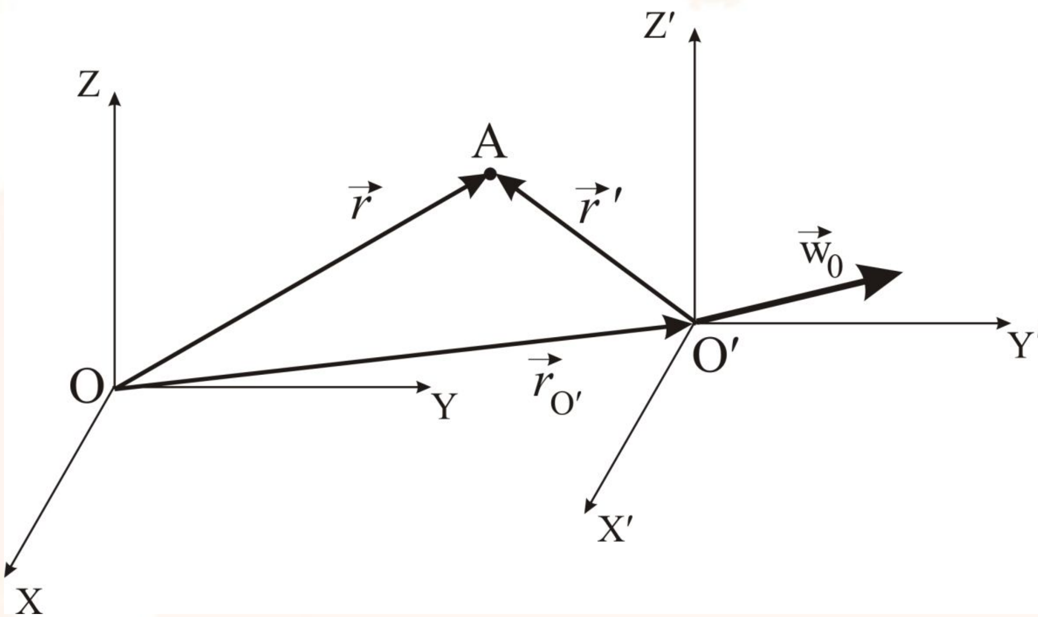
За что не хватись – все вращается (Земля, Солнце) и / или движется по криволинейным траекториям (Солнце, звезды…), но в некоторых случаях этмс вращением или искривлением можно пренебречь (например, при рассмотрении движений небольшого масштаба для тел у поверхности Земли).
Когда пренебречь нельзя – систему нельзя считать ИСО.
Хорошая новость: можно поправить 2-ой закон Ньютона, формально добавив т.н. «силы инерции» (не физические), и он станет работать и в НеИСО.

Неинерциальные системы отсчета (НеИСО) - движутся относительно инерциальных (ИСО) неравномерно и/или непрямолинейно.

По мере усложнения описания мы рассмотрим три случая НеИСО:

- НеИСО, движущиеся относительно ИСО поступательно с ускорением.
- НеИСО, вращающиеся относительно ИСО
- НеИСО, движущиеся относительно ИСО произвольным образом

НеИСО, движущиеся поступательно относительно ИСО



$$\vec r = \vec r\,' + \vec r_{O'}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec w = \vec w\,' + \vec w_0$$

$$\Downarrow$$

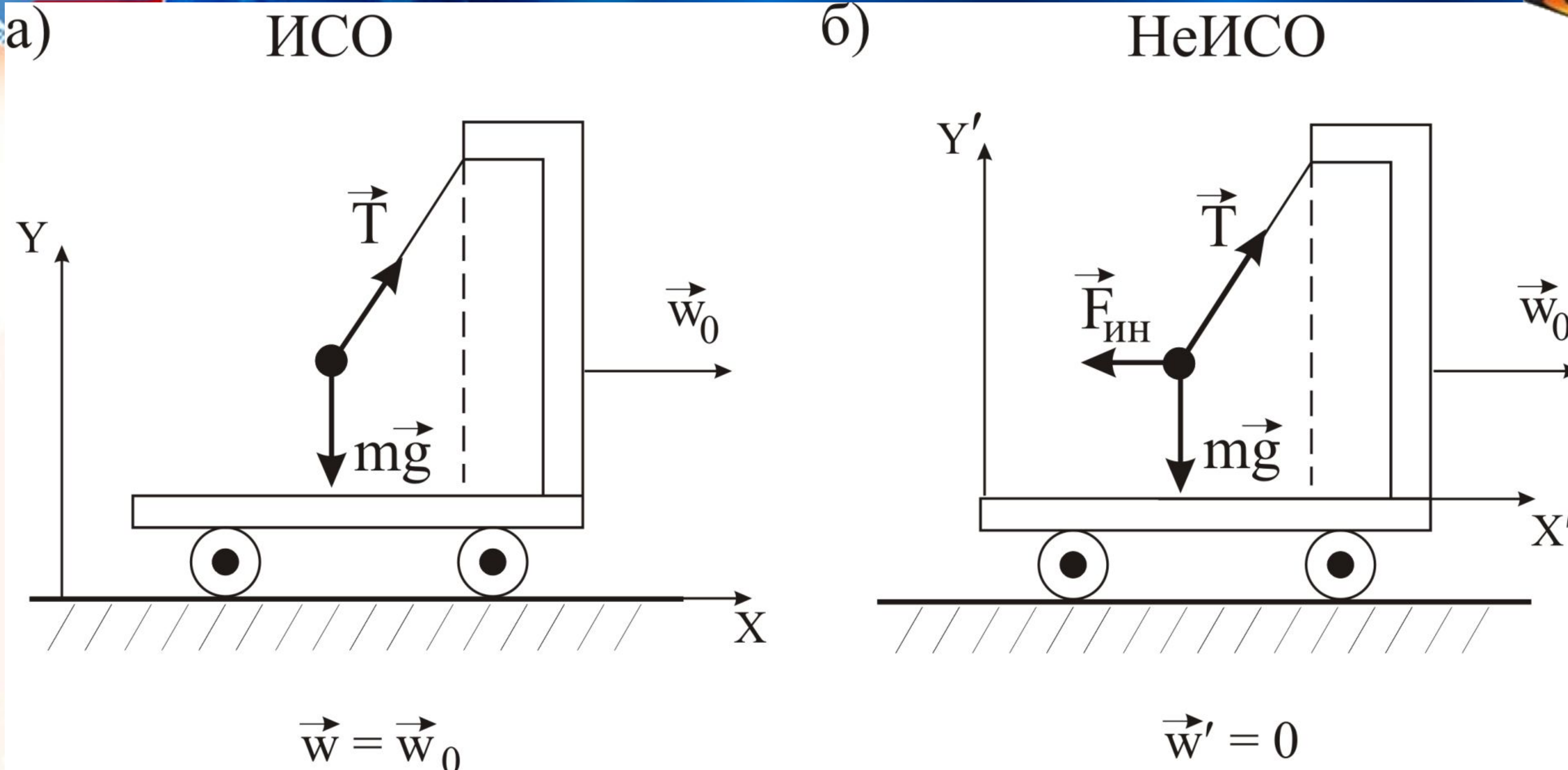
$$m\vec w = m\vec w\,' + m\vec w_0$$

Второй закон Ньютона:

а) ИСО: $m\vec w = \vec F$ б) НеИСО: $m\vec w\,' = \vec F + \left(-m\vec w_0\right)$

Поступательная сила инерции: $\boxed{\vec F_{\text{ин}} = -m\vec w_0}$

НеИСО, движущиеся поступательно относительно ИСО



а) ИСО:

$$m\boldsymbol{w_0} = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

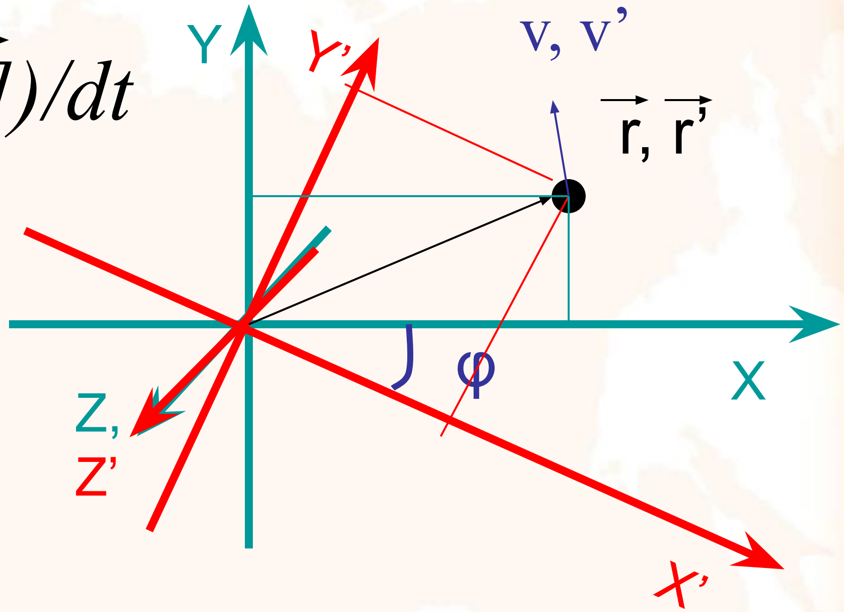
б)НеИСО:

$$\boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g} - m\boldsymbol{w_0} = 0$$

НеИСО, движущиеся вращательно относительно ИСО

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

$$d\vec{v}/dt = \vec{w} = d\vec{v}'/dt + d([\vec{\omega}, \vec{r}])/dt$$



НеИСО, движущиеся вращательно относительно ИСО

$$\vec{w} = d\vec{v}'/dt + d([\vec{\omega},\vec{r}'])/dt$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_{x'}\vec{e}_{x'} + v_{y'}\vec{e}_{y'} + v_{z'}\vec{e}_{z'}\right) =$$

$$= \vec{e}_{x'}\frac{dv_{x'}}{dt} + \vec{e}_{y'}\frac{dv_{y'}}{dt} + \vec{e}_{z'}\frac{dv_{z'}}{dt} + v_{x'}\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + v_{y'}\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + v_{z'}\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} =$$

$$= \vec{e}_{x'}w_{x'} + \vec{e}_{y'}w_{y'} + \vec{e}_{z'}w_{z'} + v_{x'}[\vec{\omega},\vec{e}_{x'}] + v_{y'}[\vec{\omega},\vec{e}_{y'}] + v_{z'}[\vec{\omega},\vec{e}_{z'}] =$$

$$= \vec{w}' + [\vec{\omega},\vec{v}']$$

$$\vec{V} = d\vec{r}/dt = [\vec{\omega},\vec{r}]$$

В частности - линейная скорость конца вектора-орта **е (любого),** вращающегося относительно неподвижной системы отсчета с угловой скоростью ω связана с ней соотношением: $d\vec{e}/dt = [\vec{\omega},\vec{e}]$

НеИСО, движущиеся вращательно относительно ИСО

$$\vec{w} = d\vec{v}'/dt + d([\vec{\omega},\vec{r}'])/dt$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_{x'}\vec{e}_{x'} + v_{y'}\vec{e}_{y'} + v_{z'}\vec{e}_{z'}\right) =$$

$$= \vec{e}_{x'}\frac{dv_{x'}}{dt} + \vec{e}_{y'}\frac{dv_{y'}}{dt} + \vec{e}_{z'}\frac{dv_{z'}}{dt} + v_{x'}\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt} + v_{y'}\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt} + v_{z'}\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt} =$$

$$= \vec{e}_{x'}w_{x'} + \vec{e}_{y'}w_{y'} + \vec{e}_{z'}w_{z'} + v_{x'}\left[\vec{\omega},\vec{e}_{x'}\right] + v_{y'}\left[\vec{\omega},\vec{e}_{y'}\right] + v_{z'}\left[\vec{\omega},\vec{e}_{z'}\right] =$$

$$= \vec{w}' + [\vec{\omega},\vec{v}']$$

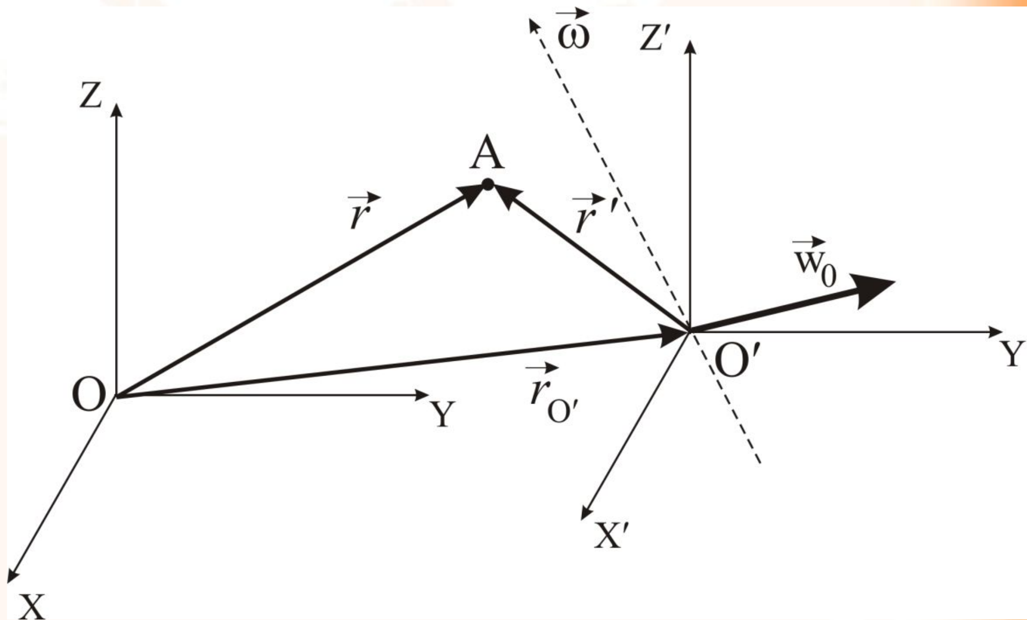
$$\frac{d}{dt}[\vec{\omega},\vec{r}'] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt},\vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}'}{dt}\right] = \left[\vec{\beta},\vec{r}'\right] + \left[\vec{\omega},\vec{v}'\right] + \left[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']\right]$$

$$\vec{w} = \vec{w}' + 2[\vec{\omega},\vec{v}'] + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] + [\vec{\beta},\vec{r}']$$

НеИСО, движущаяся произвольно относительно ИСО

$$\vec{w} = \vec{w}' + 2[\vec{\omega},\vec{v}'] + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] + [\vec{\beta},\vec{r}']$$

Мы никак не использовали тот факт, что вращение происходит вокруг оси OZ. То есть – эта формула справедлива для любого направления оси вращения!



Более того –если добавить поступательную силу инерции – формула становится справедливой для любой произвольно движущейся системы отсчета!

НеИСО, движущаяся произвольно относительно ИСО

Итак, в ИСО 2-й закон Ньютона имеет вид: $m\vec{w} = \vec{F}$

В силу соотношения

$$m\vec{w} = m\vec{w}' + m\vec{w}_0 + 2m[\vec{\omega},\vec{v}'] + m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] + m[\vec{\beta},\vec{r}']$$

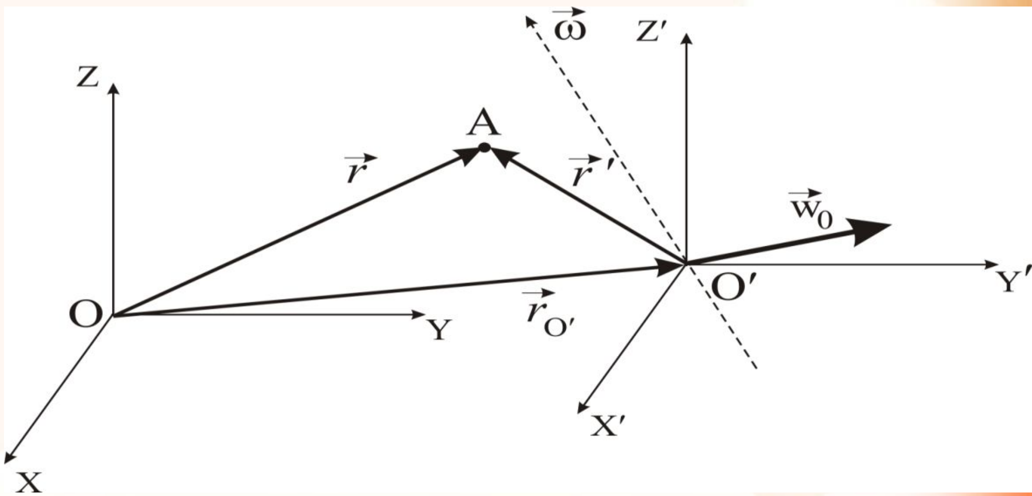
НеИСО, движущаяся произвольно относительно ИСО

В ИСО 2-й закон Ньютона имеет вид: $m\vec{w} = \vec{F}$

в НеИСО, произвольно движущейся, 2-й закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{w}' = \vec{F} - (m\vec{w}_0 + 2m[\vec{\omega},\vec{v}'] + m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] + m[\vec{\beta},\vec{r}'])$$

Разберем далее подробнее 4 разновидности сил инерции, которые приходится учитывать при работе с НеИСО



Итак, в произвольно движущейся НеИСО 2-й закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{w}' = \vec{F} - m\vec{w}_0 - 2m[\vec{\omega},\vec{v}'] - m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] - m[\vec{\beta},\vec{r}']$$

Сюда входят 4 силы инерции:

- $m\vec{w}_0$ – поступательная сила инерции (translational inertia force).

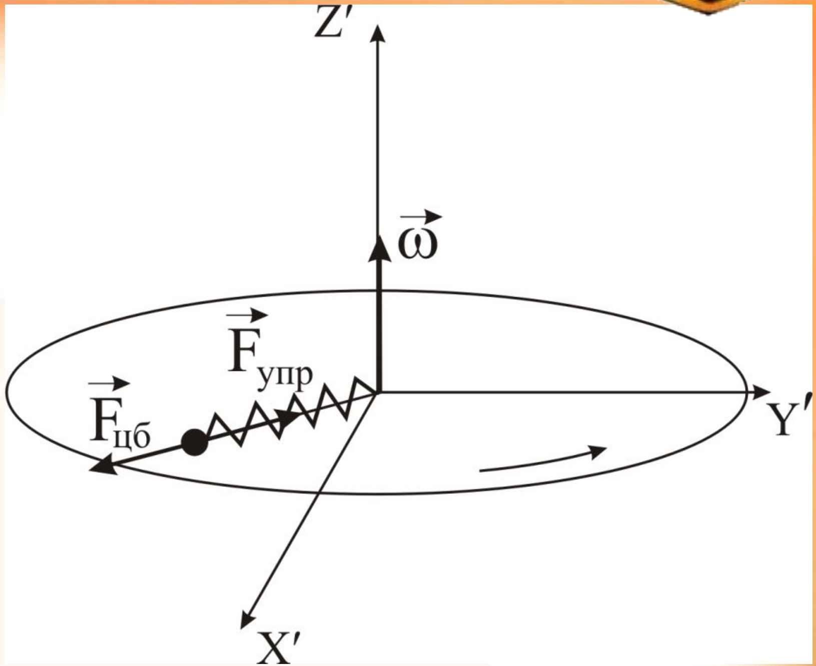
- $m[\vec{\beta},\vec{r}']$– сила инерции, связанная с неравномерностью вращения НеИСО. На практике такие НеИСО почти не используются.

- $m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']]$ – центробежная сила (centrifugal force).

- $2m[\vec{\omega},\vec{v}']$ – сила Кориолиса (Coriolis force).

О двух последних силах – центробежной и Кориолиса – поговорим подробнее

$-\,m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']]$ – центробежная сила .



Центробежная сила всегда направлена от оси вращения перпендикулярно ей и пропорциональна квадрату угловой скорости и расстоянию до оси вращения:

$$m|[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']]| = m\omega^2 r_\perp.$$

Покажем это. Без потери общности будем считать, что ω направлена вдоль оси Z'

$$\mathbf{[\omega,r']} = \mathbf{e_x}(\omega_y z-\omega_z y) + \mathbf{e_y}(\omega_z x - \omega_x z) + \mathbf{e_z}(\omega_x y - \omega_y x) =$$
$$= -\mathbf{e_x}\omega_z y + \mathbf{e_y}\omega_z x = \omega(\mathbf{e_y} x - \mathbf{e_x} y)$$

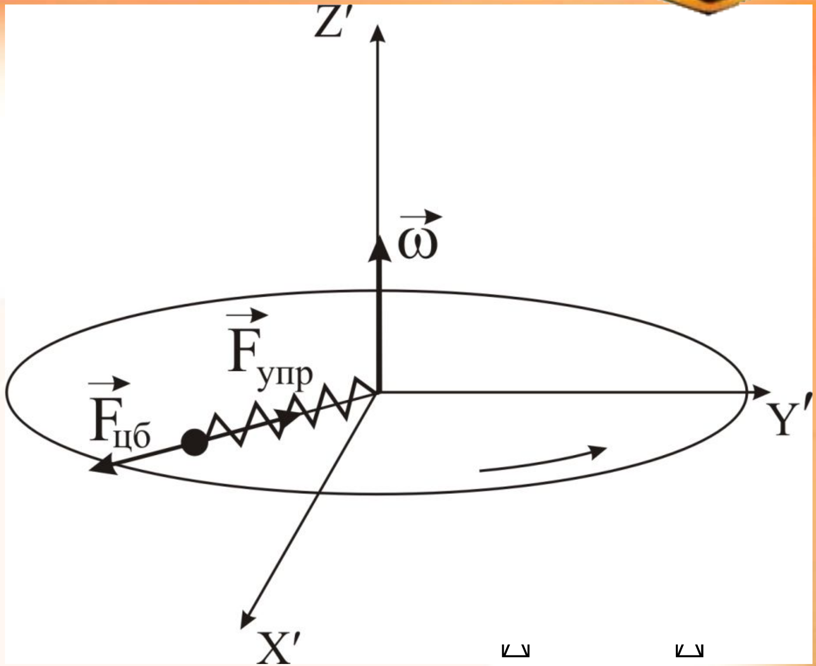
$$\mathbf{[\omega,[\omega,r']]} = -\,\mathbf{e_x}\,\omega^2 x - \mathbf{e_y}\omega^2 y = -\omega^2(\mathbf{e_x} x + \mathbf{e_y} y) = -\omega^2\,\mathbf{r}_\perp$$

Центробежная сила инерции

$-m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']]$ – центробежная сила .

Центробежная сила всегда направлена от оси вращения перпендикулярно ей и пропорциональна квадрату угловой скорости и расстоянию до оси вращения:

$$m|[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']]| = m\omega^2 r_\perp.$$



Второй закон Ньютона в НеИСО (пример на рисунке):

$$0 = \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{упр}$$

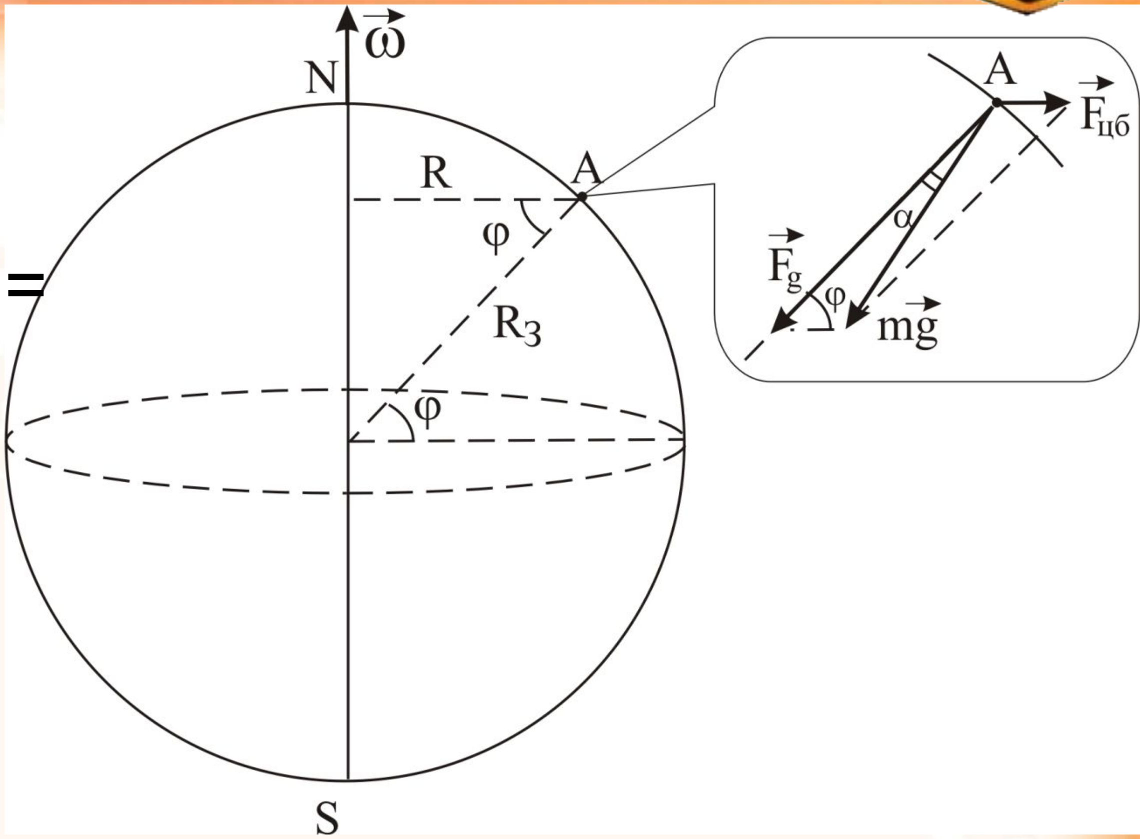
$$F_{цб} = -m[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] = m\omega^2 \vec{r}_\perp.$$

$\mathrm{Sin}\alpha = F_{цб}\sin\varphi/mg_0 =$

$= m\omega^2 R_З \cos\varphi \sin\varphi/mg_0 =$

$= \omega^2 R_З \sin 2\varphi/2g_0 =$

$= 0{,}018\sin 2\varphi$

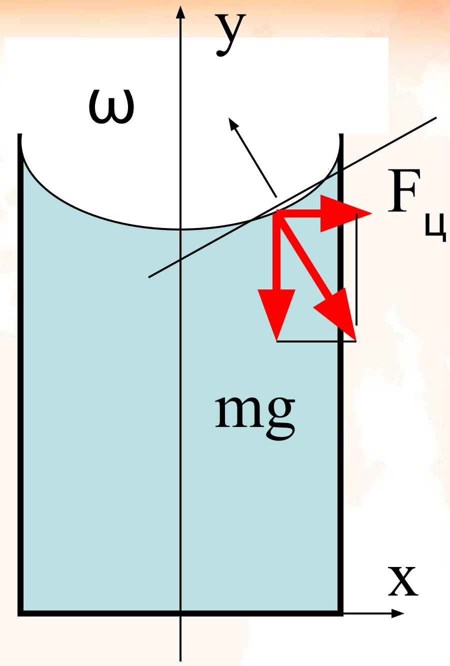


Форма поверхности жидкости во вращающемся сосуде y(x).

Результирующая сила $\vec{F}_ц + m\vec{g}$ должна быть перпендикулярна поверхности.

$dy/dx = tg(\alpha) = F_ц / mg = \omega^2 x/g$

$=> \; y(x) = \omega^2 x^2/2g$

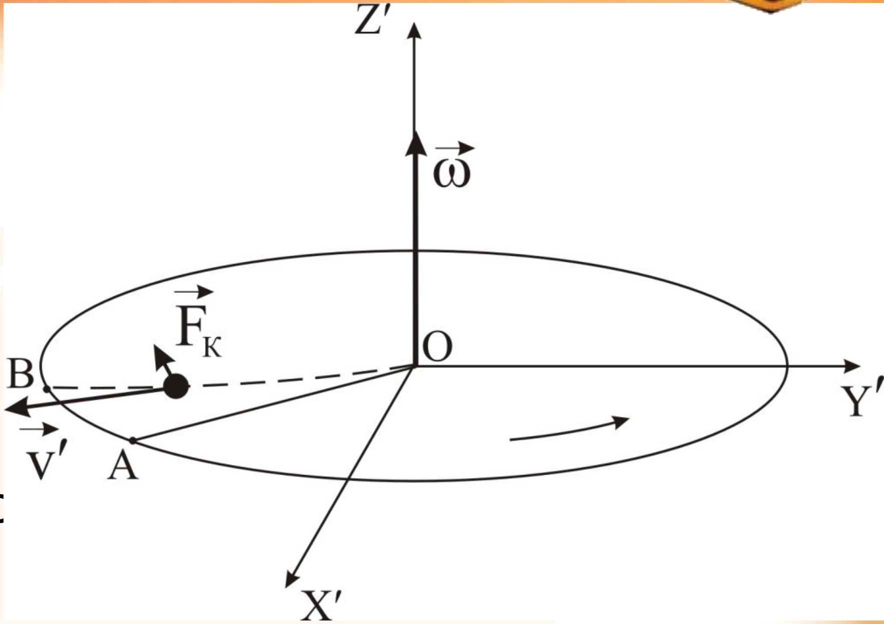


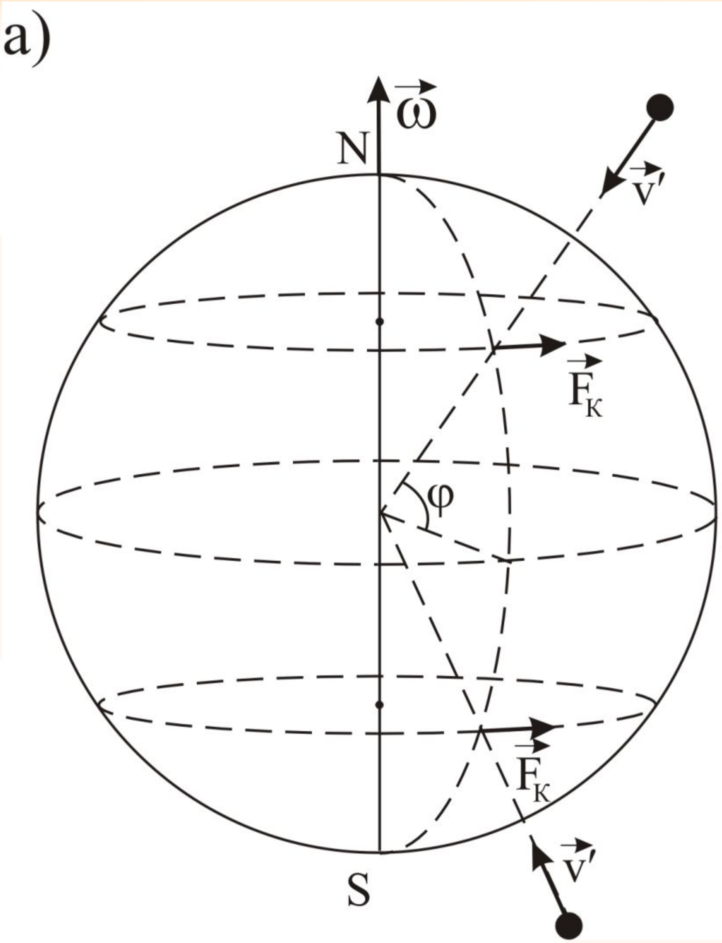
Сила Кориолиса - пример

$-2m[\vec{\omega},\vec{v}'] = 2m[\vec{v}',\vec{\omega}]$

сила Кориолиса.

Сила Кориолиса перпендикулярна как угловой скорости вращения НеИСО, так и линейной скорости частицы. Она приводит (см. рисунок) к отклонению частицы от направления ее первоначальной скорости



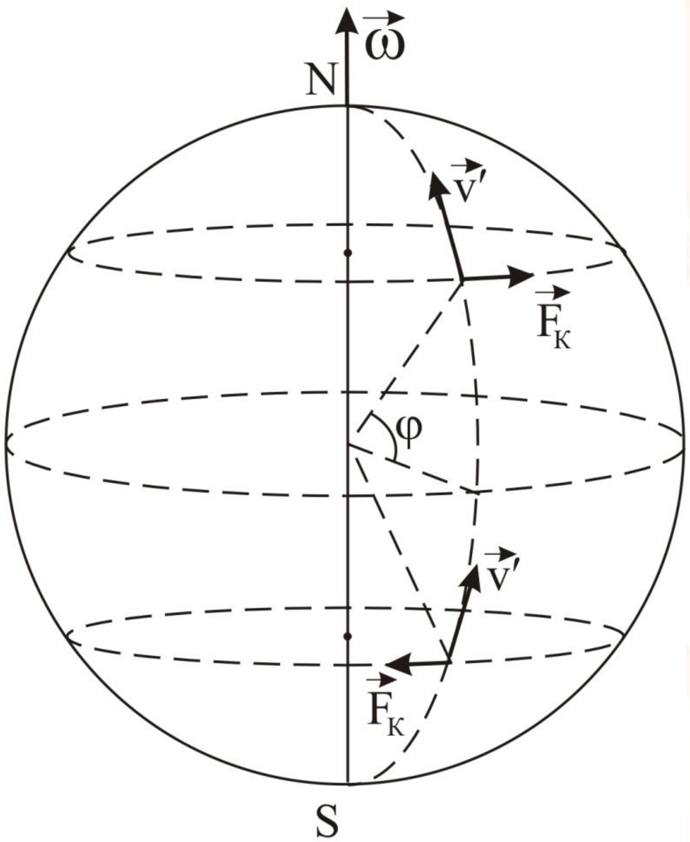


Например, при свободном падении тел на них действует сила Кориолиса, приводящая к смещению тел к востоку, относительно направления действия силы тяжести (см. рис. 9.7а). Эта сила максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах.

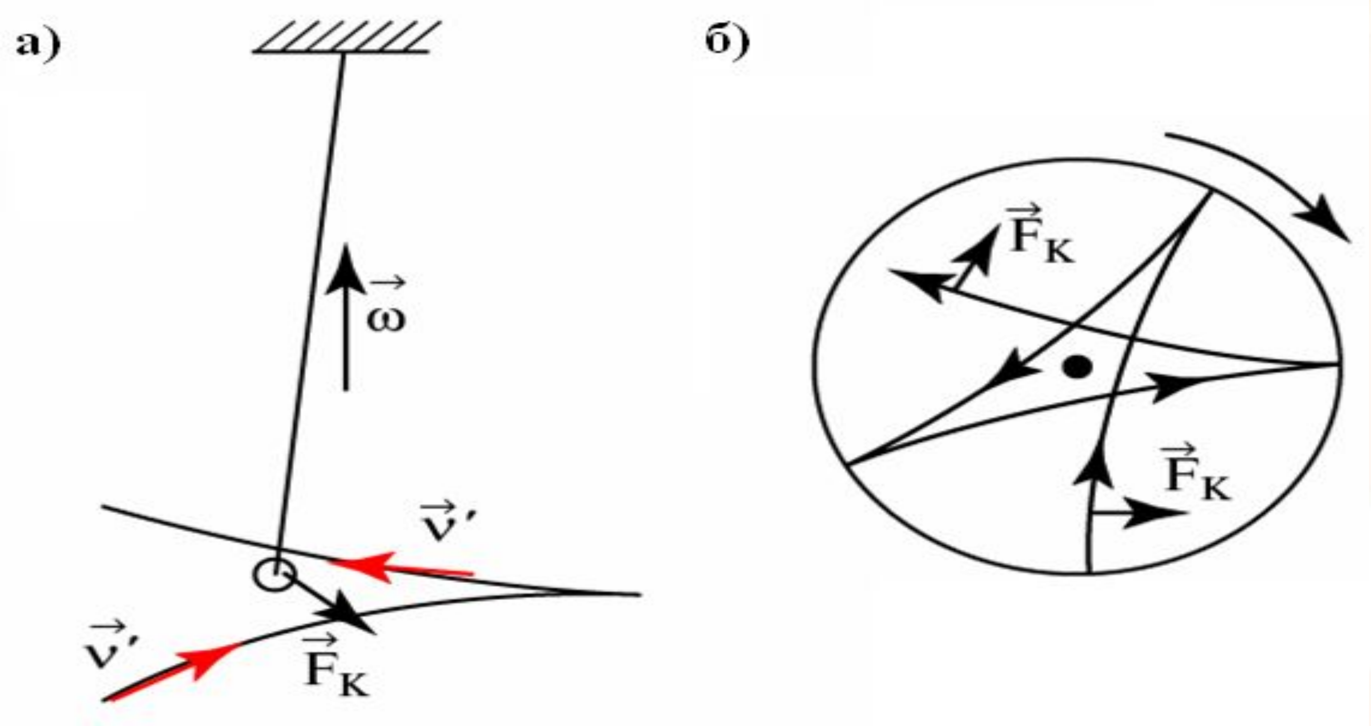
Сила Кориолиса – пример 3

Летящий вдоль поверхности Земли снаряд или пуля так же испытывает действие силы Кориолиса, приводящее к его смещению в направлении перпендикулярном движению (см. рис. б). При движении снаряда в направлении на север в северном полушарии, сила Кориолиса смещает его в восточном направлении, а в южном – в западном. Аналогично при движении снаряда вдоль параллели (например, вдоль экватора) сила Кориолиса будет прижимать его к земле или поднимать его вверх, в зависимости от направления выстрела.

б)



Сила Кориолиса – Маятник Фуко



Силы Кориолиса проявляются и при качании маятника. На рисунке показана траектория маятника, расположенного на северном полюсе (для простоты). На качающийся маятник в таких условиях действует сила Кориолиса направленная вправо по ходу движения маятника (см. рис.б), следовательно, его траектория искривляется.

Маятник Фуко

Маятник Фуко (Kopernik Centrum, Warszawa, Poland)

Рассмотрим особо случай равномерно вращающейся НеИСО, не имеющей поступательного ускорения. Для нее 2-й закон Ньютона имеет вид:

$$m\vec{w}' = \vec{F} + 2m[\vec{v}',\vec{\omega}] + m\omega^2\vec{r}_\perp$$

Сила Кориолиса перпендикулярна скорости и работы не совершает.

Центробежная сила совершает работу и выглядит как потенциальная сила, которой можно приписать потенциальную энергию. Учитывая известную связь силы и потенциальной энергии $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, находим

$$U_{цб} = - m\omega^2 r^2_\perp/2$$

Для энергии материальной точки в НеИСО можно записать:

$$E' = U + mv'^2/2 - m\omega^2 r_\perp{}^2/2$$

Для энергии материальной точки в НеИСО можно записать:

$$E' = U + mv'^2/2 - m\omega^2 r_\perp{}^2/2$$

Причем $v'^2 = (\mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}])^2 = v^2 - 2\mathbf{v}[\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}]^2$

Заметим, что по свойствам векторного и скалярного произведений $[\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}]^2 = (\omega r \sin(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r}))^2 = (\omega r_\perp)^2$; $(\mathbf{v},[\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}]) = ([\mathbf{r},\mathbf{v}],\boldsymbol{\omega})$

Подставляя v'^2 в выражение для энергии замечаем, что центробежная энергия сокращается и остается

$$E' = U + mv^2/2 - m([r,v],\omega) = E_0 - (\vec{M},\vec{\omega})$$

Где $E_0 = U + mv^2/2$ – полная энергия частицы в ИСО,

$\mathbf{M} = [\mathbf{r},m\mathbf{v}]$ – момент импульса частицы в ИСО