

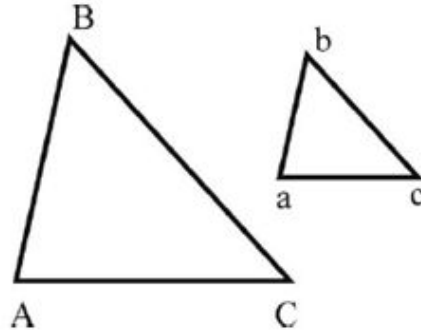
Лекция 3. Подобие физических явлений. Основы теории подобия. Примеры применения теории подобия для выбора условий испытаний и параметров моделей

Дополнительная литература по теме:

1. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В.С. Авдуевский, Б.М. Галицейский, Г.А. Глебов и др. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
2. Шаповалов Л.А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
3. Михеев М.А., Михеева И.М. М.: Энергия, 1977. 344 с.

Геометрическое подобие и подобие физических

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc} = n$$



КОНСТАНТЫ

$$\frac{d'}{d} = \frac{L'}{L} = C_1; \frac{d''}{d} = \frac{L''}{L} = C_2. \quad C_1 \neq C_2.$$

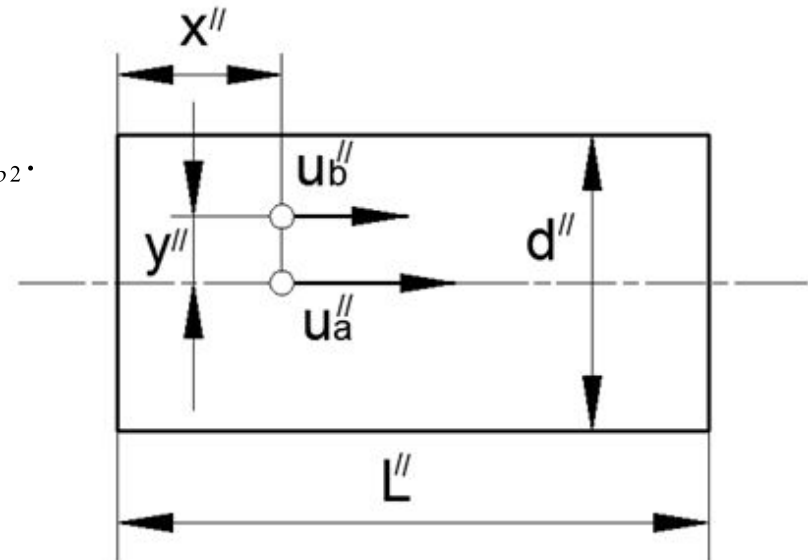
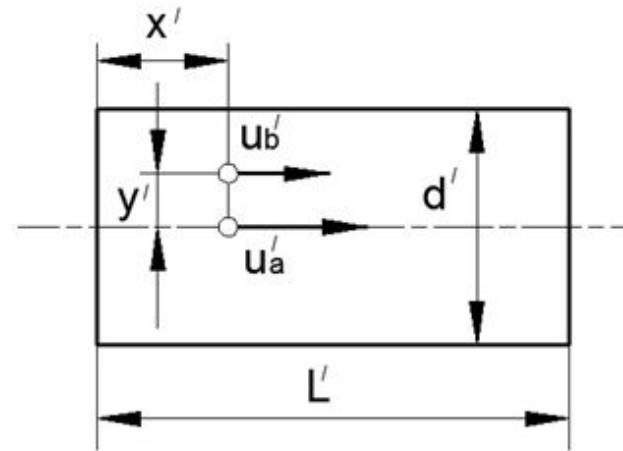
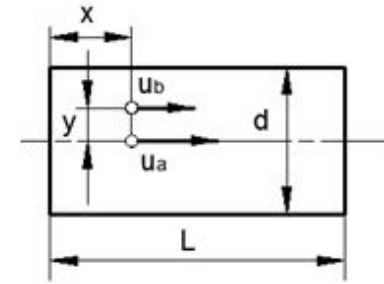
$$\frac{d}{L} = \frac{d'}{L'} = \frac{d''}{L''} = i. \quad \text{инвариант подобия}$$

$$x' / x = y' / y = C_1; \quad x'' / x = y'' / y = C_2$$

$$C_{u1} = \frac{u'_a}{u_a} = \frac{u'_b}{u_b}; \quad C_{u2} = \frac{u''_a}{u_a} = \frac{u''_b}{u_b}; \quad C_{u1} \neq C_{u2}; \quad C_{\rho1} \neq C_{\rho2}.$$

$$C_{\rho1} = \frac{\rho'_a}{\rho_a} = \frac{\rho'_b}{\rho_b}; \quad C_{\rho2} = \frac{\rho''_a}{\rho_a} = \frac{\rho''_b}{\rho_b}.$$

$$i_u = \frac{u_b}{u_a} = \frac{u'_b}{u'_a} = \frac{u''_b}{u''_a}; \quad i_\rho = \frac{\rho_b}{\rho_a} = \frac{\rho'_b}{\rho'_a} = \frac{\rho''_b}{\rho''_a}.$$



Теоремы подобия

1. К первой теореме подобия $Re = idem; Pr = idem...$

(примеры):

Безразмерные комплексы,
образованные из размерных
величин

←
Определяемые величины
(температура, перепад
температур)

→
Определяющие величины
(продолжительность нагрева,
геометрические
размеры, физические свойства)

2. Ко второй теореме подобия
(пример):

$$Nu = f(Re, Pr, Gr...)$$

Условия
однозначности

←
Геометрические
свойства
(форма и размеры тел)

↓
Физические свойства
(характеристики
материалов)

→
Краевые
условия
(НУ, ГУ)

3. К третьей теореме подобия: подобие = условия однозначности + критерии
подобия

Условия полного подобия модели реальному объекту

- 1. Процессы в модели и образце относятся к одному классу явлений.*
- 2. Эти процессы описываются одними и теми же уравнениями.*
- 3. Соблюдается геометрическое подобие.*
- 4. Краевые условия одинаковы.*
- 5. Определяющие критерии подобия численно равны.*

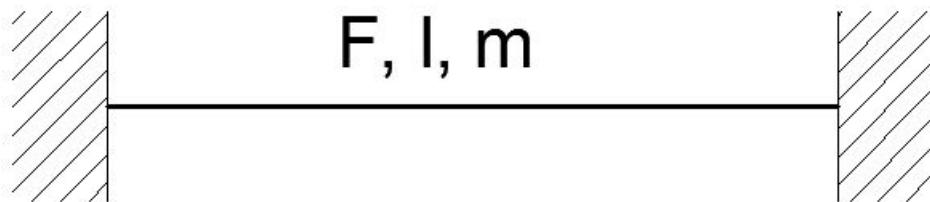
Методы исследования сложных явлений на моделях

1. Теоретический анализ, на основании которого устанавливаются физические величины, характеризующие рассматриваемое явление.
 2. Составление условий однозначности и формулировка уравнений связи.
 3. Выявление критериев подобия, выделение среди них определяемого (который содержит искомую величину).
 4. Проведение эксперимента и измерение величин, входящих в установленные критерии подобия.
 5. Обработка опытных данных, получение зависимости определяемого критерия от определяющих (в критериальной форме). Найденная зависимость может быть аппроксимирована в виде эмпирического уравнения (критериальных преобразований уравнений подобия).
- а) Метод анализа размерности**
б) Метод масштабных преобразований уравнений подобия
- применяется в прототипе и модели.

Метод анализа размерности (алгебраический метод

Рэлея)
 $[a] = P^\alpha \cdot Q^\beta \cdot R^\gamma \cdot S^\delta$, где $PQRS$ – система единиц измерения

Пусть размерности N величин выражаются через K размерностей основных единиц размерности ($K < N$)



$$v = \varphi(F, l, m) - ? \quad (1)$$

$$v \cdot F^\alpha \cdot l^\beta \cdot m^\gamma = Const \quad (1a)$$

$$[v] = m \cdot c^{-1}; [l] = m; [m] = \kappa z; [F] = \kappa z \cdot m \cdot c^{-2} \quad (2) \quad N = 4; K = 3; N - K = 1$$

$$m \cdot c^{-1} \cdot \kappa z^\alpha \cdot m^\alpha \cdot c^{-2\alpha} \cdot m^\beta \cdot \kappa z^\gamma = Const = m^0 \cdot c^0 \cdot \kappa z^0 \quad (3)$$

$$m^{1+\alpha+\beta} \cdot c^{-1-2\alpha} \cdot \kappa z^{\alpha+\gamma} = m^0 \cdot c^0 \cdot \kappa z^0 \quad (3a)$$

$$\begin{cases} [m]: 1 + \alpha + \beta = 0 \\ [c]: -1 - 2\alpha = 0 \\ [\kappa z]: \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}; \beta = -\frac{1}{2}; \gamma = \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$v = Const \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \quad (5)$$

Const -

экспериментально

Метод анализа размерности

(продолжение)

Рассмотрим задачу о теплообмене при стационарном турбулентном течении теплоносителя (газа или жидкости) в трубе.

$$N = \frac{Q}{K \cdot \Delta T} = 4 = 3 \quad w = \rho \cdot u; \quad [w] = \frac{кг}{м^2 \cdot с}$$

$$[\alpha] = \frac{Дж}{м^2 \cdot К \cdot с}; [u] = \frac{м}{с}; [\rho] = \frac{кг}{м^3}; [c] = \frac{Дж}{кг \cdot К}; [\lambda] = \frac{Дж}{м \cdot К \cdot с}; [\mu] = \frac{кг}{с \cdot м}; [D] = м. \quad [Дж] = \frac{кг \cdot м^2}{с^2}$$

$$\alpha = f(w, c, \lambda, \mu, D) \quad \alpha = C \cdot w^{x_1} c^{x_2} \lambda^{x_3} \mu^{x_4} D^{x_5}, \text{ где } C - \text{безразмерный коэффициент}$$

$$\frac{Дж}{м^2 \cdot К \cdot с} = C \cdot \left(\frac{кг}{м^2 \cdot с} \right)^{x_1} \left(\frac{Дж}{кг \cdot К} \right)^{x_2} \left(\frac{Дж}{м \cdot К \cdot с} \right)^{x_3} \left(\frac{кг}{с \cdot м} \right)^{x_4} (м)^{x_5}$$

$$\begin{cases} [кг]: 0 = x_1 - x_2 + x_4, \\ [м]: -2 = -2x_1 - x_3 - x_4 + x_5, \\ [с]: -1 = -x_1 - x_3 - x_4, \\ [Дж]: 1 = x_2 + x_3, \\ [К]: -1 = -x_2 - x_3, \end{cases}$$



$$\alpha = C \cdot w^{x_1} c^{x_2} \lambda^{1-x_2} \mu^{x_2-x_1} D^{x_1-1}$$

$$\left(\frac{\alpha D}{\lambda} \right)^1 = C \cdot \left(\frac{w \cdot D}{\mu} \right)^{x_1} \left(\frac{c \cdot \mu}{\lambda} \right)^{x_2}.$$

$$\Rightarrow x_3 = 1 - x_2, x_4 = x_2 - x_1, x_5 = x_1 - 1.$$

$$Nu = \frac{\alpha D}{\lambda} - \text{число Нуссельта};$$

$$Re = \frac{w \cdot D}{\mu} = \frac{\rho u \cdot D}{\mu} - \text{число Рейнольдса};$$

$$Pr = \frac{c \cdot \mu}{\lambda} - \text{число Прандтля}.$$

$$Nu = C \cdot Re^a Pr^b$$

Константы C, a, b находятся при проведении экспериментов. Так для цилиндрической трубы:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} Pr^{0,33}$$

Метод масштабных преобразований уравнений теплообмена

Пример: уравнение стационарного конвективного теплообмена.

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{cm}, \text{ где } q \text{ — тепловой поток в стенку;}$$

$$q = \alpha \cdot \Delta T, \quad \alpha \text{ — коэф-т теплоотдачи.}$$

Рассмотрим две подобные в тепловом отношении системы (подобны тепловые потоки). Соблюдается также геометрическое и гидродинамическое подобие.

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot (\Delta T)_1 = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}, \\ \alpha_2 \cdot (\Delta T)_2 = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y_2}, \end{cases} \quad C_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; C_T = \frac{(\Delta T)_2}{(\Delta T)_1}; C_y = \frac{y_2}{y_1}; C_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

$$C_\alpha \cdot C_T \cdot \alpha_1 \cdot (\Delta T)_1 = -\frac{C_\lambda \cdot C_T}{C_y} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} \rightarrow C_\alpha \cdot C_T = \frac{C_\lambda \cdot C_T}{C_y} \rightarrow \frac{C_\alpha \cdot C_y}{C_\lambda} = 1.$$

$$\frac{\alpha_1 \cdot y_1}{\lambda_1} = \frac{\alpha_2 \cdot y_2}{\lambda_2} = idem = Nu.$$

Получили критерий подобия рассматриваемого процесса – число Нуссельта.

Плоская поверхность твердого тела омывается жидкой или газообразной средой.

Добавятся уравнения энергии, движения и неразрывности. Аналогично

Из уравнения энергии:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \leftrightarrow \frac{C_T}{C_t} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{C_u C_T}{C_l} \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{C_a C_T}{C_l^2} \left[a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right].$$

$$\frac{C_T}{C_t} = \frac{C_u C_T}{C_l} = \frac{C_a C_T}{C_l^2} \rightarrow \frac{C_a C_t}{C_l^2} = 1; \frac{C_u C_l}{C_a} = 1$$

$$Fo = \frac{at}{l^2} - \text{критерий Фурье}; Re = \frac{ul}{a} - \text{критерий Пекле}$$

Из уравнения движения (например, проекция на

$$OX): \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$C_\rho \frac{C_u}{C_t} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{C_\rho C_u^2}{C_l} \left(\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = C_\rho C_g (\rho g_x) - \frac{C_\rho}{C_l} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{C_\mu C_u}{C_l^2} \left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{C_\rho C_u}{C_t} = \frac{C_\rho C_u^2}{C_l} \rightarrow Sh = \frac{ut}{l} - \text{критерий Струхаля}; \frac{C_\rho C_u^2}{C_l} = C_\rho C_g \rightarrow Fr = \frac{u^2}{gl} - \text{критерий Фруда};$$

$$\frac{C_\rho C_u^2}{C_l} = \frac{C_\rho}{C_l g} \rightarrow Eu = \frac{\rho}{\rho u^2} - \text{критерий Эйлера}; \frac{C_\rho C_u^2}{C_l} = \frac{C_\mu C_u}{C_l^2} \rightarrow Re = \frac{ul\rho}{\mu} - \text{критерий Рейнольдса}$$

Основные критерии

подобия

Гидродинамические критерии подобия	
Число Рейнольдса (Re)	Определяет соотношение между силами инерции и силами трения в потоке
Число Эйлера (Eu)	Характеризует соотношение сил давления и сил инерции в потоке
Число Фруда (Fr)	Характеризует отношение сил инерции и тяжести в потоке
Число Струхала (Sh)	Характеризует отношение времени к периоду релаксации потока
Тепловые критерии подобия	
Число Нуссельта (Nu)	Характеризует отношение интенсивностей конвективного и кондуктивного переноса тепла
Число Прандтля (Pr)	Является критерием подобия температурного и скоростного полей, а также характеризует свойства теплоносителя
Число Фурье (Fr)	Характеризует отношение времени к периоду релаксации поля температур в теле
Число Пекле (Pe)	Характеризует соотношение между конвективным и молекулярным переносом теплоты в потоке

Обобщение опытных данных на основе теории подобия

1. Какие величины нужно измерять в опыте? – Все величины, содержащиеся в числах подобия изучаемого процесса (1 теорема).
2. Как обрабатывать результаты опыта? – Результаты опыта следует обрабатывать в числах подобия и зависимость между ними представлять в виде Уравнений подобия. Это позволит найти общую закономерность, справедливую для всех процессов, подобных изучаемому (2 теорема).
3. Какие явления подобны изучаемому? – Подобны те явления, у которых подобны условия однозначности и равны определяющие числа подобия (3 теорема).

Например, располагая данными измерений коэффициента теплоотдачи при вынужденном движении воздуха, по опытным данным можно получить графическую зависимость от скорости:

$$\alpha = f(\omega) \rightarrow \alpha = c_1 \cdot \omega^n, \text{ где } c_1 \text{ и } n - \text{ постоянные}$$

Справедливо лишь для частного случая! Для того, чтобы результаты опытов можно было распространить на все подобные процессы, обработка результатов опытов должна производиться в числах подобия.

Так, для воздуха $Pr=0,7$. Можно записать уравнение подобия:

$$Nu = f(Re) \text{ или } \alpha \cdot l \cdot \lambda = f(\omega \cdot l / \mu)$$

$$Nu = C \cdot Re^a$$

Обобщенная формула позволяет установить, какое влияние на коэффициент теплоотдачи оказывают такие величины, как геометрический размер, к-т вязкости среды без проведения дополнительных измерений. И для всех подобных процессов!