

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

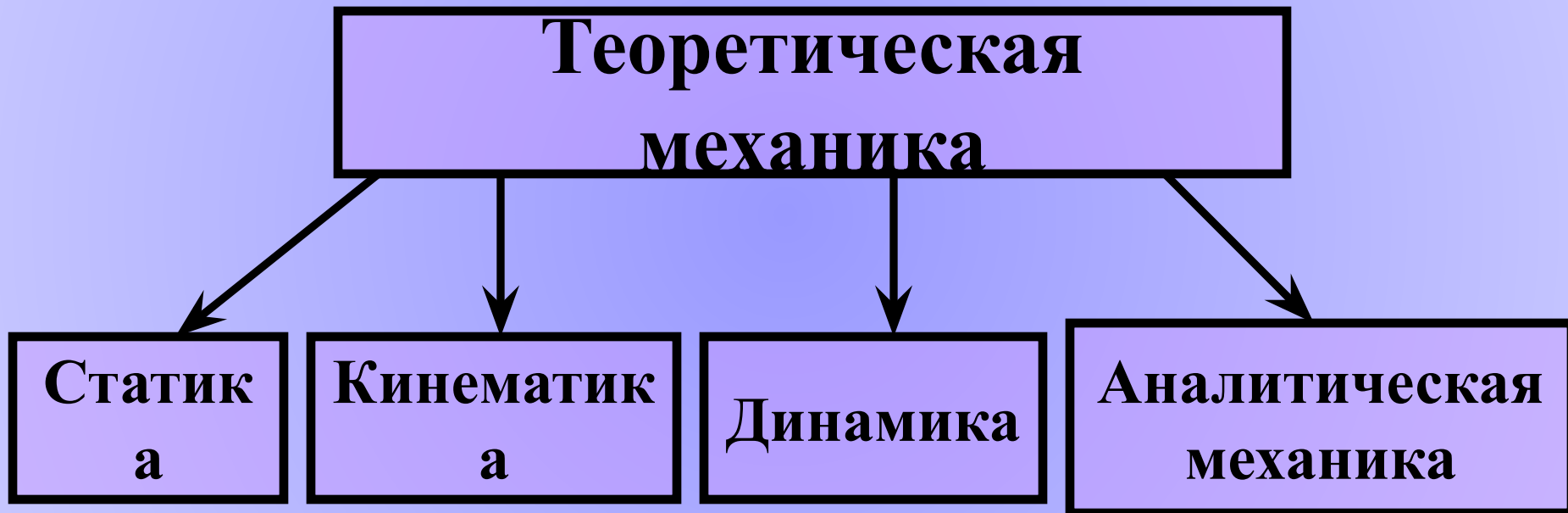
Лекции и практика:

Бородина Марина Борисовна

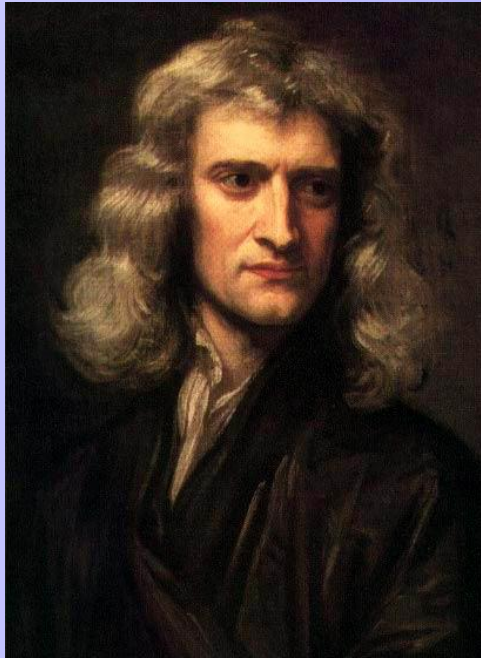
Рекомендуемая литература:

- 1) Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики.
- 2) Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике.
- 3) Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики в 2-х частях.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА - наука об общих законах движения и равновесия материальных тел и о возникающих при этом взаимодействиях между телами.



Теоретическую механику называют еще *классической механикой* или *механикой Ньютона* (1643-1727 гг.).

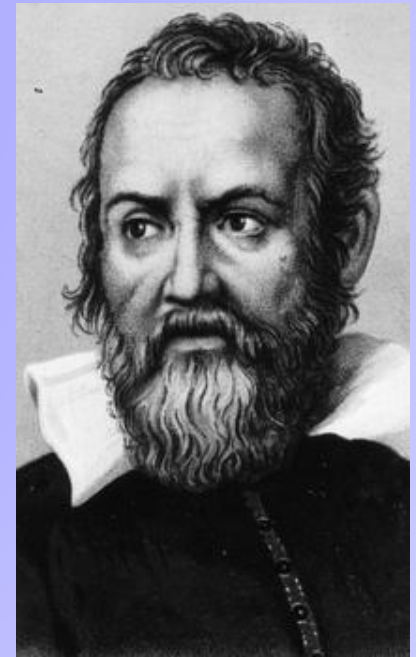


Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов.

Три закона механики (законы Ньютона) впервые в полной мере сформулированы и математически описаны Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687 год)

Первый закон (закон инерции), в менее чёткой форме, опубликовал ещё **Галилей** (1564-1642 гг.)

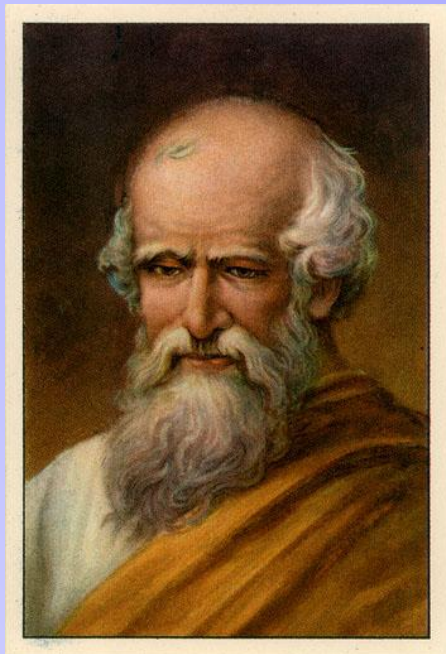
При отсутствии внешних сил тело либо покоится, либо равномерно и прямолинейно движется.





Роберт Гук (1635 г. –1703 г.) предвосхитил закон всемирного тяготения И. Ньютона; в 1679 г.

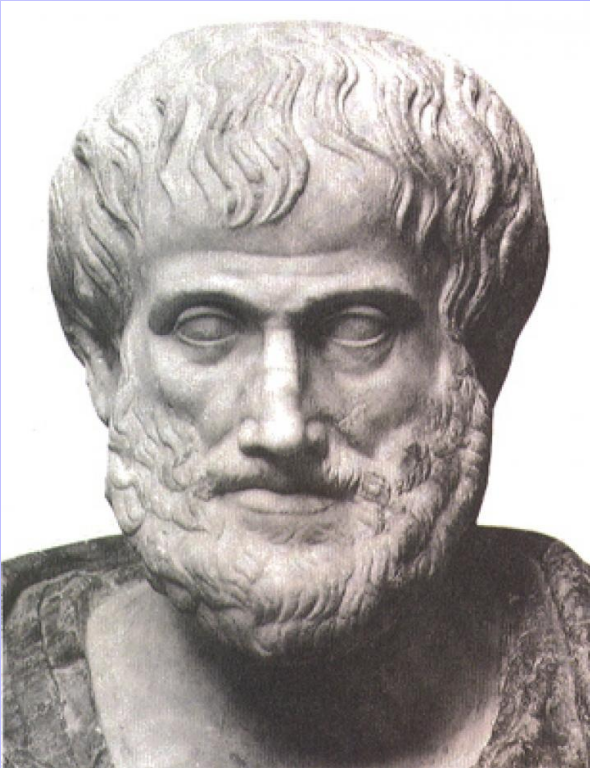
В инерциальной системе отсчёта ускорение, которое получает материальная точка с постоянной массой, прямо пропорционально равнодействующей всех приложенных к ней сил и обратно пропорционально её массе.



Ещё со времён **Архимéда** (287 до н. э. — 212 до н. э.) был известен третий закон.

Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе, взаимодействия двух тел друг на друга равны и направлены в противоположные стороны.

Правило равновесия рычага формулировали ещё **Аристотель** (384-322 гг. до н.э.) и его ученики - в трактате «Механические проблемы».



Камень, который по природе падает вниз, не приучишь подниматься вверх, приучай его, подбрасывая вверх хоть тысячу раз.

В труде «**Механические проблемы**» описаны зубчатые колеса, кривошипы, катки, полиспасты, металлические цапфы.



Л.Эйлер (1707-1783)

Разработал методы решения задач динамики точки и твердого тела путем составления и интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений



Ж.Д'Аламбер (1717-1783)

Предложил свой известный принцип решения задач динамики



Ж.Лагранж (1736-1813)

Разработал общий аналитический метод решения задач динамики на основе принципа Даламбера и принципа возможных перемещений



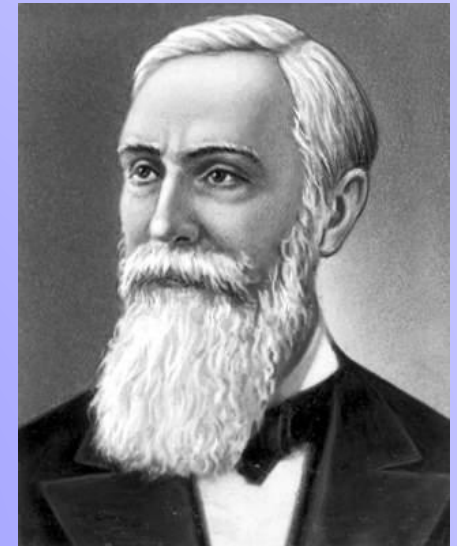
М.В.Остроградский
(1801-1861 гг.)

Принадлежит ряд
важных
исследований по
аналитическим
методам решения
задач механики



С.В.Ковалевская
(1850-1891 гг.),

Решила одну из
труднейших задач
динамики твердого
тела



П.Л.Чебышев
(1821-1894 гг.)

Создал новое
направление в
исследовании
движения
механизмов



А.М.Ляпунов
(1857-1918 гг.)



К.Э.Циолковский (1857-1935 гг.)



И.В.Мещерский
(1859-1935 гг.)

Дал строгую постановку одной из фундаментальных задач механики и всего естествознания – задачи об устойчивости равновесия и движения и разработал наиболее общие методы ее решения

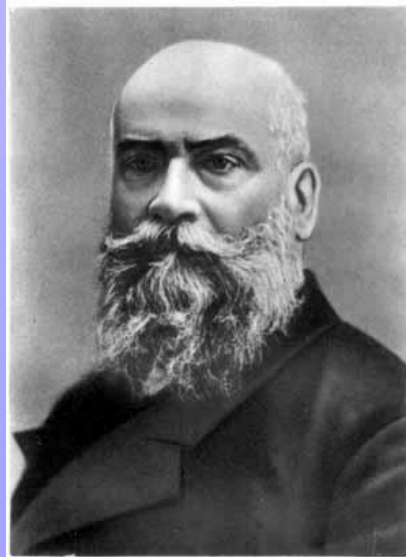
Автор ряда фундаментальных исследований по теории реактивного движения

Внес большой вклад в решение задач механики тел переменной массы



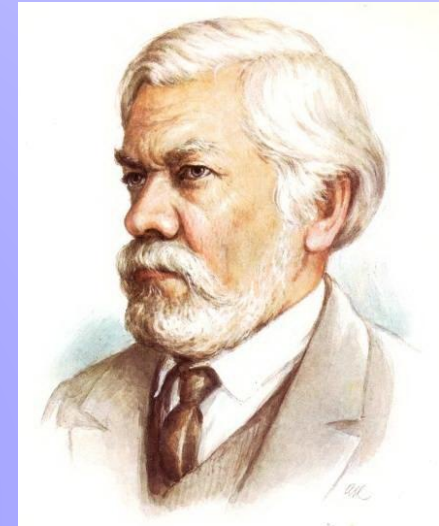
А.Н.Крылов
(1863-1945 гг.)

Разработал теорию
корабля и внес
большой вклад в
развитие теории
гироскопа и
гироскопических
приборов



Н.Е.Жуковский
(1847-1921 гг.)

Заложил основы
авиационной науки



С.А.Чаплыгин
(1869-1912 гг.)

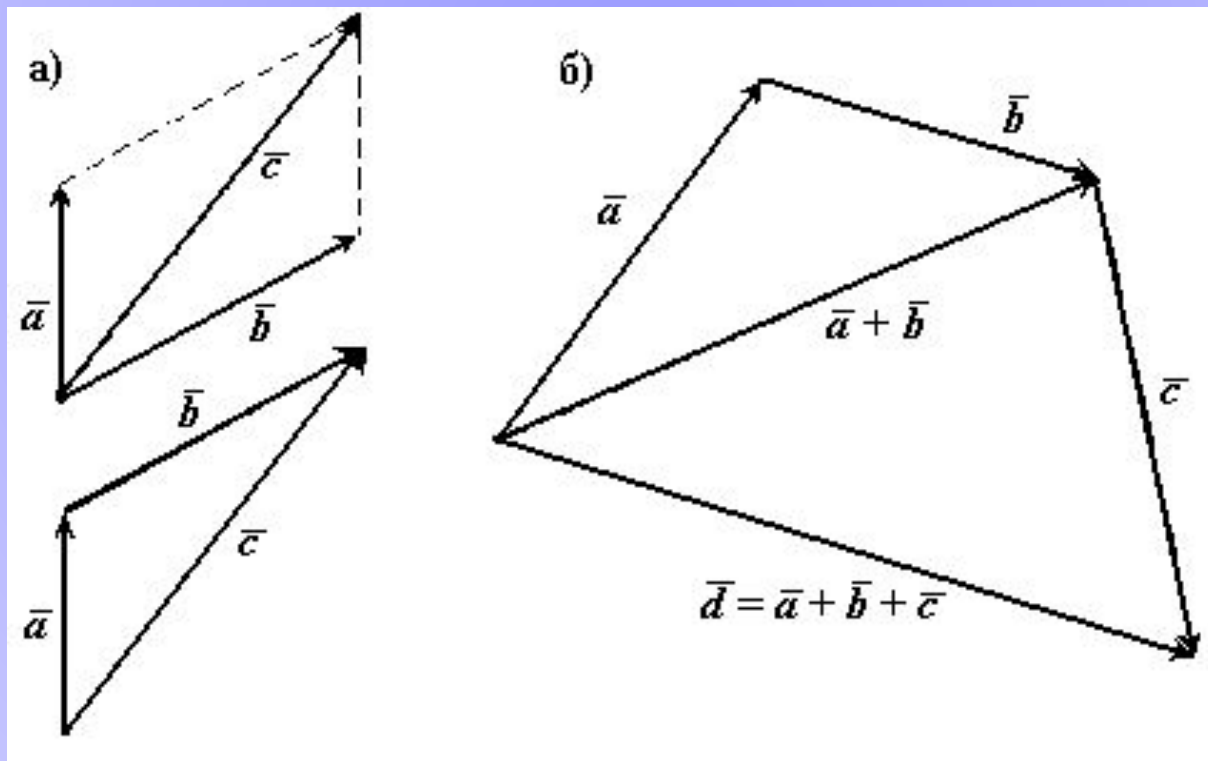
Основоположник
газовой динамики

СТАТИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Статика – учение о равновесии материальных тел и о приведении системы сил к простейшему виду.

Повторить: - Элементы векторной алгебры: векторы, их сложение, умножение, аналитическая запись этих операций.

- Решение систем линейных алгебраических уравнений.

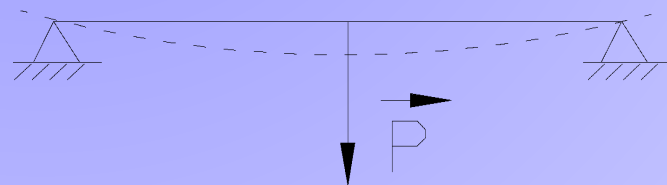
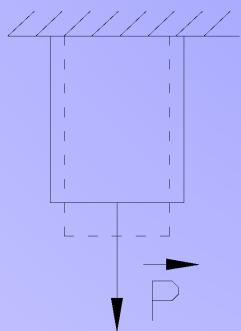


ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТАТИКИ. АБСОЛЮТНО ТВЁРДОЕ ТЕЛО

Материальная точка – всякая материальная частица или тело, размерами которого по условию задачи можно пренебречь. Вся масса частицы или тела сосредоточена в этой точке. Всякое *физическое тело* – система материальных точек.

Абсолютно твердое тело (жесткое) – это тело, расстояние между двумя любыми точками которого всегда и при всех условиях остается постоянным.

В теоретической механике все тела принято считать абсолютно твердыми.
Примеры деформации тел:



Сила – векторная величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел.

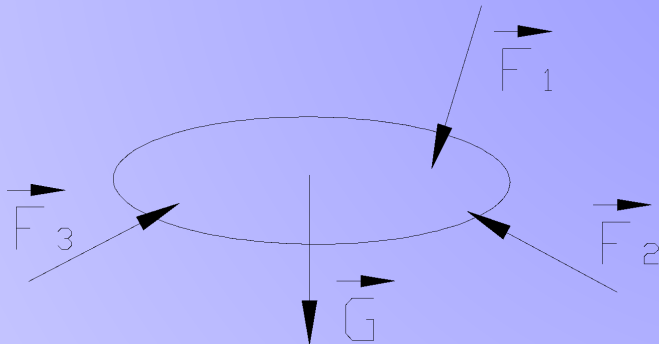
Действие силы на тело определяется:

- 1) численной величиной или модулем силы,
- 2) направлением силы,
- 3) точкой приложения силы,
- 4) линией действия силы.

Основные единицы измерения силы:

1 ньютон (1 Н) или 1 килограмм (1 кг). $1\text{ кг} = 9,81\text{ Н}$; $1\text{ Н} = 0,102\text{ кг}$.

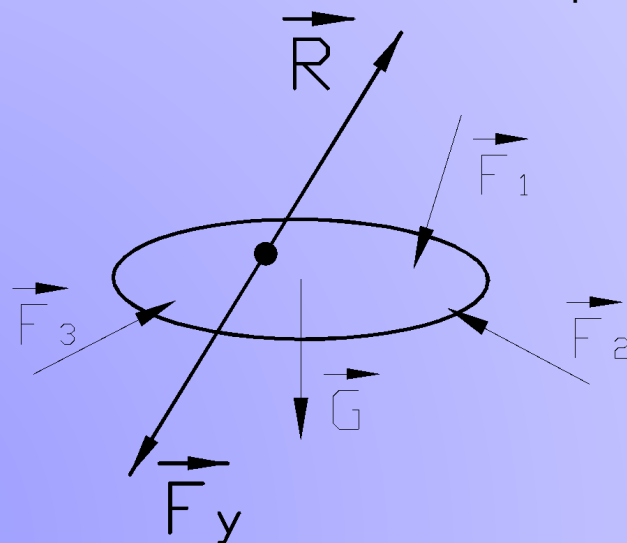
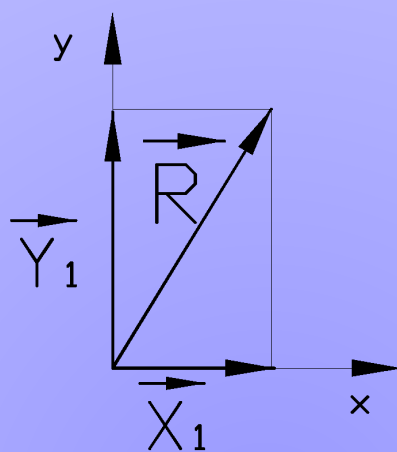
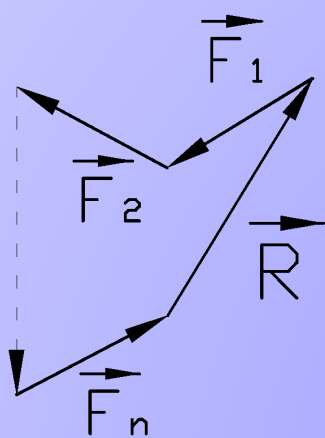
Система сил – совокупность сил, приложенных к данному телу.



Система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в равновесии, называется *уравновешенной*.

Равнодействующая – это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил на твердое тело.

Замена системы сил их равнодействующей R называется **сложением сил**. Обратный процесс называется **разложением силы R** на ее составляющие.



Уравновешивающая сила – это сила, равная по модулю равнодействующей силе, противоположная ей по направлению и действующая по той же линии действия.

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}$$

Силы, действующие на тело можно разделить на **внешние** и **внутренние**.

Внешние силы – приложены к точкам твердого тела со стороны других тел.

Внутренние силы – это силы взаимодействия между материальными точками данного тела.

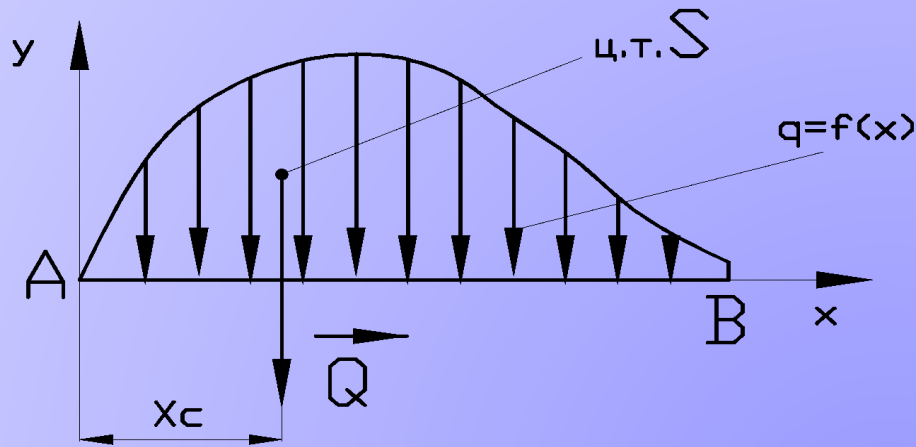
Внутренние силы, действующие в данном абсолютно твердом теле, образуют уравновешенную систему сил и на условия равновесия тела не влияют.

Сосредоточенной силой называется сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке.

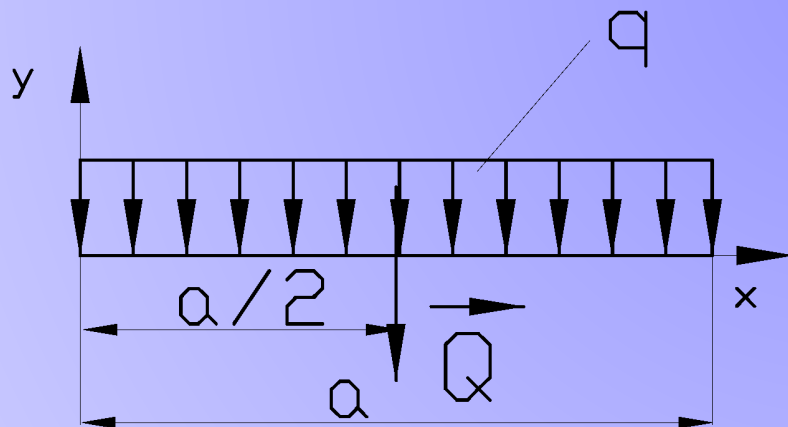
Распределенными называются силы, действующие на все точки данного объема или данной части поверхности.

Плоская система распределенных сил характеризуется интенсивностью q [Н/м] или [кГ/м] и может быть заменена равнодействующей силой Q , которая будет проходить через центр тяжести S .

Если q изменяется по произвольному закону $q = f(x)$

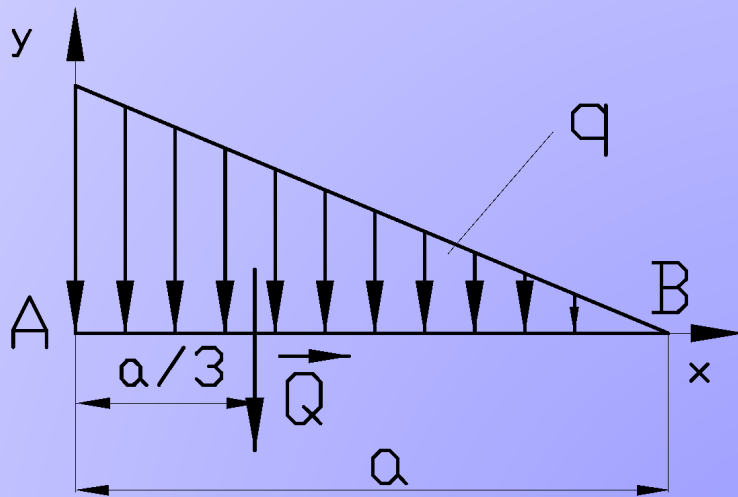


$$Q = \int_0^a f(x) dx \quad X_c = \frac{\int_0^a x \cdot f(x) dx}{\int_0^a f(x) dx}$$

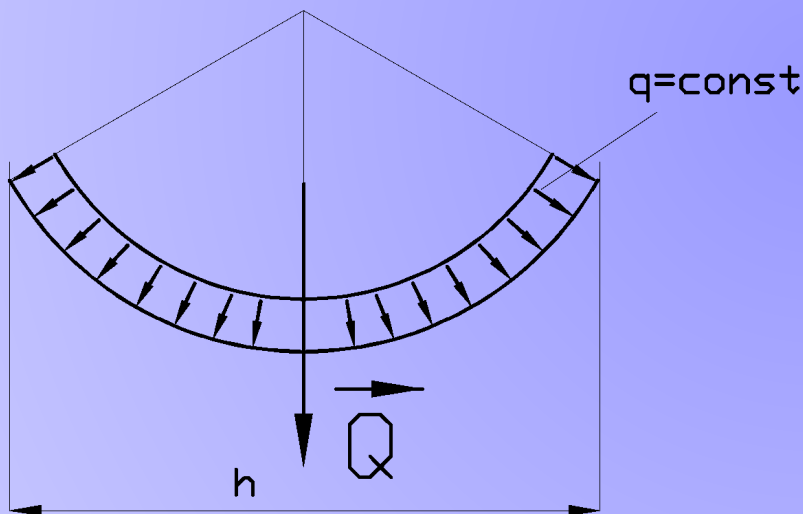


Если $q = \text{const.}$, то

$$Q = aq; \quad X_c = a/2.$$

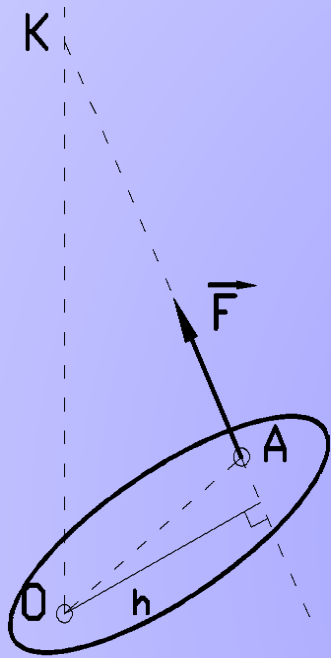


Если q – изменяется по линейному закону $q = kx$, то $Q = \frac{1}{2} aq$; $X_c = a/3$.



Если Q равномерно распределена по дуге окружности, то доказано, что сосредоточенная нагрузка $Q = qh$ (h – хорда дуги АВ) и проходит по оси симметрии дуги.

Момент силы относительно центра (или точки)



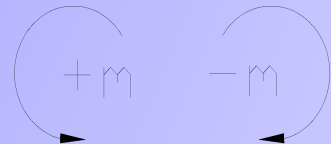
Моментом силы F относительно центра O называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы F на длину плеча h :

$$m_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

Размерность момента: [Н м] или [кГ м].

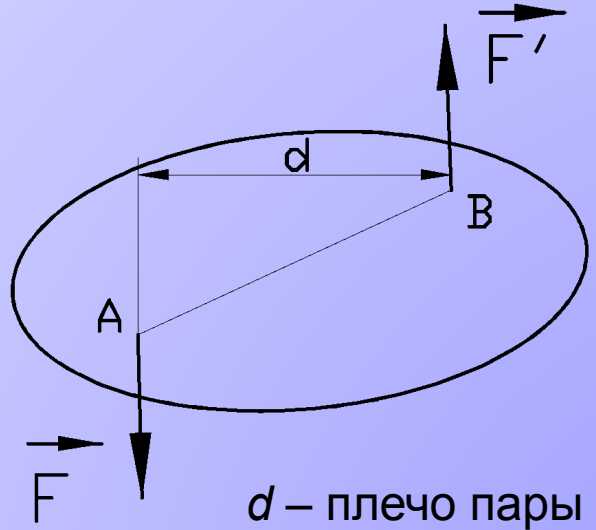
Плечо силы F относительно центра O – это кратчайшее расстояние от центра O до линии действия силы (перпендикуляр h , опущенный из центра O на линию действия силы).

В дальнейшем будем считать, что момент имеет знак «+», если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, и знак «-», если по ходу часовой стрелки



Свойства момента силы:

- 1) момент не меняется при переносе силы F вдоль линии действия;
- 2) момент равен нулю только если $F = 0$ или $h = 0$.



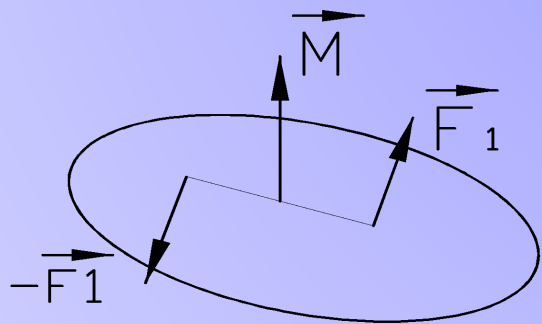
d – плечо пары

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело. Эта система сил не находится в равновесии и не имеет равнодействующей.

Моментом пары называется величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо:

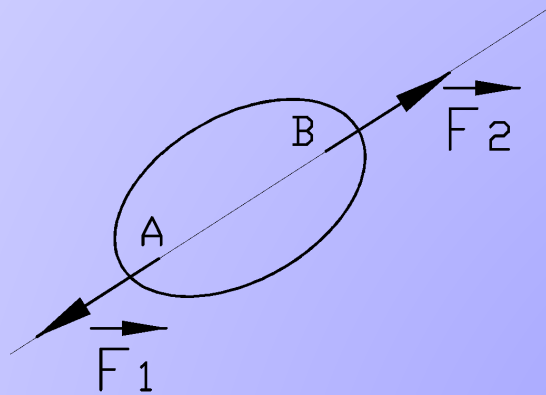
$$m = \pm F \cdot d$$

Теорема: Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любого центра лежащего в плоскости ее действия не зависит от выбора этого центра и равна моменту пары.



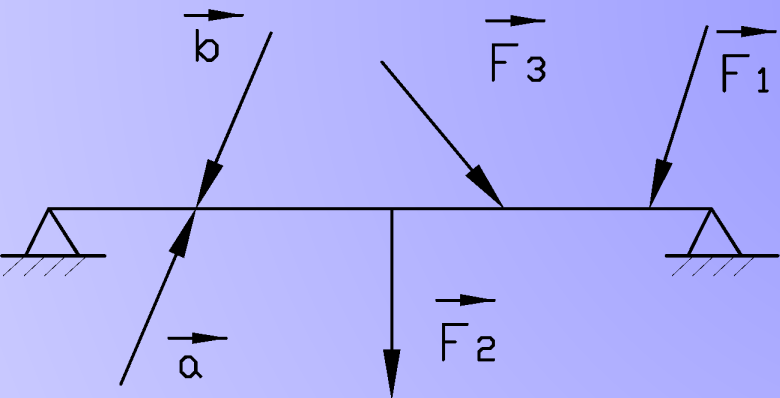
! Момент является величиной векторной, причем вектор момента перпендикулярен плоскости, в которой расположена пара сил, и направлен так, что если смотреть с вершины вектора момента, то направление момента в плоскости пары должно быть против часовой стрелки.

АКСИОМЫ СТАТИКИ



Аксиома 1. Для равновесия двух сил, приложенных к абсолютно твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы эти силы были равны по модулю и направлены в противоположные стороны по прямой, соединяющей их точки приложения.

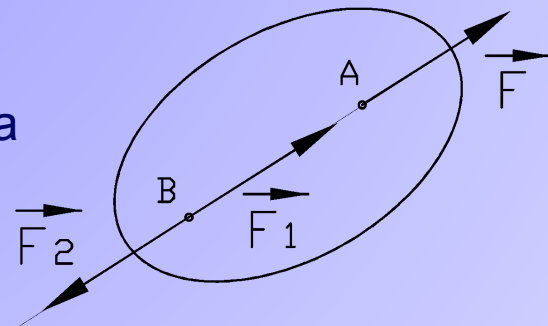
Следствие: Если система сил имеет равнодействующую, то уравнивающая сила и равнодействующая равны по модулю, лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны.

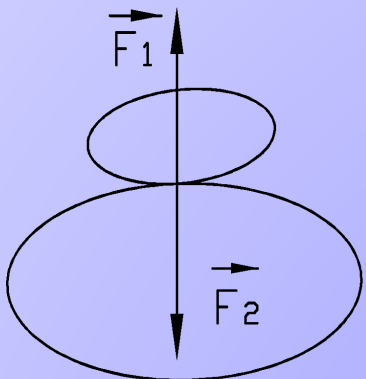


Аксиома 2. Не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, можно прибавить к этой системе сил или отнять от нее любую уравновешенную систему сил.

Следствие: Не изменяя действия данной системы сил на абсолютно твердое тело, точку приложения этой силы можно переносить по ее линии действия.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

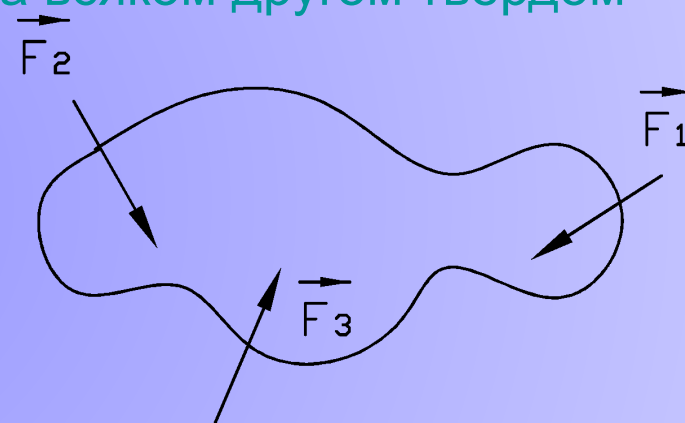
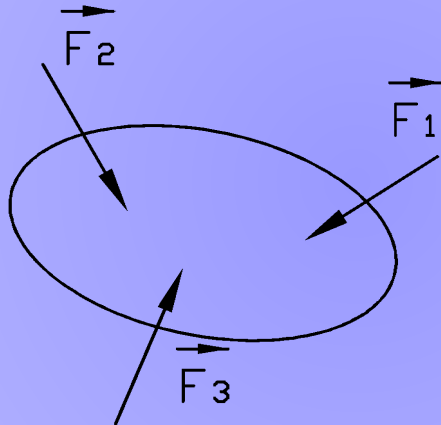
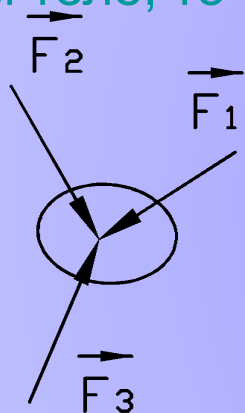




Аксиома 3. Силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

! F_1 и F_2 не являются уравновешенной системой сил, т.к. они приложены к разным телам.

Аксиома 4. Если данная система сил уравновешена на некотором твердом теле, то она будет уравновешена и на всяком другом твердом теле.



Аксиома 5. Если деформируемое тело находится в равновесии, то при затвердевании тела равновесие его не нарушается.

Прежде чем перейти к аксиоме 6 рассмотрим несколько новых понятий:

Тело называют **свободным**, если оно может двигаться в любом направлении. Тело называют **несвободным**, если оно может перемещаться только в определенных направлениях, или не может перемещаться совсем.

Материальные тела, препятствующие перемещению несвободных тел, называют связи, а силы, с которыми эти тела действуют на рассматриваемое тело – реакции связи. Как правило, направление реакции связи противоположно тому направлению, по которому связь препятствует движению данного тела.

Аксиома связей (принцип освобождения от связей). Всякое несвободное тело можно освободить от связей, заменив их реакциями, после чего можно рассматривать тело как свободное, находящееся под действием заданных сил и реакций связей.

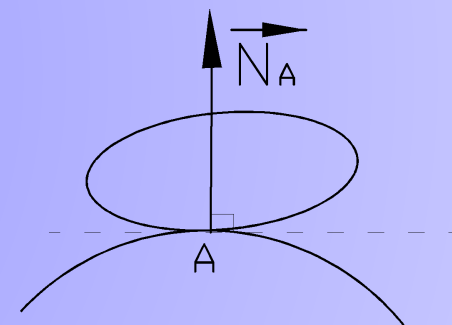
ОСНОВНЫЕ ВИДЫ СВЯЗЕЙ

1. Соприкосновение тел.

1.1. Тело опирается на гладкую поверхность в точке А.

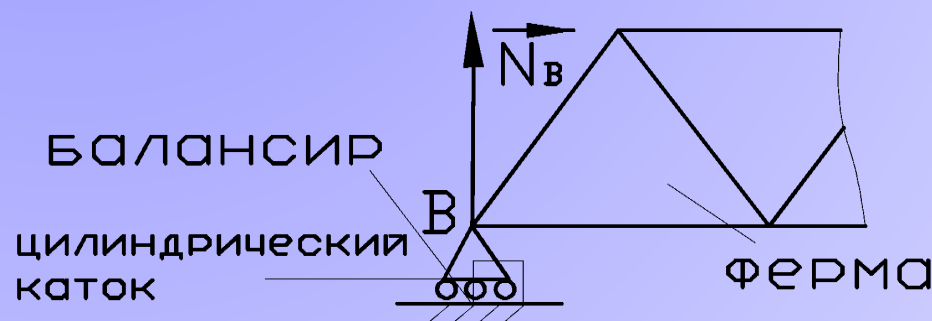
Реакции направлены по нормали к опорной поверхности

\vec{N} - нормальная реакция



1.2. Подвижный каток (шарнир).

\vec{N}_B направлена по нормали к опорной поверхности.

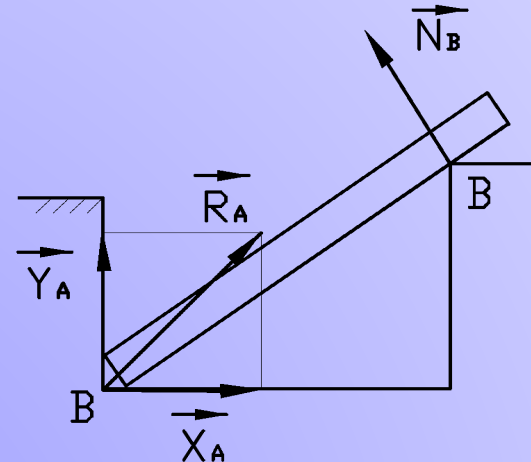


1.3. Тело опирается на двугранный угол

Реакция стенки R_A состоит из 2-х составляющих

$$\vec{R}_A = \vec{X}_A + \vec{Y}_A$$

\vec{X}_A и \vec{Y}_A перпендикулярны опорным поверхностям



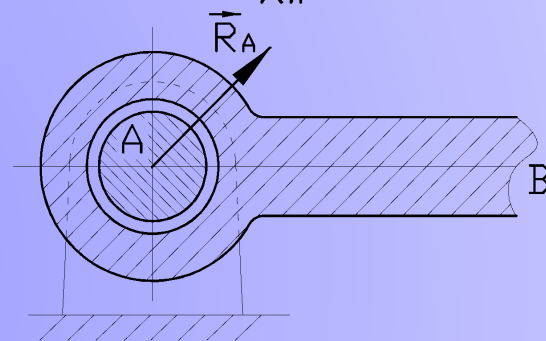
2. Шарнирное соединение тел

2.1. Цилиндрический шарнир

Ось A может быть неподвижна и подвижна.

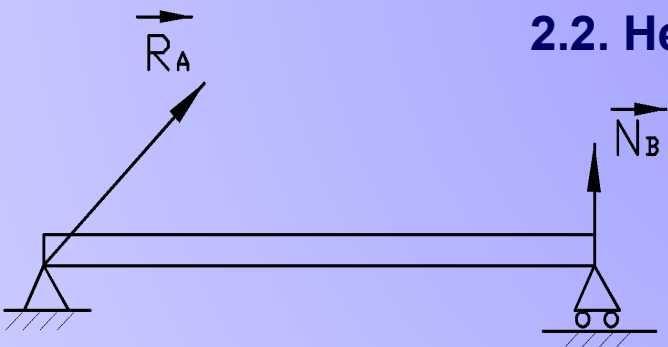
Стержень AB может вращаться вокруг оси A .

\vec{R}_A проходит через центр оси A и лежит в плоскости перпендикулярной оси.



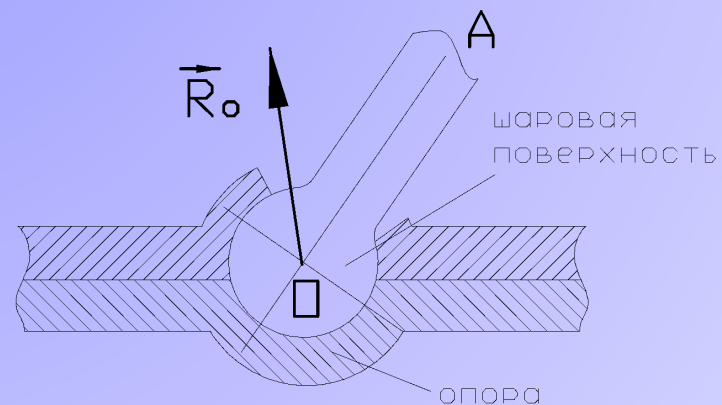
2.2. Неподвижная шарнирная опора

\vec{R}_A проходит через ось шарнира A .



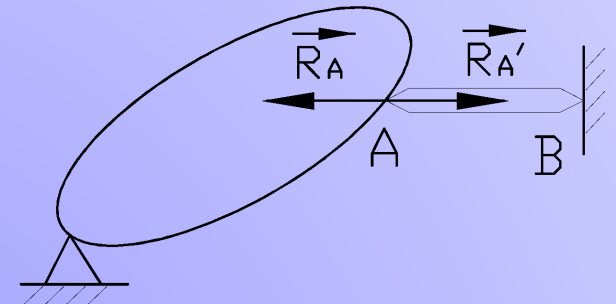
2.3. Сферический шарнир

\vec{R}_O проходит через центр шарнира O

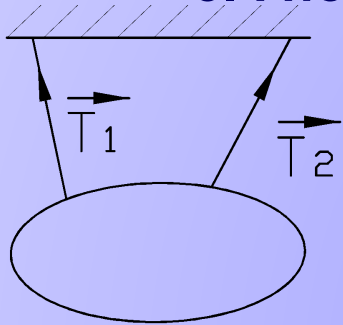


2.4. Невесомый стержень, шарнирно закрепленный на концах

\vec{R}_A направлена по оси стержня (по прямой, соединяющей точки A и B).



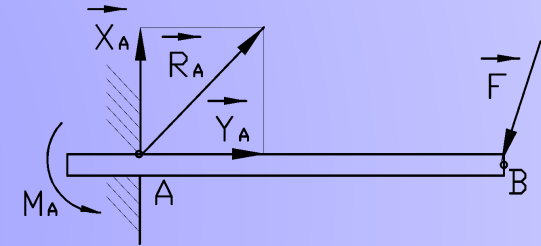
3. Гибкая связь (нить, канат, цепь)



\vec{T} – натяжение нити приложена в точке присоединения нити к телу и направлена вдоль нити.

4. Жесткая заделка

Если на балку действуют заданные силы, то в заделке появляются две реакции: сила \vec{R}_A и момент M_A .

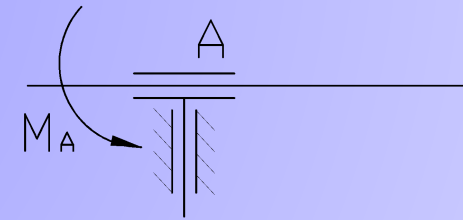
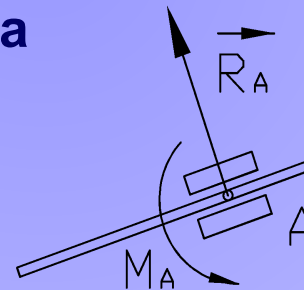


5. Скользящая опора

5.1. Простая скользящая опора

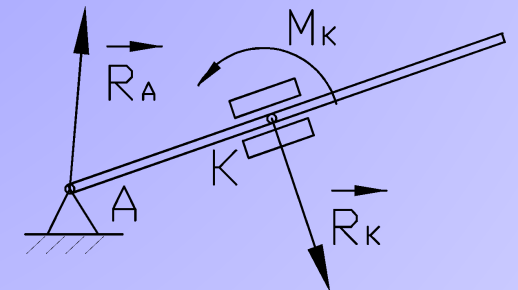
Возникают реакции \vec{R}_A и M_A .

\vec{R}_A перпендикулярна опоре.



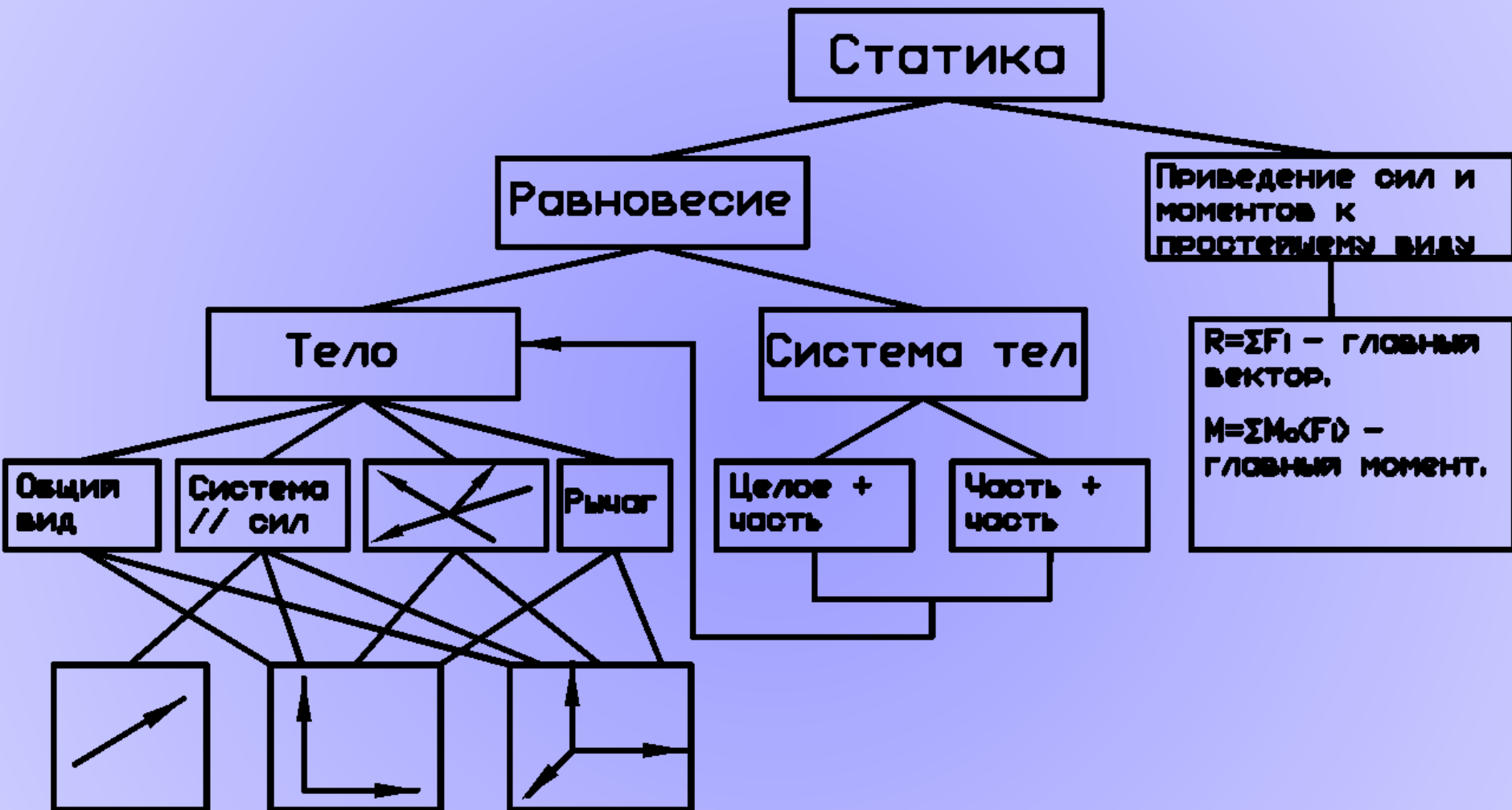
5.2. Скользящий шарнир

K – кулисный камень, AK – кулиса



Существуют также **комбинированные связи**.

ОБЩАЯ СТРУКТУРА СТАТИКИ



УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия любой плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = 0 \\ M_o = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

Аналитические (координатные) условия равновесия (1) можно получить в 3-х разных скалярных формах:

1) Основная форма.

Из (1) непосредственно следует:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{iX} = 0 \\ \sum F_{iY} = 0 \\ \sum m_o(\vec{F}_i) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

2) Вторая форма условий равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum \vec{F}_{iY} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Причём **AB** не перпендикулярно **Ox**,
A и **B** – любые две не совпадающие точки на теле.

3) Третья форма условий равновесия:

точки **A**, **B**, **C** не лежат на одной прямой.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum m_A(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\vec{F}_i) = 0 \\ \sum m_C(\vec{F}_i) = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

! Если на тело действует еще и система пар сил с моментами $m_1, m_2 \dots m_n$, то в условиях (2), (3), (4) выражения для моментов примут вид:

$$\sum m_o(\vec{F}_i) + \sum m_j = 0$$

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ (ССС)

Сходящейся называется система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке. В системе сходящихся сил не составляют уравнения моментов, так как плечи этих сил равны 0.

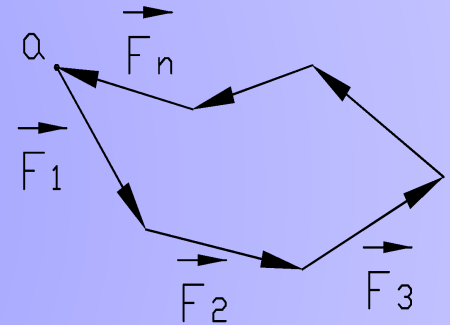
Условия равновесия: 1) В геометрической форме:

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{0}$$

2) В векторной форме: $\sum \vec{F}_i = 0$

3) В координатной (аналитической) форме: $F_i = (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} \\ \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} \\ \sum F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} \end{array} \right.$$

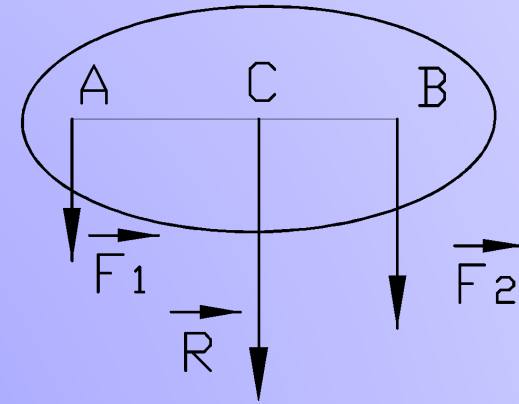


СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

1. Сложение 2-х параллельных сил:

A) Силы направлены в одну сторону.

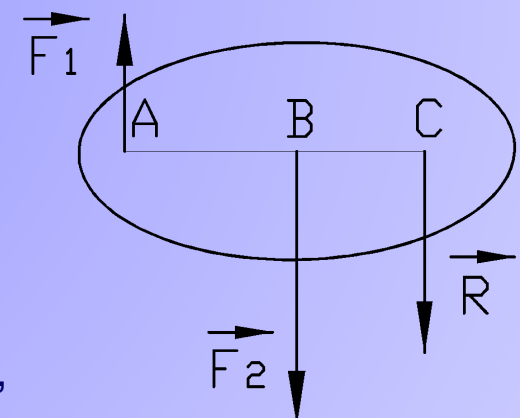
Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в одну сторону, равна по модулю сумме модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в ту же сторону, а её линия действия проходит между точками приложения слагаемых сил на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных силам.



$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R} \quad (5)$$

B) Силы направлены в разные стороны.

Равнодействующая двух действующих на абсолютно твердое тело параллельных сил, направленных в разные стороны, равна по модулю разности модулей слагаемых сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит вне отрезка, соединяющего точки приложения слагаемых сил, на расстояниях от этих точек, обратно пропорциональных



$$\frac{AC}{F_2} = \frac{BC}{F_1} = \frac{AB}{R} \quad (6)$$

2. Разложение силы на две параллельные:

Задача может быть решена, если заданы линии действия сил или модуль и линия действия одной из сил.

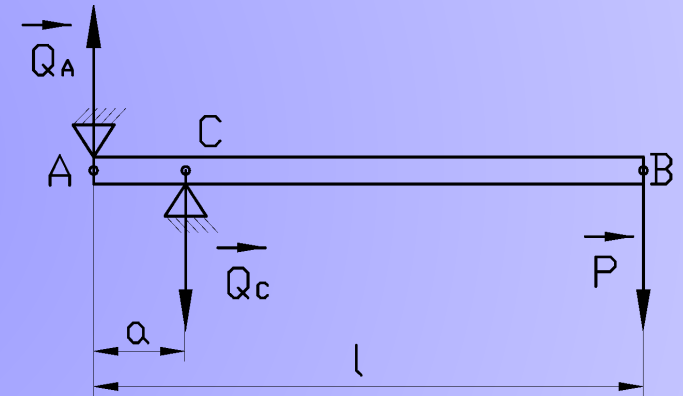
Пример: В стену толщиной $a = 0,5$ м. заделана балка AB длиной $l = 2,5$ м. К концу B балки подвешен груз $P = 3$ т. Пренебрегая весом балки, определить силы давления на стену, считая, что они приложены в точке A и C .

Решение: Силы \vec{Q}_A и \vec{Q}_C направлены в разные стороны, т.к. \vec{P} не лежит между ними.

$$\text{Т.к. } \sum \vec{F}_{iX} = 0 \quad \text{то} \quad \vec{P} = \vec{Q}_C - \vec{Q}_A$$

$$\text{Из формулы (6)} \quad \frac{l}{Q_C} = \frac{a}{P} \quad \text{отсюда:}$$

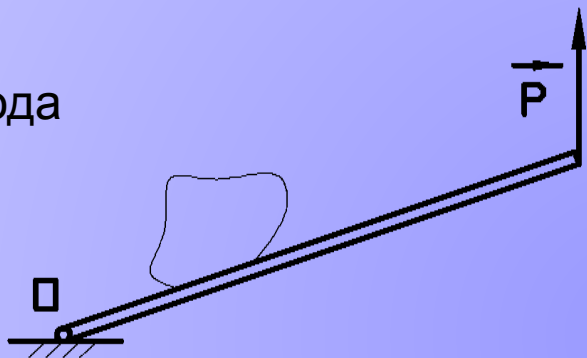
$$Q_C = \frac{l}{a} \cdot P = \frac{2.5}{0.5} \cdot 3 = 15 \text{ т.} \quad \vec{Q}_A = 12 \text{ т.}$$



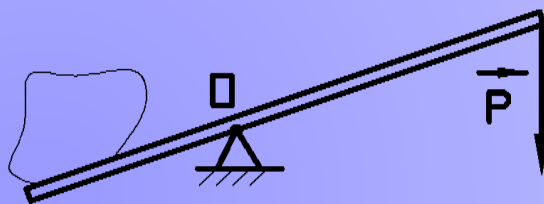
УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ РЫЧАГА

Рычагом называется твёрдое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной оси O под действием системы сил, расположенных в плоскости Oxy , перпендикулярной оси вращения.

Рычаг 1 рода



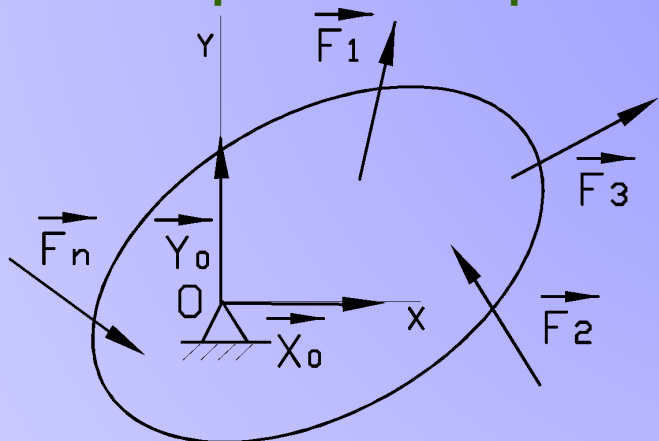
Рычаг 2 рода



Условие равновесия рычага (из системы 2):

$$\sum m_O(\vec{F}_i) = 0$$

Система уравнений для нахождения опорных реакций:



$$\begin{cases} X_O = -\sum F_{ix} \\ Y_O = -\sum F_{iy} \end{cases}$$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

$$\sum \vec{F}_{iX} = 0$$

$$\sum \vec{F}_{iY} = 0$$

$$\sum \vec{F}_{iZ} = 0$$

$$\sum m_{OX} (\vec{F}_i) = 0$$

$$\sum m_{OY} (\vec{F}_i) = 0$$

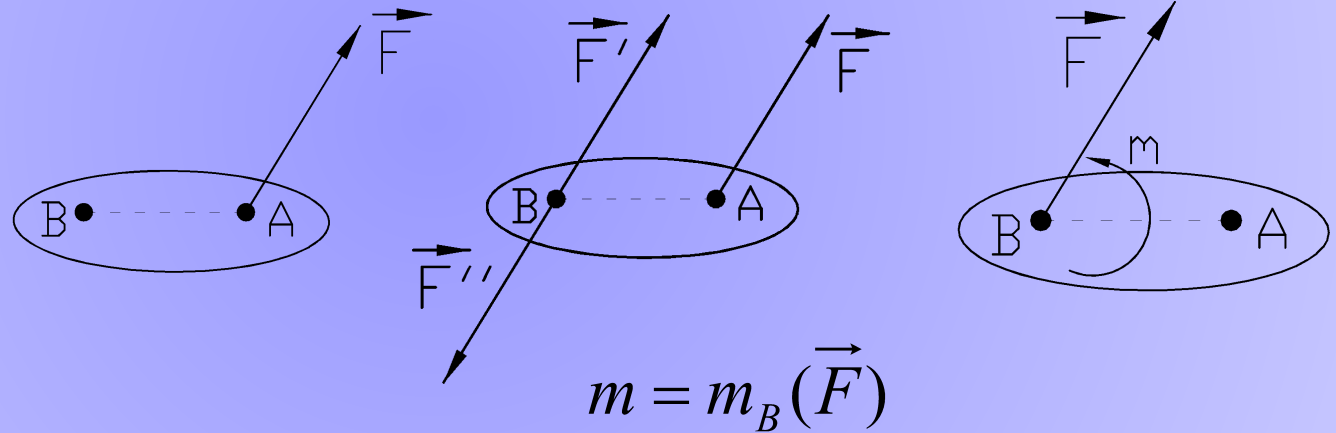
$$\sum m_{OZ} (\vec{F}_i) = 0$$

ПРИВЕДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ К ДАННОМУ ЦЕНТРУ

Теорема 1. Силу, приложенную к твердому телу, можно не изменяя оказываемого действия, переносить параллельно ей самой в любую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

$$\vec{F}' \parallel \vec{F}'' \parallel \vec{F}$$

$$|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$$

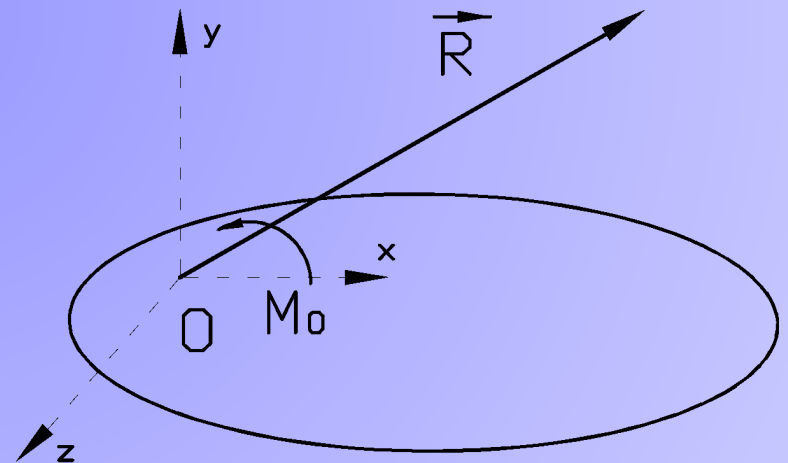
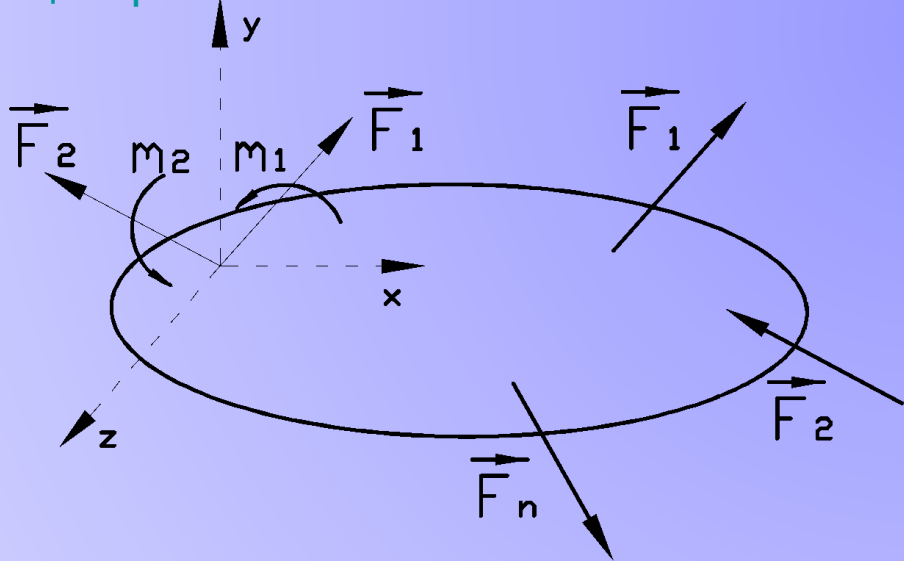


$$\{\vec{F}\} \rightarrow \{\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}''\} \rightarrow \{\vec{F}, m\}$$

Величину, равную сумме всех сил системы в центре приведения называют **главным вектором** системы сил \vec{R}

Величина, равная сумме моментов всех сил системы относительно центра приведения, называется **главным моментом** системы сил относительно центра приведения M_O

Теорема 2. Всякая плоская система сил, действующих на абсолютно твердое тело, при приведении к произвольно взятому центру O заменяется одной силой R , равной главному вектору системы и приложенной в центре приведения O , и одной парой с моментом M_O , равным главному моменту системы относительно центра O .

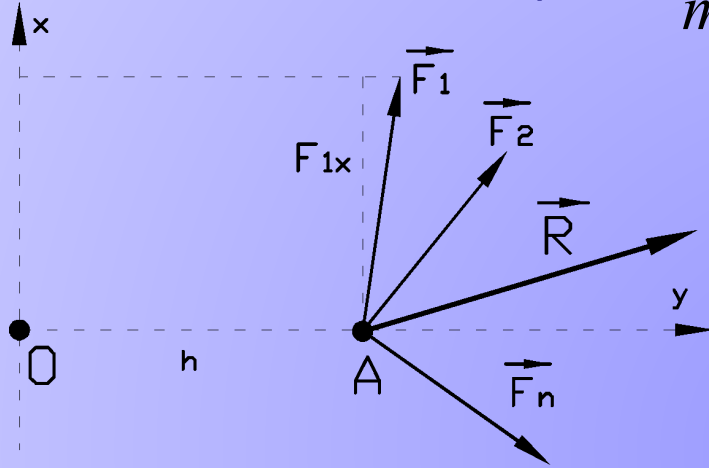


$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i \quad M_O = \sum m_O(\vec{F}_i)$$

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\} \sim \{\vec{R}, M_O\}$$

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей.

Момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно того же центра.



$$m_o(\vec{R}) = \sum m_o(\vec{F}_i)$$

$$\sum m_o(\vec{F}_{iy}) = 0$$

$$m_o(\vec{F}_i) = F_{ix} \cdot h \quad R_x \cdot h = h \cdot \sum F_{ix}$$

$$m_o(\vec{R}) = \sum m_o(\vec{F}_i)$$

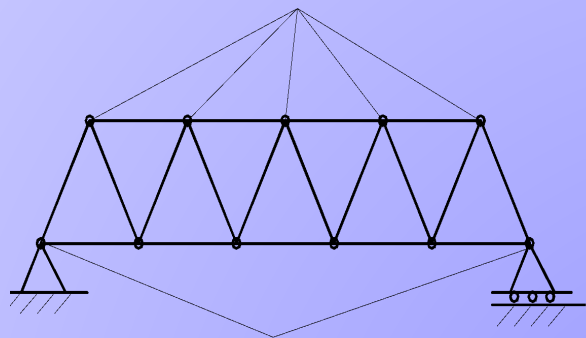
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ И НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Статически определённой задачей называется задача, для которой число неизвестных реакций связей не превышает числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Системы тел, для которых это имеет место, называют **статически определимыми системами**.

Статически неопределённая задача - задача, в которой число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, содержащих эти реакции. Системы тел, для которых это имеет место, называют **статически неопределимыми системами**.

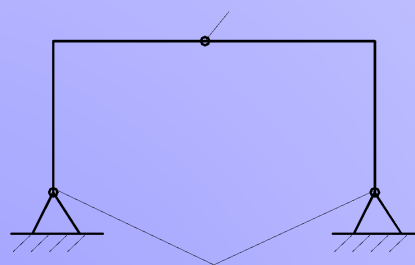
РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ

СВЯЗИ ВНУТРЕННИЕ



СВЯЗИ ВНЕШНИЕ

СВЯЗИ ВНУТРЕННИЕ

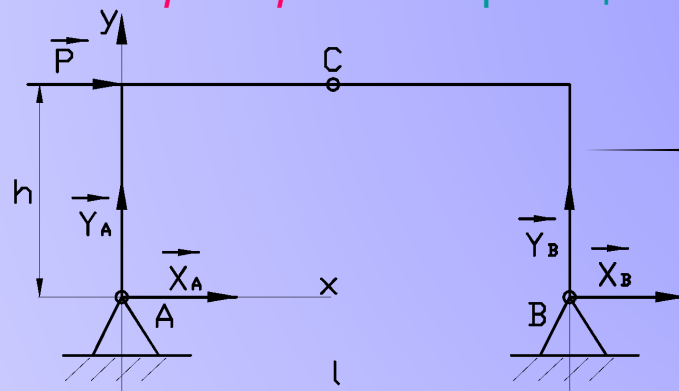


СВЯЗИ ВНЕШНИЕ

Связи внутренние соединяют части данной конструкции.

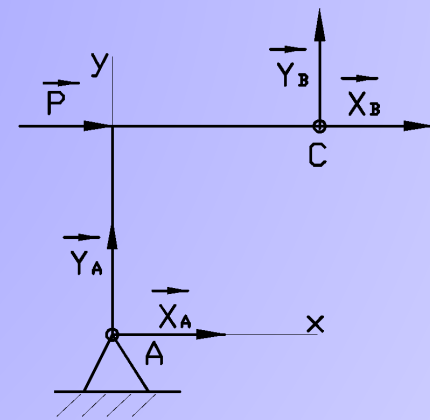
Связи внешние соединяют конструкцию с телами, в неё не входящими, в т.ч. с опорами.

Пример. Найти реакции опор трёхшарнирной арки.



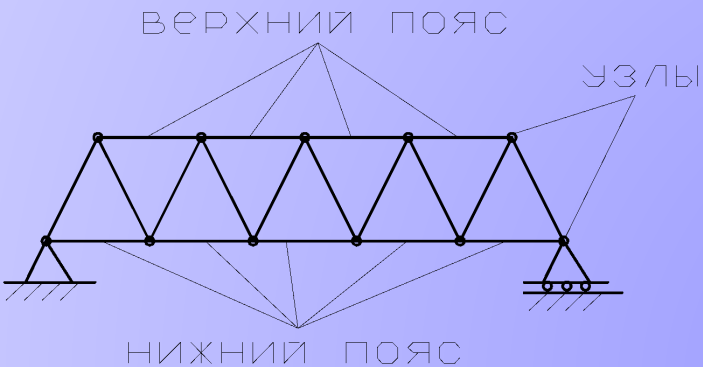
$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{iX} = X_A + X_B + P = 0 \\ \sum \vec{F}_{iY} = Y_A + Y_B = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_i) = Y_B \cdot l - P \cdot h = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{iX} = X_A + X_C + P = 0 \\ \sum \vec{F}_{iY} = Y_A + Y_C = 0 \\ \sum m_A(\vec{F}_i) = P \cdot h - X_C \cdot h + Y_C \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$



Расчет ферм

Фермой называется жесткая конструкция из прямолинейных стержней, соединённых на концах шарнирами.



В жёстких плоских фермах (без лишних стержней) число стержней k и число узлов n связаны соотношением:

$$k = 2n - 3$$

Если стержней меньше – ферма не жёсткая.
Если стержней больше – ферма статически неопределима.

Расчёт ферм сводится к определению:

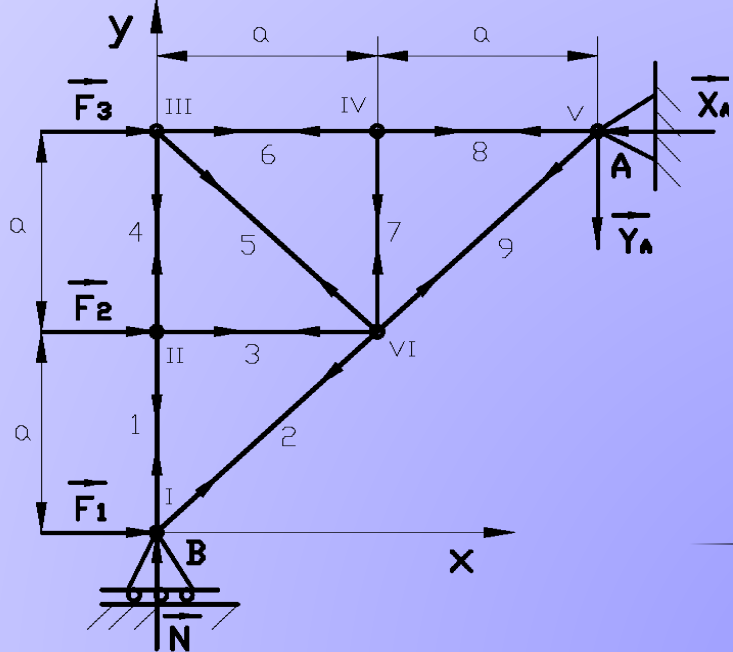
- реакций опор,
- усилий в стержнях.

Методы определения усилий в стержнях

Метод вырезания узлов: *Суть метода* – рассмотрение условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы.

Пример: На ферму (см. рис.) действуют силы параллельные Ox и равные

$$F_1 = F_2 = F_3 = F = 2m$$



1) Проверка статической определимости:

узлов – $n = 6$; стержней – $k = 9$.

$$k = 2 \cdot n - 3 = 2 \cdot 6 - 3 = 9$$

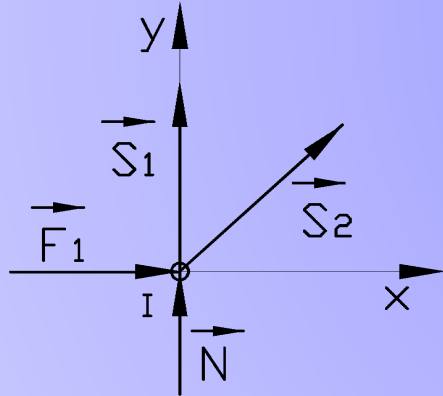
2) Найдем реакции опор:

$$\sum F_X = F_1 + F_2 + F_3 - X_A = 0$$

$$\sum F_Y = N - Y_A = 0$$

$$\sum m_A(\vec{F}) = F_2 \cdot a + F_1 \cdot 2a - N \cdot 2a = 0$$

3) Определим усилие в стержнях:



Для узла 1 составим уравнения равновесия.

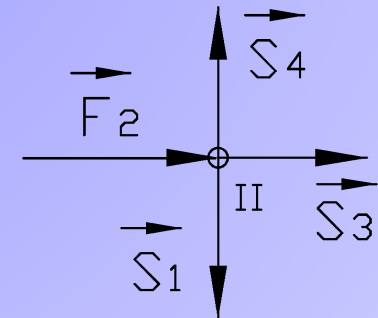
$$\sum F_{Xi} = F_1 + S_2 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{Yi} = N + S_1 + S_2 \cdot \sin 45^\circ = 0$$

Рассмотрим равновесие узла 2.

$$\sum F_{Xi} = F_2 + S_3 = 0$$

$$\sum F_{Yi} = S_4 - S_1 = 0$$

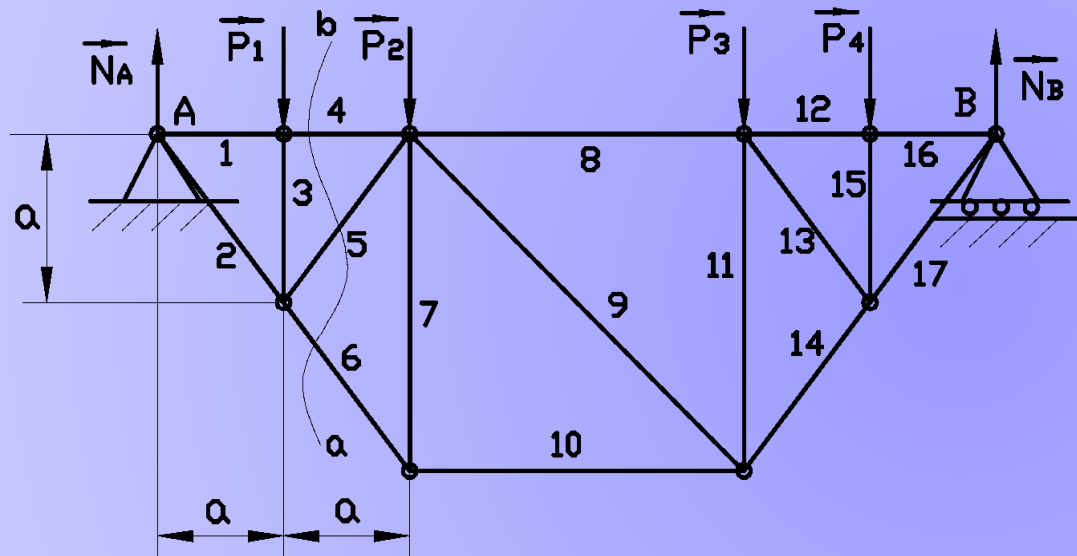


Продолжим расчёт, пока не найдём все усилия в стержнях.

Метод Риттера (метод сечений).

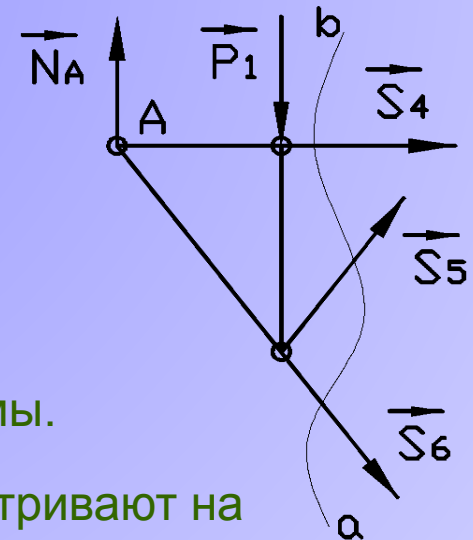
Суть метода – ферму делят на две части сечением, проходящим через три стержня, в которых надо определить усилие, и рассматривается равновесие одной из этих частей.

Пример: Определить усилие в стержне 6 фермы.



Пункты 1) и 2) – аналогичные методу вырезания узлов

3) Проведем сечение a-b через стержни 4, 5 и 6 и рассмотрим равновесие левой части.



$$\sum m_C(\vec{F}_i) = P_1 \cdot a - N_A \cdot 2a + S_6 \cdot CK = 0$$

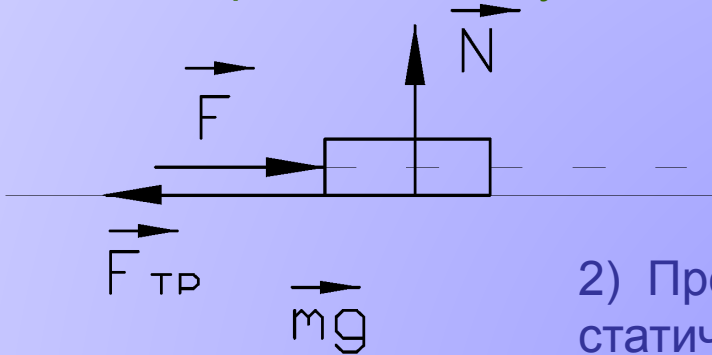
Аналогично найдём и другие усилия в стержнях фермы.

Метод диаграмм (Максвелла-Кремоне) подробно рассматривают на строительных специальностях.

ТРЕНИЕ

Трение скольжения. Угол трения.

Экспериментально установлены следующие законы трения скольжения:



1) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает *сила трения*, направленная в противоположную сторону.

2) Предельная сила трения равна произведению статического коэффициента трения f_0 на нормальное давление (нормальную реакцию):

$$F_{тр.пр} = f_0 \cdot N$$

f_0 – определяется опытным путем:

Дерево по дереву

$f_0 = 0.4 - 0.7$; (дуб по дубу $f_0 = 0.54 - 0.62$)

Металл по металлу

$f_0 = 0.15 - 0.25$; (сталь по стали – 0.15)

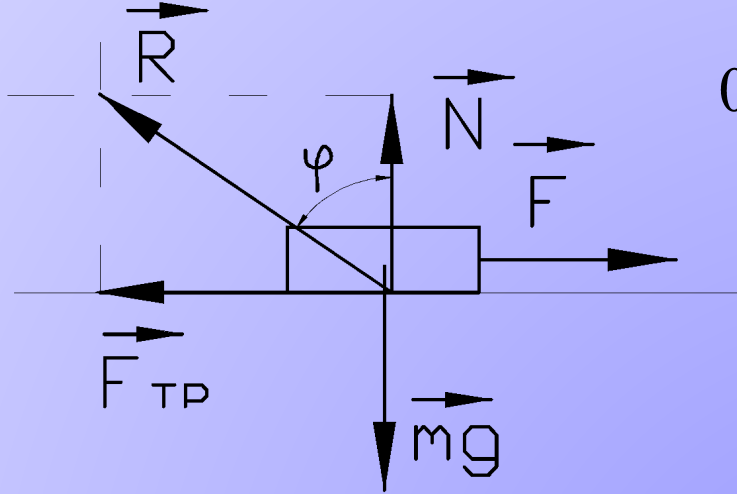
3) При равновесии сила трения покоя

$$F_{тр.} \leq F_{тр.пр}$$

4) Величина $F_{тр.пр.}$ в широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся при трении поверхностей.

При движении тела $F_{тр.}$ зависит от динамического коэффициента трения f , который, как правило, зависит от скорости движения тела и определяется опытным путем.

С учетом трения реакция связи получает вторую составляющую $F_{тр.}$, которая отклоняет полную реакцию связи от нормали к поверхности на некоторый угол φ



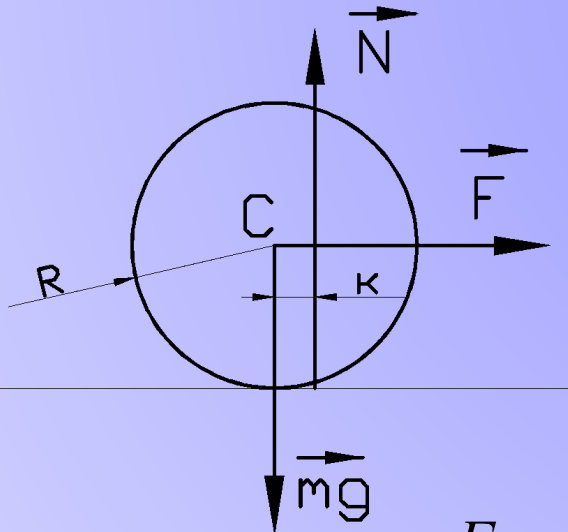
$0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ - предельное значение (угол трения)

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{mp}}{N} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$$

Обычно рассматривается предельное положение равновесия, когда сила трения достигает наибольшего значения ***F_{mp.пр.}*** и она рассматривается как внешняя сила.

1.12.2 Трение качения

Трение качения - особый вид сопротивления, возникающий, когда одно из тел катится по поверхности другого тела без проскальзывания.



$$F = \frac{k}{R} \cdot N$$

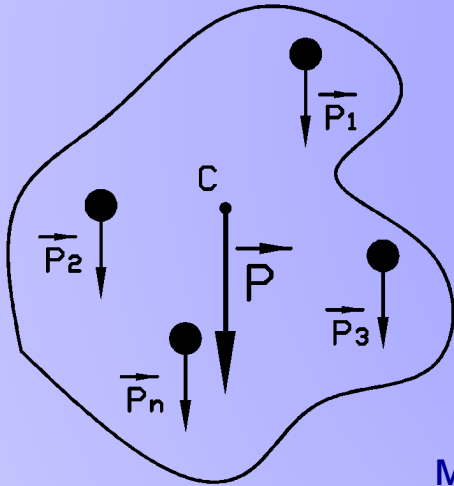
Рассмотрим цилиндрический каток. На него действуют две взаимно уравновешивающие силы: сила тяжести ***mg*** и нормальная реакция плоскости ***N = -mg***. Если под действием горизонтальной силы ***F***, приложенной к центру катка ***C***, он катится по плоскости без скольжения, то силы ***mg*** и ***N*** образуют пару сил, препятствующую качению катка. Плечо пары ***k***, называется коэффициентом трения качения.

1.13 ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Центр тяжести твердого тела

Силой тяжести (силой веса) называют равнодействующую силы притяжения Земли и центробежной силы, возникающей при вращении тела вместе с Землей.

Центром тяжести твердого тела называется неизменно связанная с этим телом точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любом положении тела в пространстве.



Равнодействующая $P = \sum P_i$

По теореме Вариньона:

$$P \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum P_i \cdot x_i$$

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{P} \quad y_C = \frac{\sum y_i P_i}{P} \quad z_C = \frac{\sum z_i P_i}{P}$$

Вес P_i любой частицы тела пропорционален ее массе

$$x_C = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M} \quad y_C = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M} \quad z_C = \frac{\sum m_i \cdot z_i}{M}$$

Центр тяжести – точка геометрическая, которая может лежать и вне пределов тела (кольцо, уголок, тавр и т.д.).

Способы определения центра тяжести тел

1) Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость (ось, центр) симметрии, то ц.т. лежит в плоскости (на оси, в центре) симметрии.

2) Разбиение. Тело разбивается на конечно число частей, ц.т. которых известен. Общий ц.т. находим по формулам:

$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2}{S} \quad y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S}$$

3) Дополнение. Частный случай. Если тело имеет вырезы, то находим ц.т. тела без вырезов и ц.т. вырезанной фигуры.

$$x_C = \frac{S_1 \cdot x_1 - S_2 \cdot x_2}{S} \quad y_C = \frac{S_1 \cdot y_1 - S_2 \cdot y_2}{S}$$

4) Интегрирование. Применяется если тело неоднородное.

