Аксиомы, теоремы и методика их изучения в курсе математики средней школы

План

- 1. Суждения и их виды. Место аксиом и теорем в школьном курсе математики.
- 2. Теоретические сведения о теоремах и их доказательствах.
- 3. Организация работы с учащимися по изучению теорем.

Дополнительная рекомендуемая литература

- Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам в школе, М.: Просвещение, 2000
- Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений, М.: Просвещение, 2006
- Грудёнов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Книга для учителя.- М.: Просвещение, 1990

Суждение -

форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается относительно предметов, их свойств и отношений.

Пример.

1. Δ ABC равнобедренный.
2. Будет ли Δ ABC равнобедренным?

S – субъект суждения, P - предикат (то, что утверждается или отрицается

S есть P

Виды суждений

- а) по объёму отображаемых предметов: частные и общие
- б) по качеству отображаемых предметов: утвердительные и отрицательные

Виды суждений

- Общеутвердительные

Пример: Все квадраты являются прямоугольниками

- Общеотрицательные

Пример: Никакие треугольники не являются квадратами

- Частноутвердительные

Пример: Некоторые треугольники являются равнобедренными

- Частноотрицательные

Пример: Существуют квадратные уравнения, не являющиеся приведёнными

Формы словесного выражения суждений

- Категорическая

«Вертикальные углы равны»

- Условная

«Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны»

- **Аксиомы** – утверждения, принимаемые без доказательства в данной теории

- **Теоремы** – утверждения, истинность которых устанавливается посредством доказательства

Структура теоремы:

S – условие, P – заключение

$$S \Rightarrow P$$

По структуре:

простые и сложные

Виды теорем:

1. Прямая $S \Rightarrow P$

В параллелограмме противоположные углы равны

2. Обратная $P \Rightarrow S$

Если в четырёхугольнике противоположные углы равны, то он является параллелограммом

3. Противоположная к прямой $\overline{S} \Rightarrow \overline{P}$

Если четырёхугольник не является параллелограммом, то его противоположные углы не равны

4. Противоположная к обратной $\overline{P} \Rightarrow \overline{S}$

Если в четырёхугольнике противоположные углы не равны, то он не является параллелограммом

Необходиммые и достаточные условия

- Если S => P – истинное высказывание, то

P называют необходимым условием для S

S – достаточным условием для P

- Если S <=> P – истинное высказывание,то

S – необходимое и достаточное условие для P

P – необходимое и достаточное условие для S

Примеры

- «В параллелограмме противолежащие углы равны»

«Четырёхугольник – параллелограмм» - достаточное условия для равенства его противолежащих углов.

«Равенство противолежащих углов четырёхугольника» – необходимое условие того, чтобы четырёхугольник был параллелограммом

- «Диагонали прямоугольника равны»

«Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник»

«Равенство диагоналей паралелограмма» - необходимое и достаточное условие для того, чтобы параллелограмм был прямоугольником

Структура доказательства

- Тезис – то что нужно доказать
- Доводы (аргументы) – то, что используется при доказательстве
- Демонстрация – способ логической связи между тезисом и аргументами (способ рассуждения)

Виды доказательств:

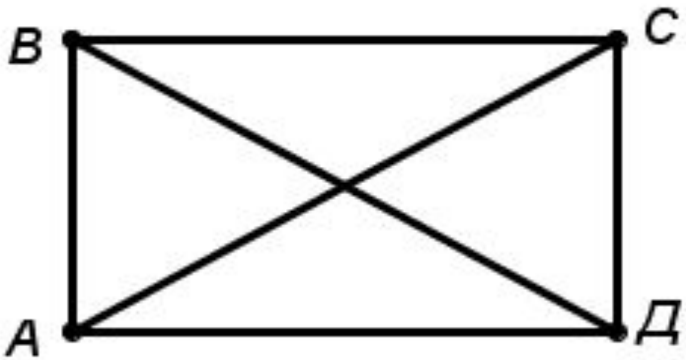
- Прямое
- Косвенное

а) метод от противного

б) разделительное доказательство

Примеры:
а) прямое доказательство

«В прямоугольнике диагонали равны»



Дано: АВСД - прямоугольник

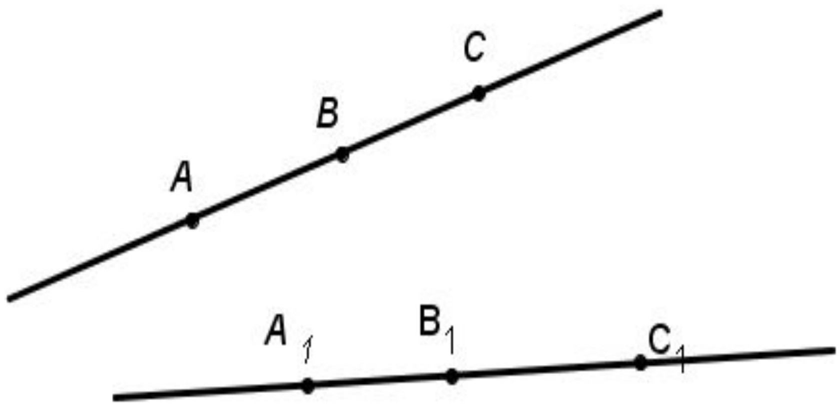
Доказать, что АС = ВД

Доказательство

1. Рассмотрим Δ АСД и Δ ДВА
2. ∟ВАД = ∟СДА = 90^0 (т.к. АВСД – прямоугольник)
3. АД – общая
4. СД = АВ (как противоположные стороны прямоугольника)
5. Значит Δ АСД = Δ ДВА (по двум катетам)
6. АС =ВД (в равных треугольниках соответствующие стороны и углы равны)

Примеры: б) косвенное доказательство

«Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на одной прямой, и сохраняется порядок их следования»



Дано: $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$

$A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$

$AB + BC = AC$

Доказать, что 1) A_1, B_1, C_1 - лежат на одной прямой

2) B_1 лежит между A_1 и C_1

I. Используется метод от противного

Пусть A_1, B_1, C_1 - не лежат на одной прямой.

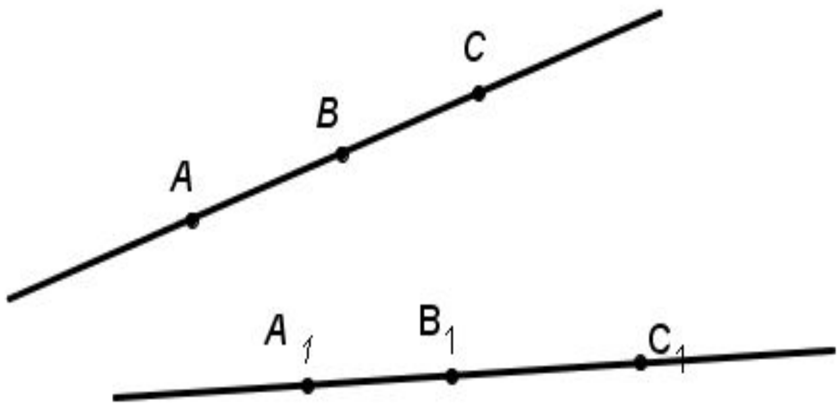
Тогда для $\Delta A_1B_1C_1$: $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$

По определению движения $AC < AB + BC$ (противоречие с условием)

Значит A1,B1,C1- лежат на одной прямой.

Примеры: б) косвенное доказательство

«Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на одной прямой, и сохраняется порядок их следования»



Дано: $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$

$A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$

$AB + BC = AC$

Доказать, что 1) A_1, B_1, C_1 - лежат на одной прямой

2) B_1 лежит между A_1 и C_1

II. Используется разделительное док-во.

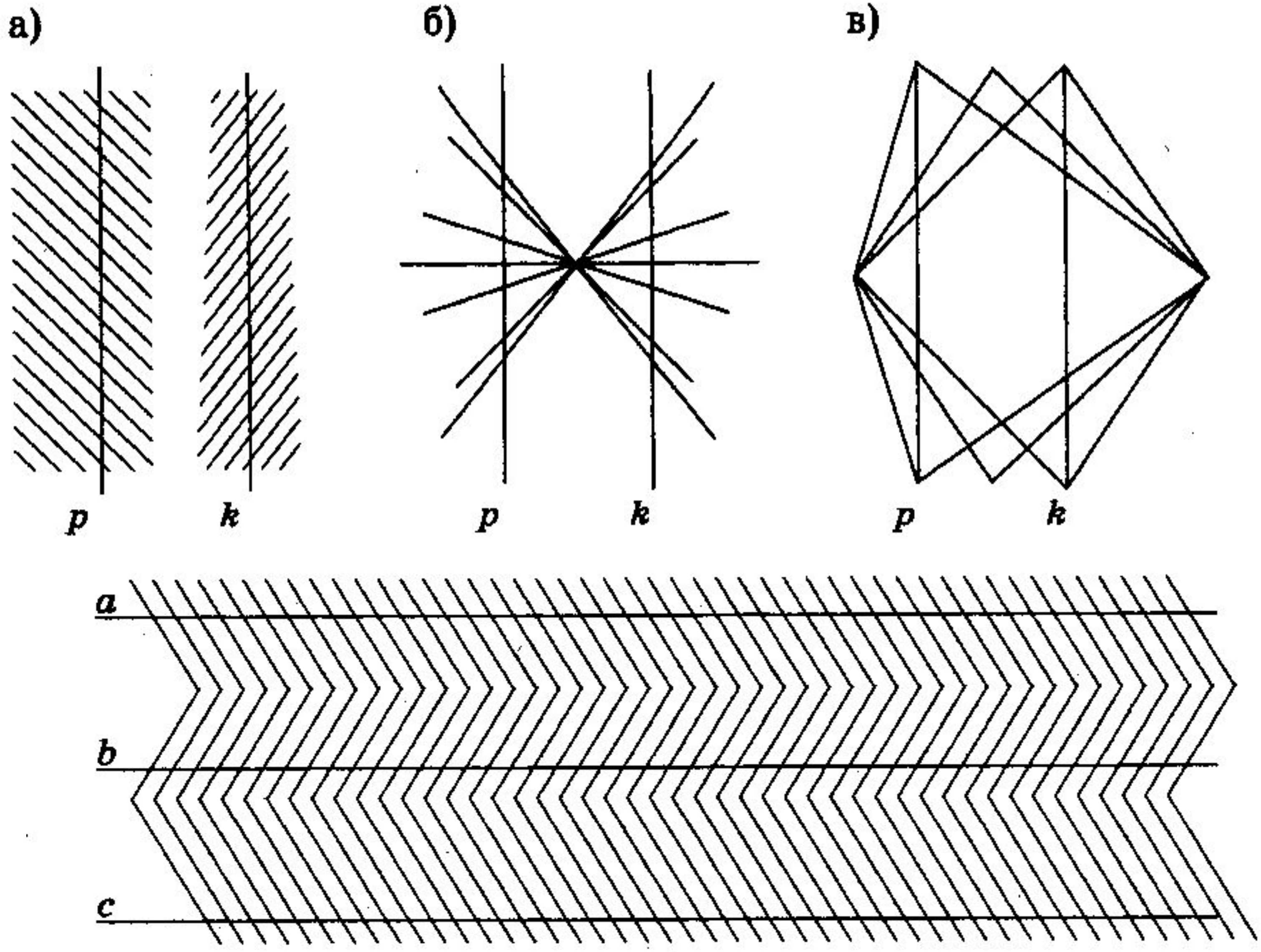
Для точек A_1, B_1, C_1 существует три варианта расположения:

A_1 лежит между B_1 и C_1 Значит $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$ Тогда $AB + AC = BC$ (!?)	**C_1 лежит между B_1 и A_1 Значит $A_1C_1 + C_1B_1 = A_1B_1$ Тогда $AC + CB = AB$ (!?)**	**B_1 лежит между A_1 и C_1**

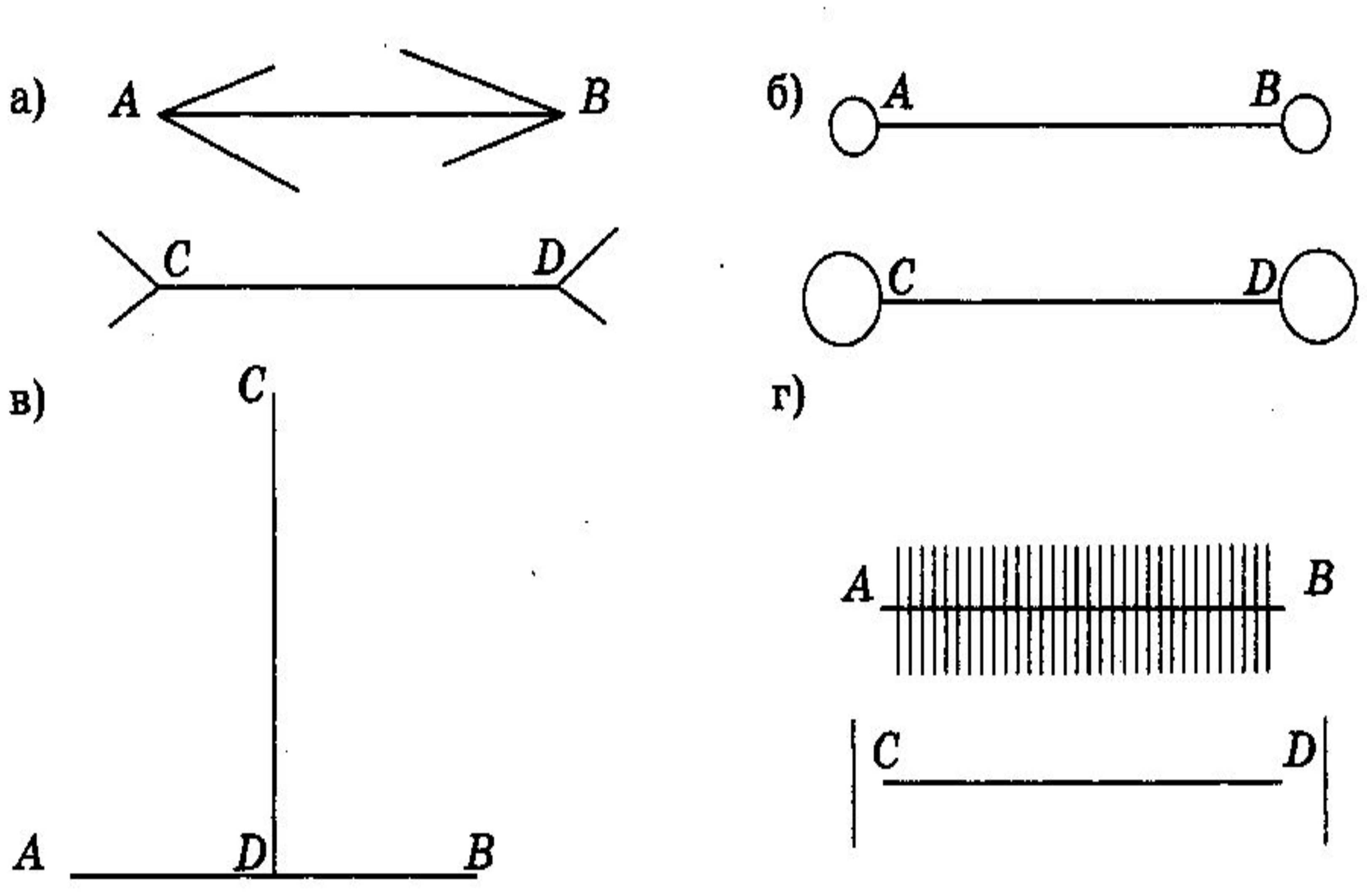
Воспитание потребности в доказательных рассуждениях осуществляется при использовании

- Приёмов, показывающих ограниченность опытно-индуктивных обоснований
- Приёмов, иллюстрирующих эффективность логических рассуждений

Примеры зрительных иллюзий



Примеры зрительных иллюзий



Примеры упражнений 2-ого вида

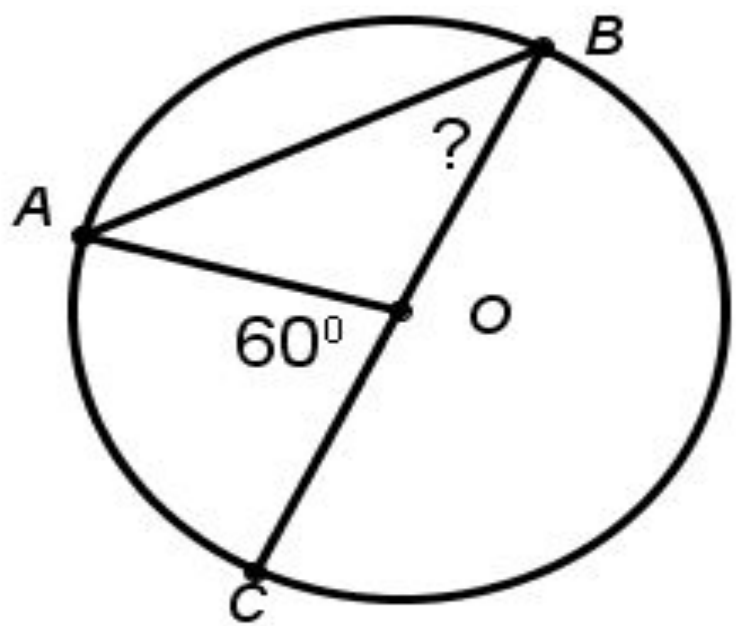
- Верны ли утверждения:

а) Все ломаные состоят из трёх звеньев

б) Всякий квадрат является прямоугольником

- Существует ли треугольник, длины сторон которого равны 4 см, 6 см, 7 см?
- Известно, что два смежных угла в сумме составляют 180^0. Могут ли два смежных угла быть прямыми, тупыми и острыми?

Пример задачи, включающий элементы док-ва теоремы о вписанном угле:



Дано:

∟ABC –вписанный

∟AOC = 60^0

Найти ∟ABC

Этапы в изучении теорем

- Мотивация изучения теоремы
- Ознакомление с фактом отраженным в теореме
- Формулирование теоремы, усвоение её содержания
- Поиск пути доказательства
- Доказательство теоремы
- Усвоение теоремы: усвоение формулировки и доказательства теоремы, применение теоремы при решении задач
- Установление связей теоремы с другими теоремами курса

Примеры организации этапов мотивации и раскрытия содержания теоремы

Пример 1.: 9 класс, Формула n – ого члена арифметической прогрессии

а) Найти первые 5 членов арифметической прогрессии -21,3; -18,6; ……

б) Найдите 100-й член арифметической прогрессии, заданной в первом задании.

в) Попробуем найти формулу для вычисления член прогрессии с большими номерами.

$a_2 = a_1 + d$ $\qquad a_{100} = a_1 + 99d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$ $\qquad a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

……………………

Примеры организации этапов мотивации и раскрытия содержания теоремы

Пример 2. 8 класс, теорема о вписанном угле

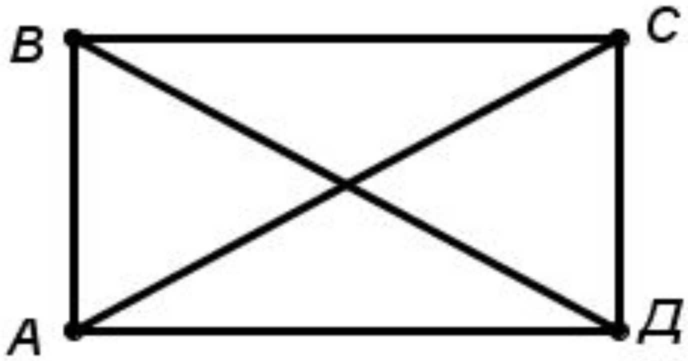
«Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается»

Предлагаем выполнить лабораторную работу:

1. Построить окружность и вписанный в неё угол.
2. Для измерения градусной меры дуги, на которую опирается вписанный угол, построить соответствующий ей центральный угол.
3. Измерить градусные меры вписанного угла и градусную меру дуги, на которую он опирается.
4. Сравнить полученные данные и сделать вывод о соотношении градусных мер вписанного угла и дуги, на которую он опирается.

Организация работы с помощью «Живой математики»

Теорема :«В прямоугольнике диагонали равны»



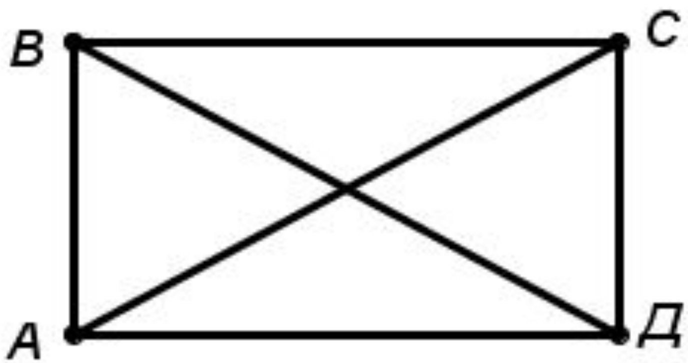
Дано: АВСД - прямоугольник

Доказать, что АС = ВД

Доказательство

1. Рассмотрим Δ АСД и Δ ДВА
2. ∟ВАД = ∟СДА = 90^0 (т.к. АВСД – прямоугольник)
3. АД – общая
4. СД = АВ (как противоположные стороны прямоугольника)
5. Значит Δ АСД = Δ ДВА (по двум катетам)
6. АС =ВД (в равных треугольниках соответствующие стороны и углы равны)

Теорема :«В прямоугольнике диагонали равны»



Дано: АВСД - прямоугольник

Доказать, что АС = ВД

Доказательство:

Утверждение	Обоснование
1.Рассмотрим Δ АСД и Δ ДВА	По условию
2. ∟ВАД = ∟СДА = 90^0	т.к. АВСД – прямоугольник
3. АД – общая	По условию
4. СД = АВ	как противоположные стороны прямоугольника
5. Δ АСД = Δ ДВА	по двум катетам
6. АС =ВД	По определению равных треугольников

Утверждение	Обоснование
1.Рассмотрим Δ …….и Δ …….	По условию
2. ………………………..	т.к. АВСД – прямоугольник
3. АД – общая	По условию
4. СД = АВ	…………………………..
5. Δ ….. = Δ ….	По двум катетам
6. АС =ВД	……………………………

Примеры упражнений на усвоение теоремы

Для усвоения одного из свойств неравенств можно предложить следующее упражнение:

Объясните, какие из следующих пар неравенств равносильны, а какие нет?

а) $3x > 4$ и $-6x > -8$; б) $6x < 18$ и $x < 3$;

в) $\frac{\tilde{o}}{7} > 10$ и $x > 70$; г) $\tilde{o}\sqrt{\partial} < 3\sqrt{x}$ и $x < 3$.

Упражнения на усвоение теорем

Докажите равенство треугольников по следующим чертежам.