

Лекция №2. Моделирование химико-технологических процессов

Многие химико-технологические процессы настолько сложны, что удается лишь составить систему дифференциальных уравнений для их описания и установить условия однозначности. Решить же эти уравнения известными в математике методами обычно не представляется возможным. В подобных случаях используют *метод моделирования*. В широком смысле *под моделированием понимают исследование объектов познания на их моделях*, поэтому моделирование неотделимо от развития знания.

Моделирование находит широкое применение как при проведении научных исследований, так и при решении большого числа практических задач в различных областях техники: в гидравлике и гидротехнике (определение конструктивных и эксплуатационных характеристик гидротехнических сооружений, моделирование течений рек, волн, приливов и отливов и др.); в авиации, ракетной и космической технике (определение характеристик летательных аппаратов и их двигателей и др.); в судостроении (определение характеристик корпуса судна и др.); в теплотехнике (при конструировании и эксплуатации различных тепловых аппаратов) и т. п.

Огромное значение имеет моделирование при исследовании химико-технологических процессов и проектировании химических производств. При этом *под моделированием понимают метод исследования химико-технологических процессов на моделях, отличающихся от объектов моделирования (натуры) в основном масштабом*. Моделирование можно осуществлять двумя основными методами - *методом обобщенных переменных*, или *методом теории подобия* (физическое моделирование), и *методом численного эксперимента* (математическое моделирование).

Физическое моделирование

(метод обобщенных переменных или метод теории подобия)

При *физическом моделировании* (масштабировании) экспериментально исследуемый объект (модель) отличается от природы *масштабом*, *физическая же природа явления (процесса)* остается той же. Изучение процессов с целью получения уравнений, необходимых для их анализа и расчета, можно проводить теоретически. Однако такой путь часто оказывается невозможным. В таких случаях прибегают к проведению опытов, получая эмпирические зависимости. Однако такое осуществление экспериментов, которое позволяет обобщать результаты опытов и распространять их на широкий круг вопросов и явлений, подобных изучаемому, но отличающихся численными значениями параметров наиболее плодотворно. Это достигается при использовании для обработки опытных данных методов теории подобия. Метод обобщенных переменных составляет основу теории подобия.

Основы теории подобия

Одним из основных принципов теории подобия является выделение из класса явлений (процессов), описываемых общим законом (процессы движения жидкостей, диффузии, теплопроводности и т.п.), группы *подобных явлений*. Подобными называют такие явления, для которых отношения сходственных и характеризующих их величин постоянны.

Различают следующие виды подобия: а) *геометрическое*; б) *временное*; в) *физических величин*; г) *начальных и граничных условий*.

Геометрическое подобие предполагает, что сходственные размеры природы и модели параллельны, а их отношение выражается постоянной величиной.

Предположим, что изучается сложное явление - движение газа во вращающемся цилиндре (рис. 1). Чтобы исследовать процесс в данном аппарате, строим модель, соблюдая геометрическое подобие (рис. 1б), т.е. равенство отношений сходственных линейных размеров природы и модели.

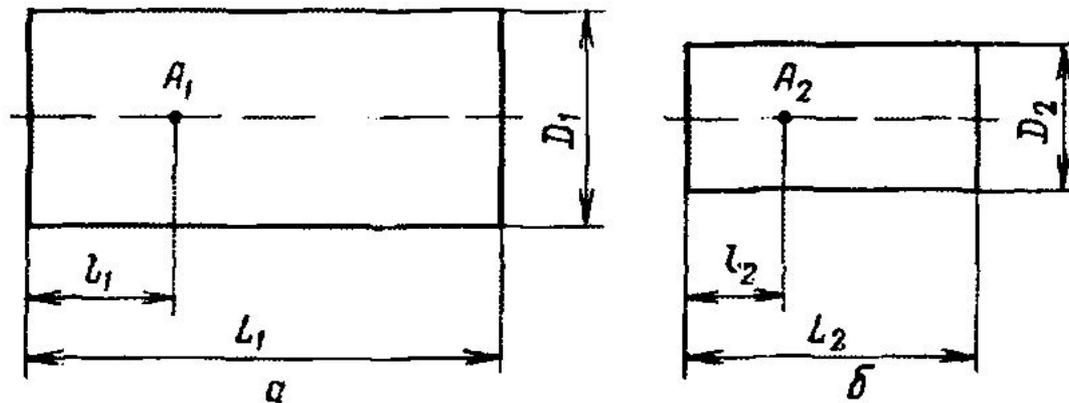


Рис. 1. К определению условий подобия природы (а) и модели (б)

Основы теории подобия

Если рассматриваемая система (натура, образец) находится в движении, то при наличии геометрического подобия все ее точки должны перемещаться по подобным траекториям сходственных точек подобной ей системы (модели), т.е. проходить геометрически подобные пути (точки A_1 и A_2). Геометрическое подобие соблюдается при равенстве отношений всех сходственных размеров природы и модели:

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{l_1}{l_2} = \dots a_l = \text{const.} \quad (1)$$

Безразмерную величину a_l называют *константой геометрического подобия*, или *масштабным (переходным) множителем*. Константа подобия характеризует отношение однородных сходственных величин в подобных системах (в данном случае - линейных размеров природы и модели) и позволяет перейти от размеров одной системы (модели) к другой (натуре).

Временное подобие предполагает, что сходственные точки или части геометрически подобных систем (натуры и модели), двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отношение которых является постоянной величиной:

$$T_1/T_2 = \tau_1/\tau_2 = a_\tau, \quad (2)$$

где T_1 и T_2 - время прохождения сходственными частицами всего аппарата, соответственно природы и модели; τ_1 и τ_2 - время прохождения сходственными частицами подобных путей l_1 и l_2 ; a_τ - константа временного подобия.

Основы теории подобия

Подобие физических величин предполагает, что в рассматриваемых подобных системах (натуры и модели) отношение значений физических величин двух любых сходственных точек или частиц, подобно размещенных в пространстве и времени, есть величина постоянная. Например, если в натуре частица за время τ_1 прошла путь l_1 (рис. 1а), а в модели - за время τ_2 путь l_2 , то для сходственных точек A_1 и A_2 имеем

$$\mu_1/\mu_2 = a_\mu; \quad \rho_1/\rho_2 = a_\rho, \quad \text{или} \quad u_2/u_1 = a_u, \quad (3)$$

где u_1 и u_2 - совокупность физических величин (но в общем случае $a_\mu \neq a_\rho \neq a_l \neq a_\tau$ и т.д.).

Подобие физических величин включает подобие не только физических констант, но и *совокупности значений физических величин*, или *полей физических величин*. Таким образом, при соблюдении геометрического и временного подобия будет соблюдаться также подобие полей скоростей, температур, концентраций и других физических величин, т.е. $w_1/w_2 = a_w$, $t_1/t_2 = a_t$; $c_1/c_2 = a_c$ - константы.

Подобие начальных и граничных условий предполагает, что начальное состояние и состояние на границах систем (натуры и модели) подобны, т. е. отношения основных параметров в начале и на границах систем постоянны. Это справедливо лишь в тех случаях, когда для начальных и граничных условий систем выдерживаются геометрическое, временное и физическое подобия, т.е. $L_1/L_2 = a_l$; $\mu_1/\mu_2 = a_\mu$.

Анализ единиц измерения. Теорема Бекингема

Если все сходственные величины, определяющие состояние данной системы (натуры) и подобной ей системы (модели), измерять в относительных единицах, т.е. брать сходственное отношение величин для каждой системы, то оно также будет величиной постоянной и безразмерной, например

$$L_1/D_1 = L_2/D_2 = \dots = \text{inv} = \text{idem} = i_l; \quad T_1/\tau_1 = T_2/\tau_2 = \dots = i_\tau. \quad (4)$$

Величины i_l , i_τ и т.д. *не зависят от соотношения размеров натуры и модели*, т.е. для другой модели, также подобной натуре, значения i_l , i_τ ... будут те же. Таким образом, отношения геометрических размеров, времени и физических констант в данной системе (натуре) равны отношениям тех же величин в подобной системе (модели). При переходе от одной системы к другой, ей подобной, численное значение величин i_l , i_τ ... сохраняется. Поэтому безразмерные числа i , выражающие отношение двух однородных величин в подобных системах, носят название *инвариантов подобия* (invariantis (лат.) - неизменяющийся).

Инварианты подобия, представляющие собой отношения однородных величин, называют *симплексами* (simplex (лат.) - простой), или *параметрическими критериями* (например, отношение L_1/D_1 - геометрический симплекс). Инварианты подобия, выраженные отношением *разнородных* величин, называют *критериями подобия*. Обычно их обозначают начальными буквами имен ученых, внесших существенный вклад в данную область знания (например, Re - число, или критерий, Рейнольдса).

Анализ единиц измерения. Теорема Бекингема

Явления, подобные между собой, характеризуются численно равными критериями подобия. Равенство критериев подобия - единственное количественное условие подобия процессов. Отсюда очевидно, что отношение критериев одной системы к критериям подобной ей системы всегда равно 1. Например, для натурy и модели $Re_1 = Re_2$. Тогда

$$\frac{w_1 d_1 \rho_1 / \mu_1}{w_2 d_2 \rho_2 / \mu_2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{(w_1/w_2)(d_1/d_2)(\rho_1/\rho_2)}{\mu_1/\mu_2} = \frac{a_w a_l a_\rho}{a_\mu} = 1. \quad (5)$$

Если отношение констант подобия равно 1, оно носит название *индикатора подобия* и указывает на равенство критериев подобия. Следовательно, у *подобных явлений индикаторы подобия равны единице* (первая теорема подобия). Критерии подобия, которые составлены только из величин, входящих в условия однозначности, называют *определяющими*. Критерии же включающие также величины, которые не являются необходимыми для однозначной характеристики данного процесса, а сами зависят от этих условий называют *определяемыми*.

Любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление (т.е. система дифференциальных уравнений), может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия (вторая теорема подобия):

$$f(K_1, K_2, K_3, \dots) = 0 \quad (6)$$

Эту зависимость называют *обобщенным (критериальным) уравнением*, а критерии подобия K_i - *обобщенными переменными величинами*.

Анализ единиц измерения. Теорема Бекингема

Таким образом, теория подобия дает возможность представить решение дифференциальных уравнений и обрабатывать экспериментальные данные в виде обобщенных критериальных уравнений.

Обычно уравнение (6) записывают в виде зависимости определяемого критерия подобия (в который входит искомая величина) от определяющих:

$$K_1 = f_1(K_2, K_3, \dots), \quad (7)$$

например,

$$K_1 = AK_2^n K_3^m \dots, \quad (8)$$

где K_1 - определяемый критерий подобия; значения A , n , m находят опытным путем.

Подобны те явления, которые описываются одной и той же системой уравнений и у которых соблюдается подобие условий однозначности, т.е. явления подобны, если их определяющие критерии равны (третья теорема подобия.).

В основу метода анализа размерностей положена π - теорема Бекингема, согласно которой общую функциональную зависимость, связывающую между собой n переменных величин при m основных единицах их измерения, можно представить в виде зависимости между $(n - m)$ безразмерными комплексами этих величин, а при наличии подобия - в виде связи между $(n - m)$ критериями подобия.

Гидродинамическое подобие

1. Критерий Рейнольдса Re – представляет собой отношение сил трения к силам инерции и определяет режим движения жидкости

$$Re = d\rho W / \mu \quad (9)$$

2. Критерий Эйлера Eu представляет собой отношение сил давления к инерционным силам

$$Eu = P / \rho W^2 = \Delta P / \rho W^2 \quad (10)$$

3. Критерий Фруда F_r представляет собой отношение сил тяжести к силам инерции

$$F_r = W^2 / gl \quad (11)$$

4. Критерий гомохронности H_o , учитывающий неустановившееся движение жидкости имеет вид:

$$H_o = W\tau / l \quad (12)$$

где l – определяющий линейный размер.

Гидродинамическое подобие

В потоке жидкости каждая частица находится под воздействием сил давления, тяжести и трения. Кроме того, в движущейся жидкости возникает сила инерции, равная по величине, но обратная по знаку равнодействующей сил давления, тяжести и трения. Постоянное отношение каждой из действующих сил к силе инерции характеризуется критериями подобия. Критерии гидродинамического подобия получают из дифференциального уравнения движения реальной жидкости Навье-Стокса.

Уравнение Навье-Стокса или в общей форме процесс движения жидкости можно представить в виде функции от критериев подобия:

$$f(\text{Re}, \text{Eu}, \text{Fr}, \text{H}_0) = 0 \quad (13)$$

Для установившегося движения

$$f(\text{Re}, \text{Eu}, \text{Fr}) = 0 \quad (14)$$

Для вынужденного движения:

$\text{Eu} = f(\text{Re}, l/d)$, где l/d - отношение линейных размеров, характеризующее геометрическое подобие.