Аэрогидродинамика

Лекция 1
Законы Ньютона
для тел и жидкости

Законы Ньютона

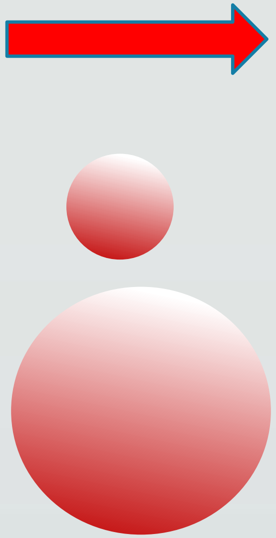
Первый закон Ньютона

Все законы механики одинаковы
во всех инерциальных системах отсчета

Законы Ньютона

Второй закон Ньютона

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{m_3}{m_1}, \ldots, \frac{a_1}{a_n} = \frac{m_n}{m_1}, \ldots, \frac{a_i}{a_j} = \frac{m_j}{m_i}$$



$\vec{F}$

a_1

a_2

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \ldots = m_N a_N = F$$

Законы Ньютона

Второй закон Ньютона

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{a_1}{a_3} = \frac{m_3}{m_1}, \ldots, \frac{a_1}{a_n} = \frac{m_n}{m_1}, \ldots, \frac{a_i}{a_j} = \frac{m_j}{m_i}$$

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \ldots = m_N a_N = F$$

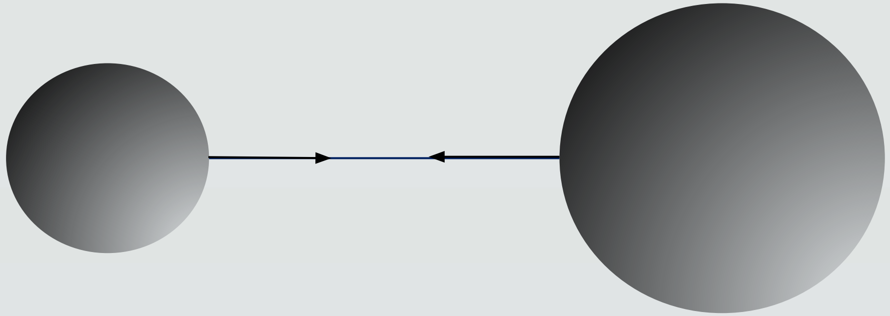
Величина $\vec{F}$ называется силой

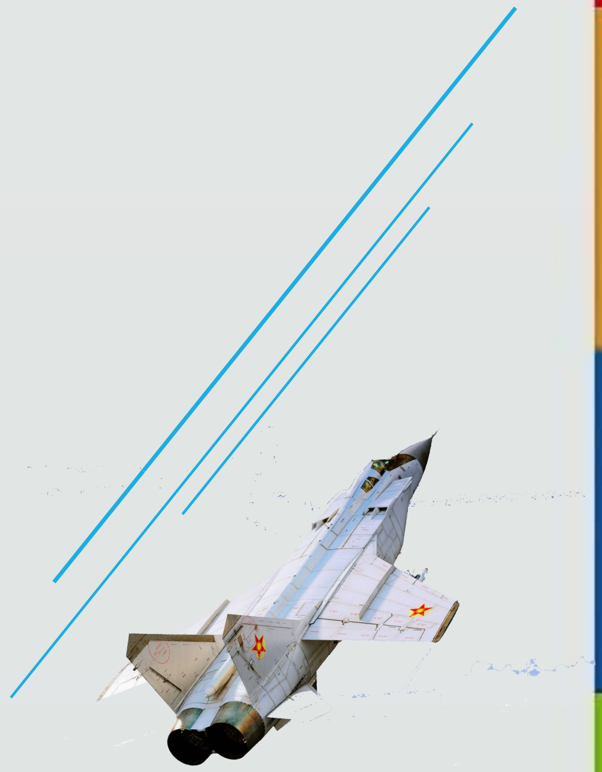
$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Законы Ньютона

Третий закон Ньютона

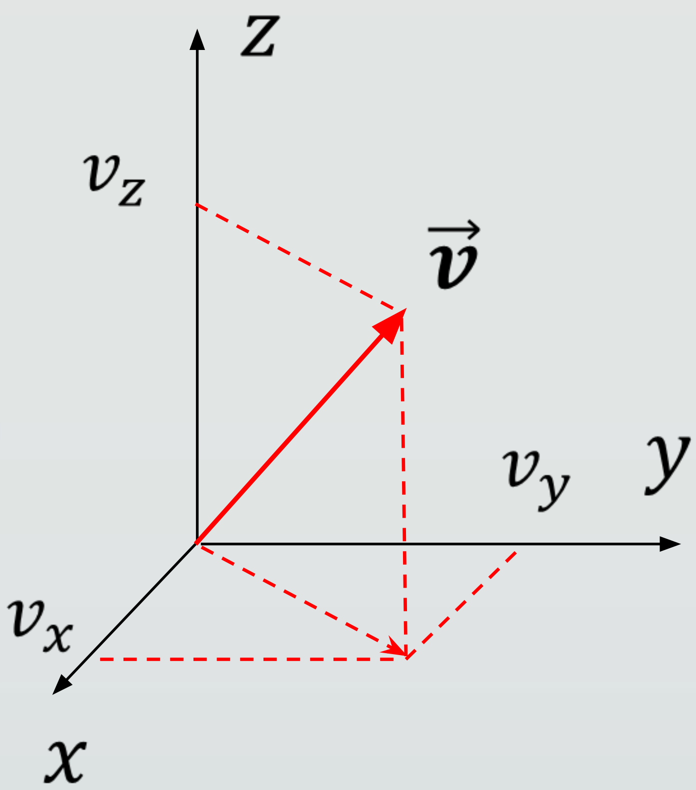
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$





Векторы

Координаты тела $\vec{x}$, скорость тела $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, и сила $\vec{F}$-
являются векторами, т.е. величинами, имеющими направление



$$\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_1, F_2, F_3)$$

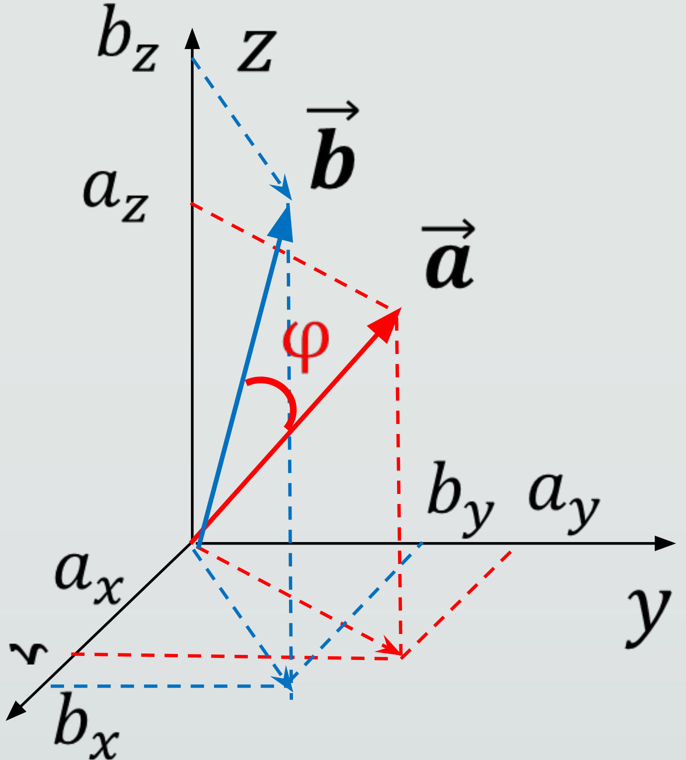
Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ -

это <u>число</u>, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b})$ и равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi)$,

где $|\vec{a}|^2 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и $|\vec{b}|^2 = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$,

φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

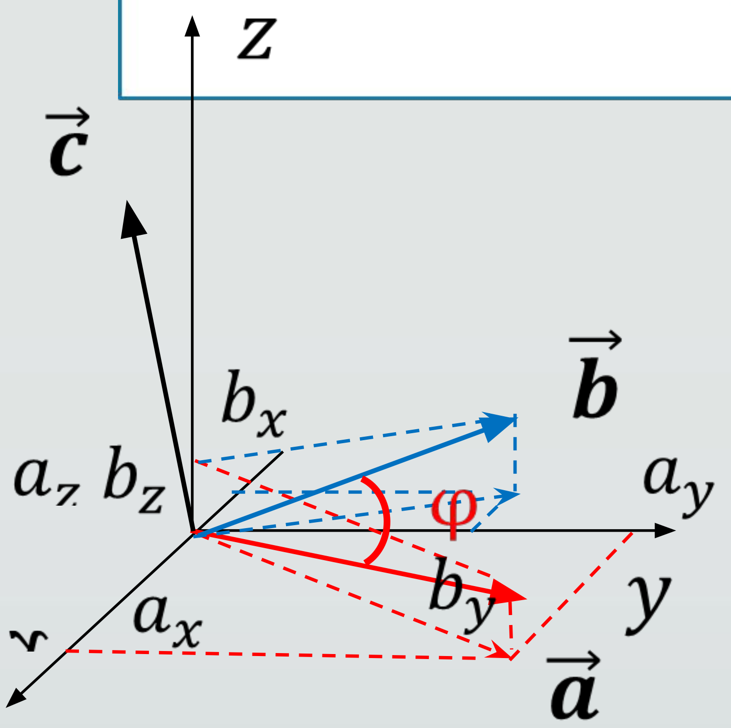
Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ -

это векетор, обозначаемый $[\vec{a} \times \vec{b}]$, длина которого равна $|\vec{a}||\vec{b}|sin(\varphi)$, а сам вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Здесь $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$,

φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

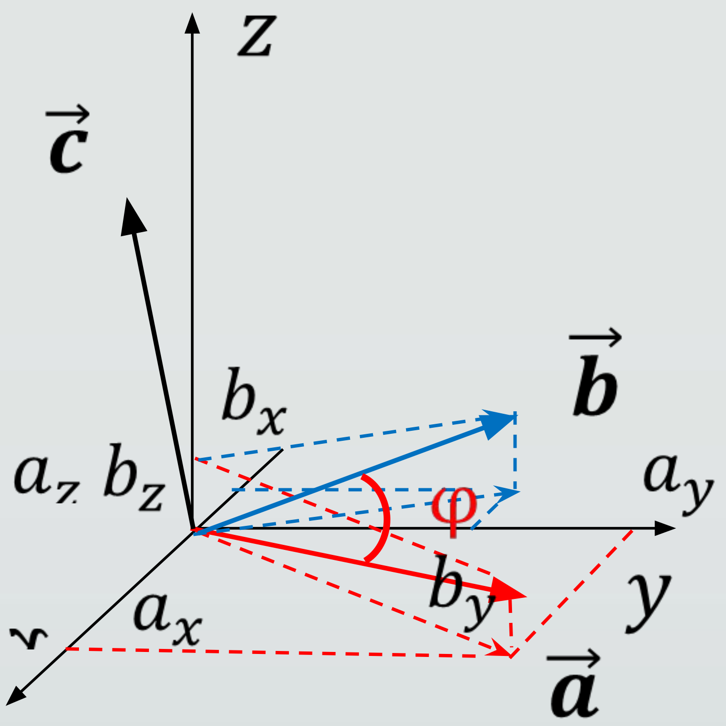
$$\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Векторное произведение векторов

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{\mathbf{c}} = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$



$$c_x = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}]_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Законы Ньютона

Второй закон Ньютона в дифференциальной форме

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dv_x}{dt} = F_x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{dv_y}{dt} = F_y$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{dv_z}{dt} = F_z$$

Закон сохранения энергии

Потенциальные (консервативные) силы

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

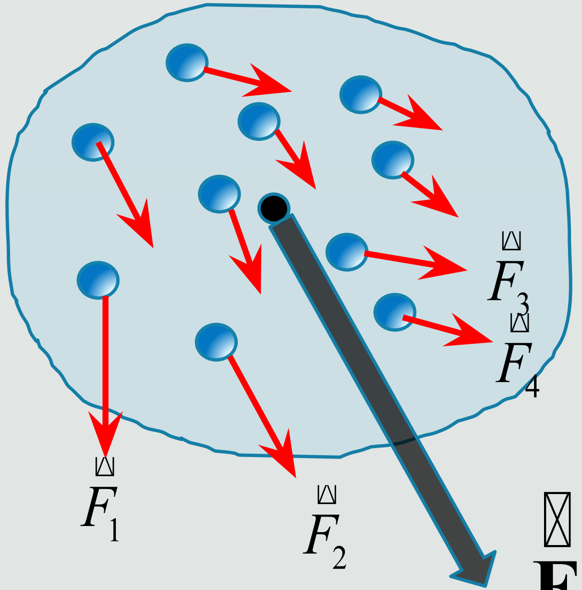
Умножим уравнения Ньютона скалярно на вектор скорсти частицы $\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt}$:

$$m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right) = m\left(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \left(\vec{v}, \vec{F}\right) = -\left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \nabla U\right)$$

$$\frac{m}{2}\frac{d\vec{v}^2}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0,$$

$$m\frac{\vec{v}^2}{2} + U = E = const.$$

Законы Ньютона для системы точек



$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

$$\vec{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^{N} \vec F_i$$

Законы Ньютона

Уравнения движения для тела из множества частиц

$$m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i = M\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{\mathbf{F}}$$

$$\boxed{M\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}}{dt^2} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}}$$

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{X}} = \dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{x}_i \\ \vec{\mathbf{P}} = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \end{cases}$$

- центр масс $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

- суммарный импульс $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$

Законы Ньютона для поступательного движения

Уравнения движения центра масс

$$\boxed{M\frac{d^2\vec{\mathbf{X}}}{dt^2}=\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}=\vec{\mathbf{F}}}$$

$$\begin{cases}\vec{\mathbf{X}}=\dfrac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N}m_i\vec{x}_i \\ \vec{\mathbf{P}}=\sum\limits_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i\end{cases}$$

- центр масс

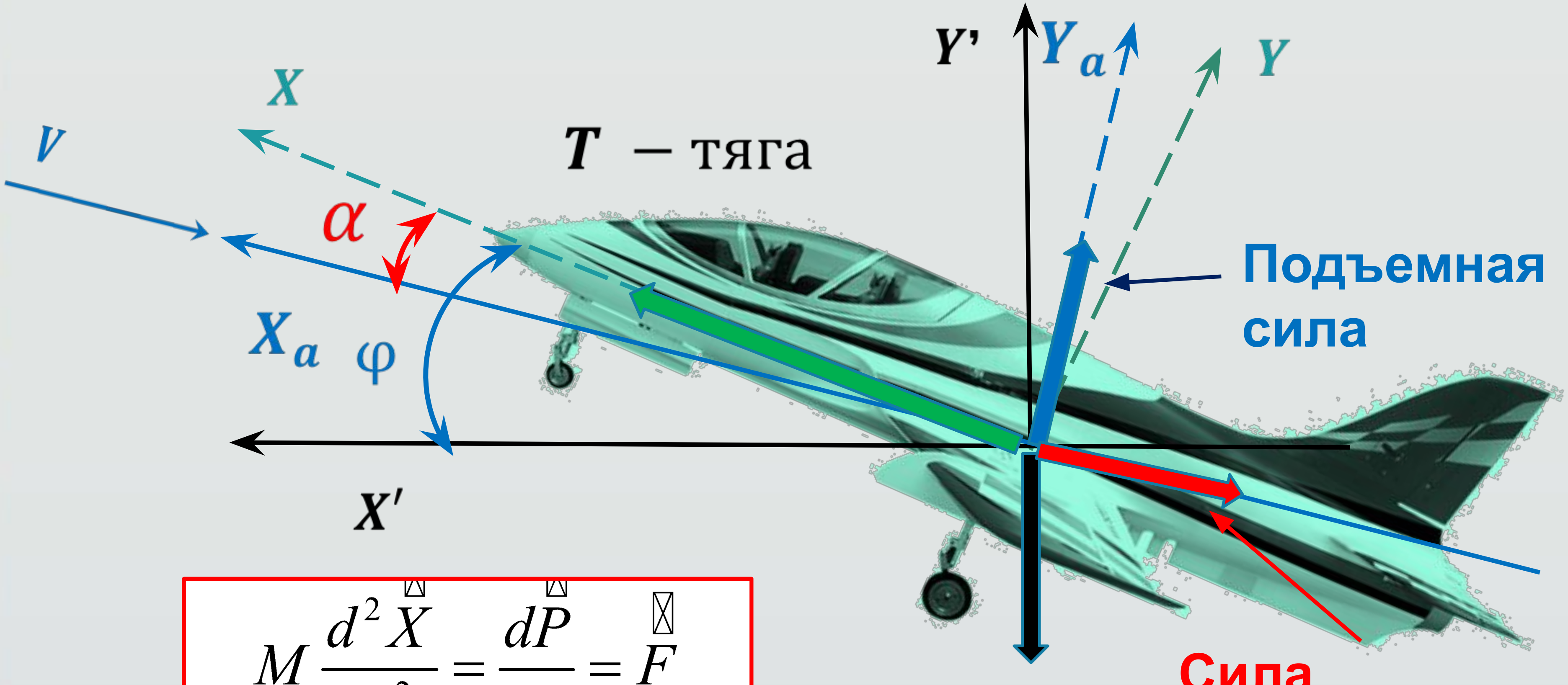
- суммарный импульс

$$M=\sum_{i=1}^{N}m_i$$

$$\vec{F}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$

Динамика летательного аппарата

Уравнения движения самолета

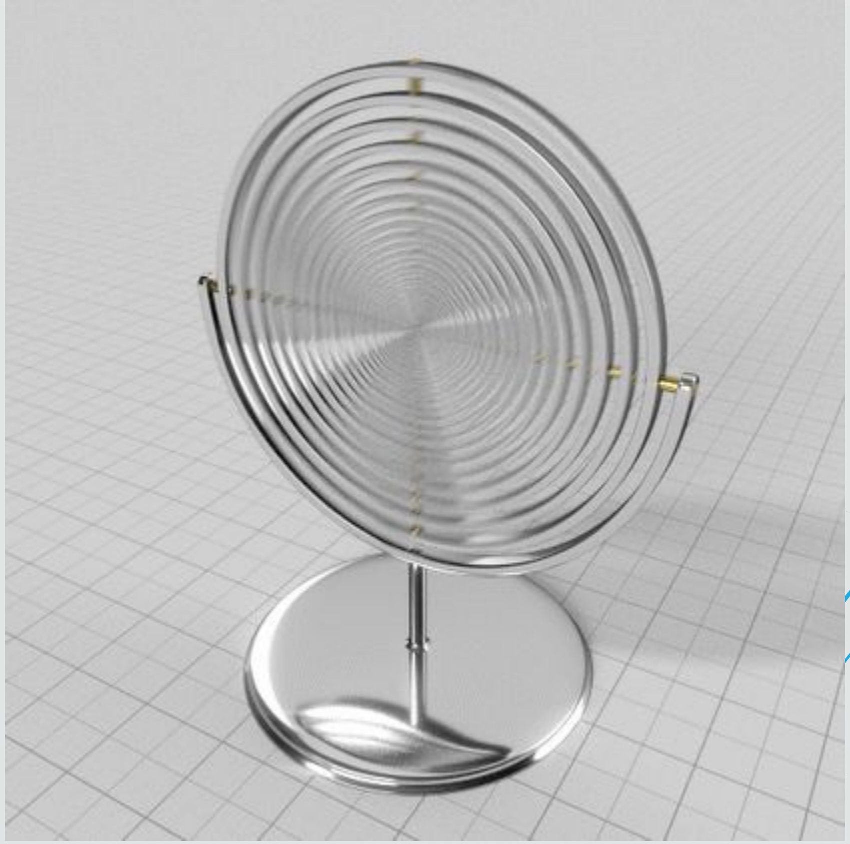


$$M\frac{d^2\vec{X}}{dt^2}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}$$

Законы вращения относительно центра масс

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

$$L_k = J_{kk}\Omega_k, k = 1, 2, 3.$$



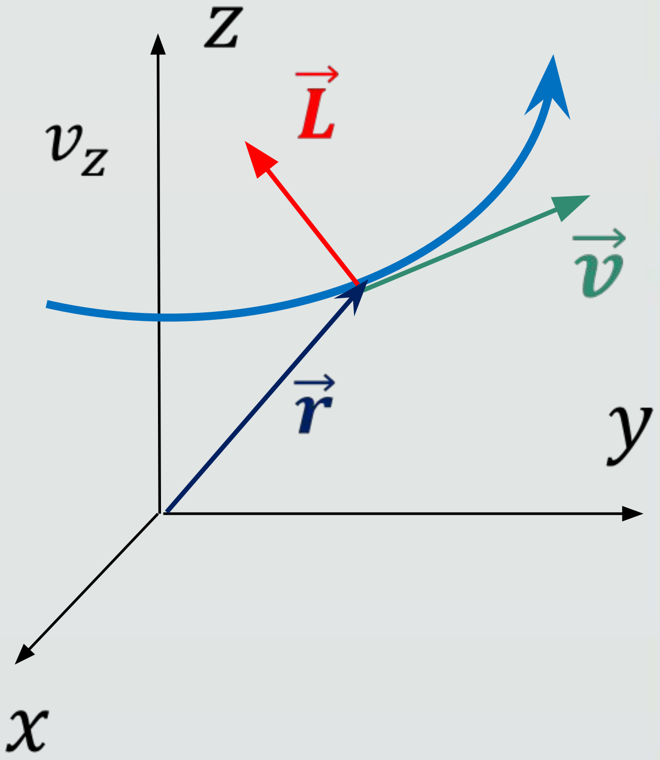
Вращение твердого тела

Момент импульса и момент сил

$$M\left[\vec{\mathbf{r}}\times\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}\right]=\left[\vec{\mathbf{r}}\times\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt}\right]=\left[\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}\right]$$

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}=\vec{\mathbf{M}}$$

$$\begin{cases}\left[\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{P}}\right]=\vec{\mathbf{L}}, & \text{- момент импульса}\\ \left[\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}\right]=\vec{\mathbf{M}} & \text{- момент силы}\end{cases}$$



$\vec{L}$ - ортогонален и $\vec{v}$ и $\vec{r}$

$\vec{M}$ - ортогонален и $\vec{F}$ и $\vec{r}$

Вращение твердого тела вокруг оси

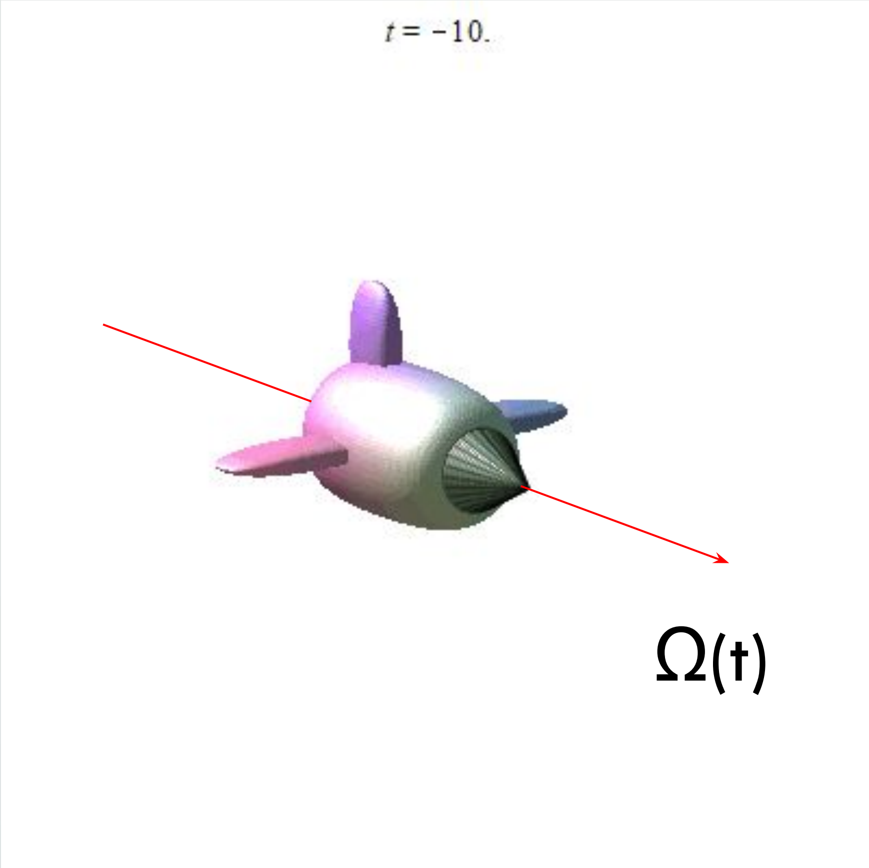
Уравнение вращения тела вокруг оси

$$J\frac{d\Omega}{dt} = M$$

J - момент импульса,

Ω – угловая скорость

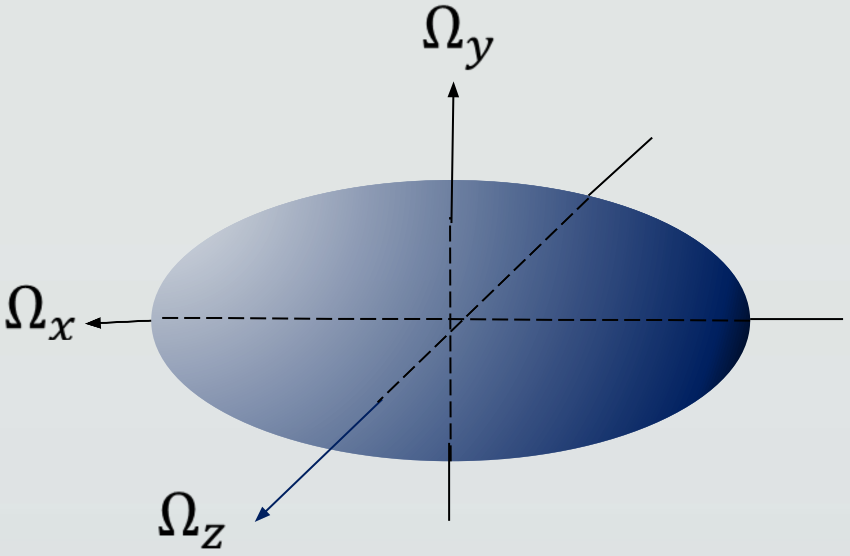
$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

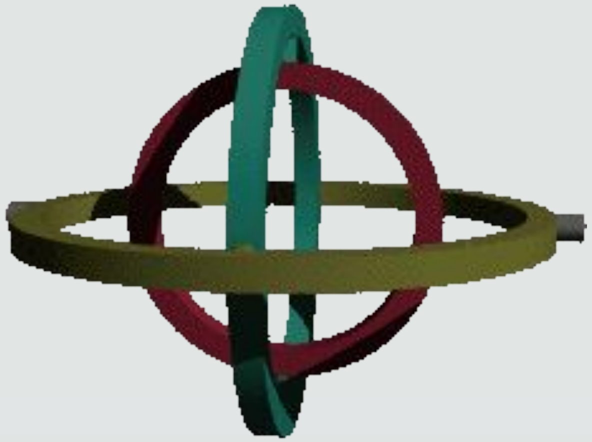


Вращение твердого тела вокруг оси

Уравнение вращения системе главных осей инерции

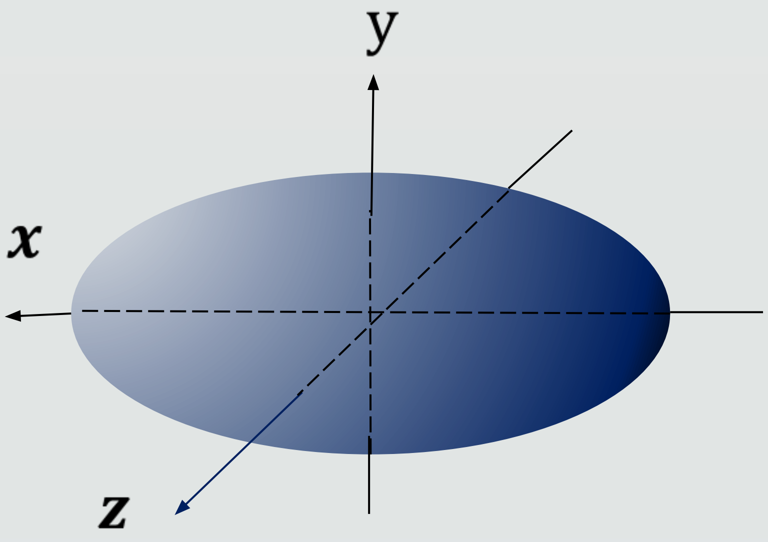
$$J_{kk}\frac{d\Omega_k}{dt} = M_k$$



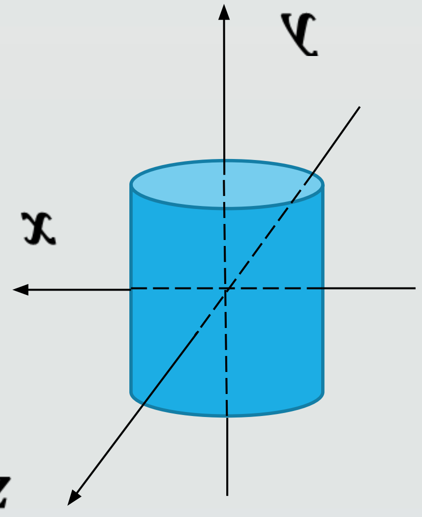


Вращение твердого тела вокруг оси

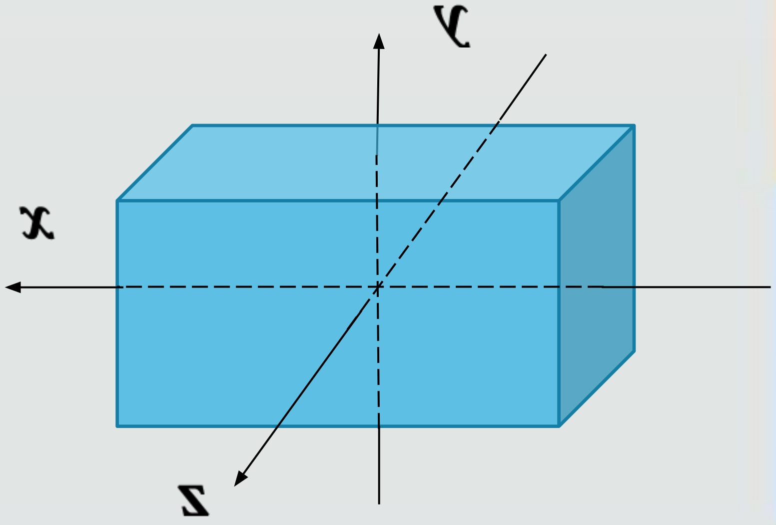
Главные оси инерции совпадают для симметричного тела с осями его симметрии



Эллипсоид



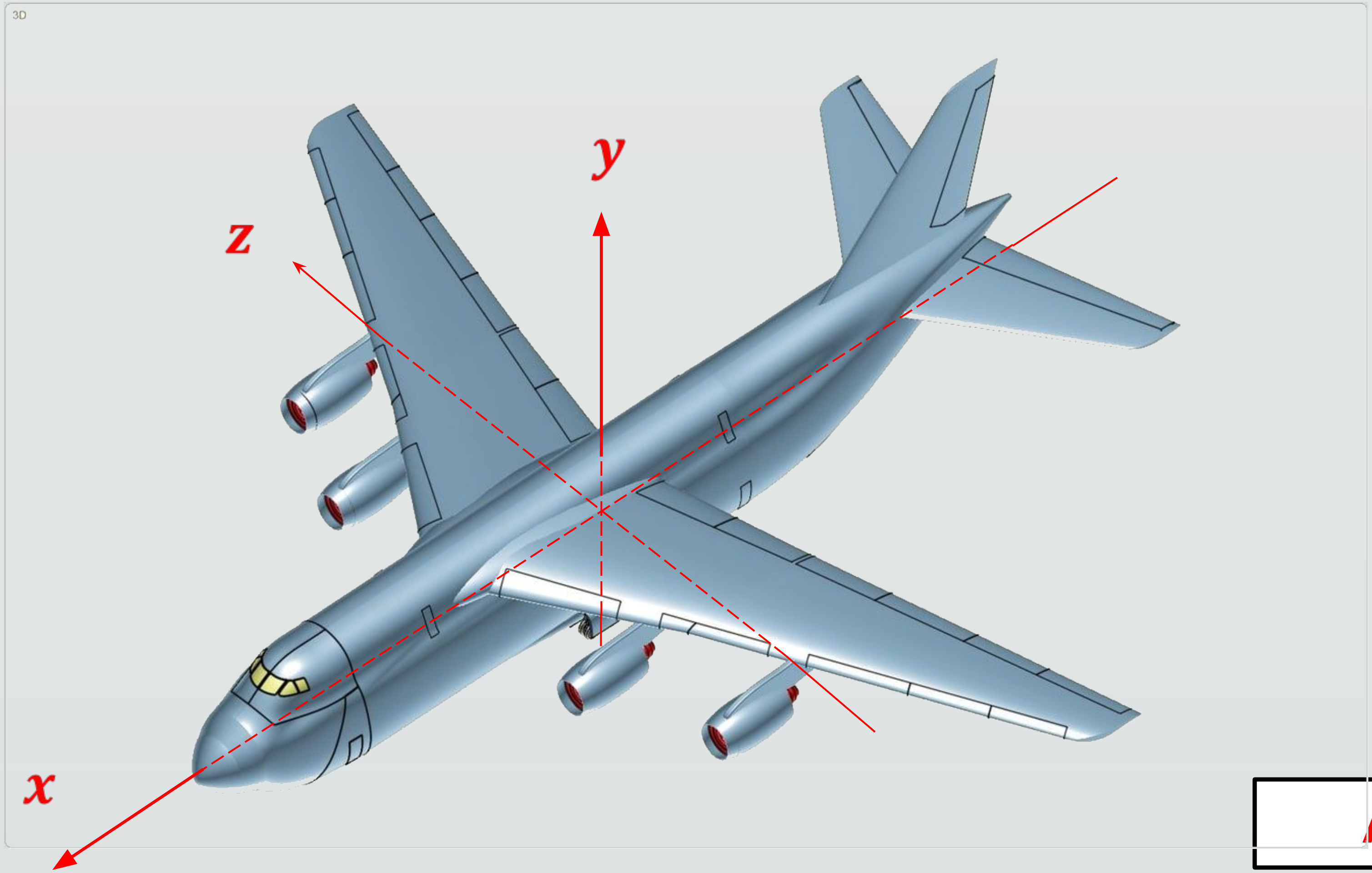
Цилиндр



Параллепипед

Вращение твердого тела вокруг оси

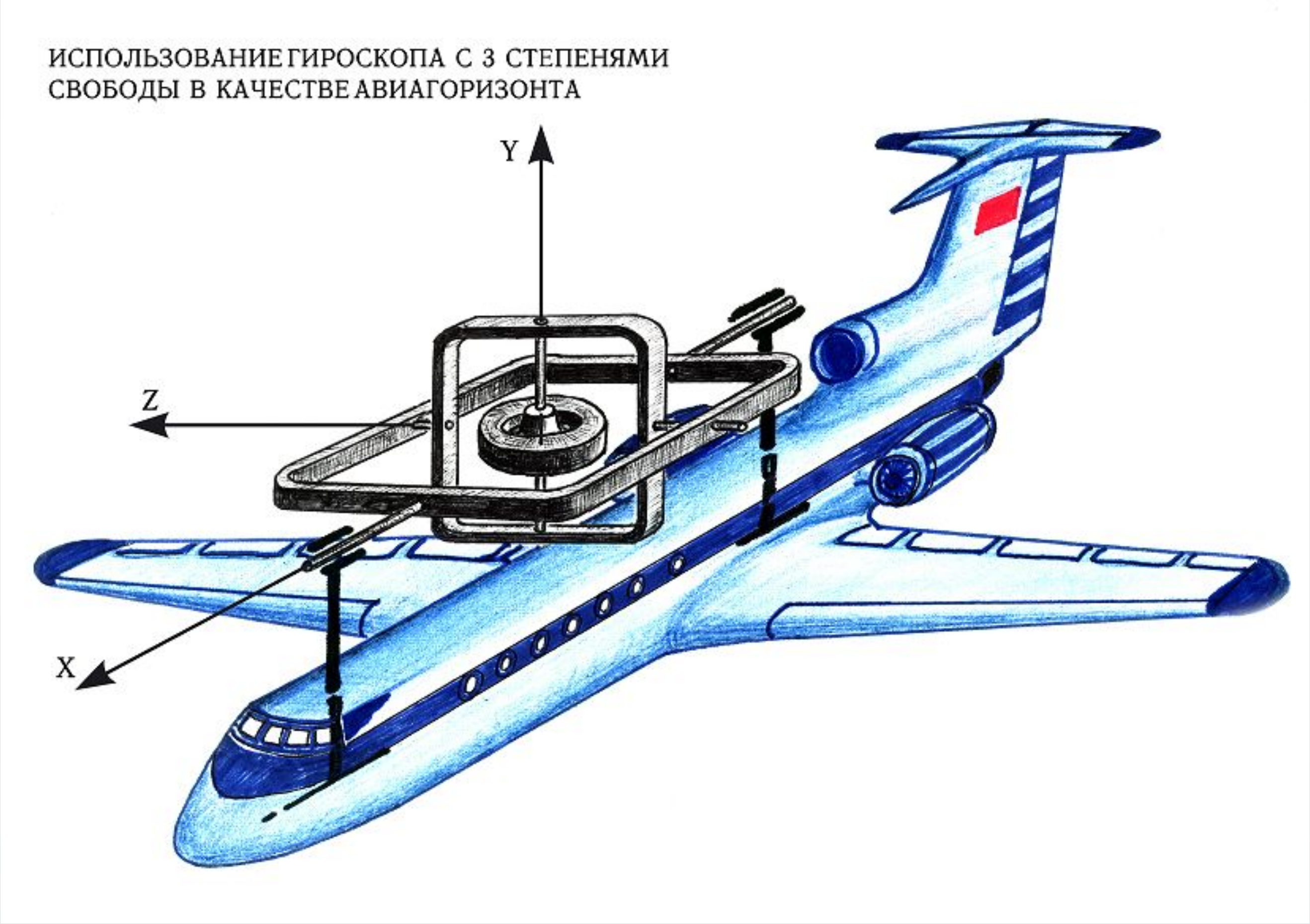
Главные оси инерции совпадают для симметричного тела с осями его симметрии



Ан-124

Вращение твердого тела вокруг оси

Гироскоп для по автоматического управления

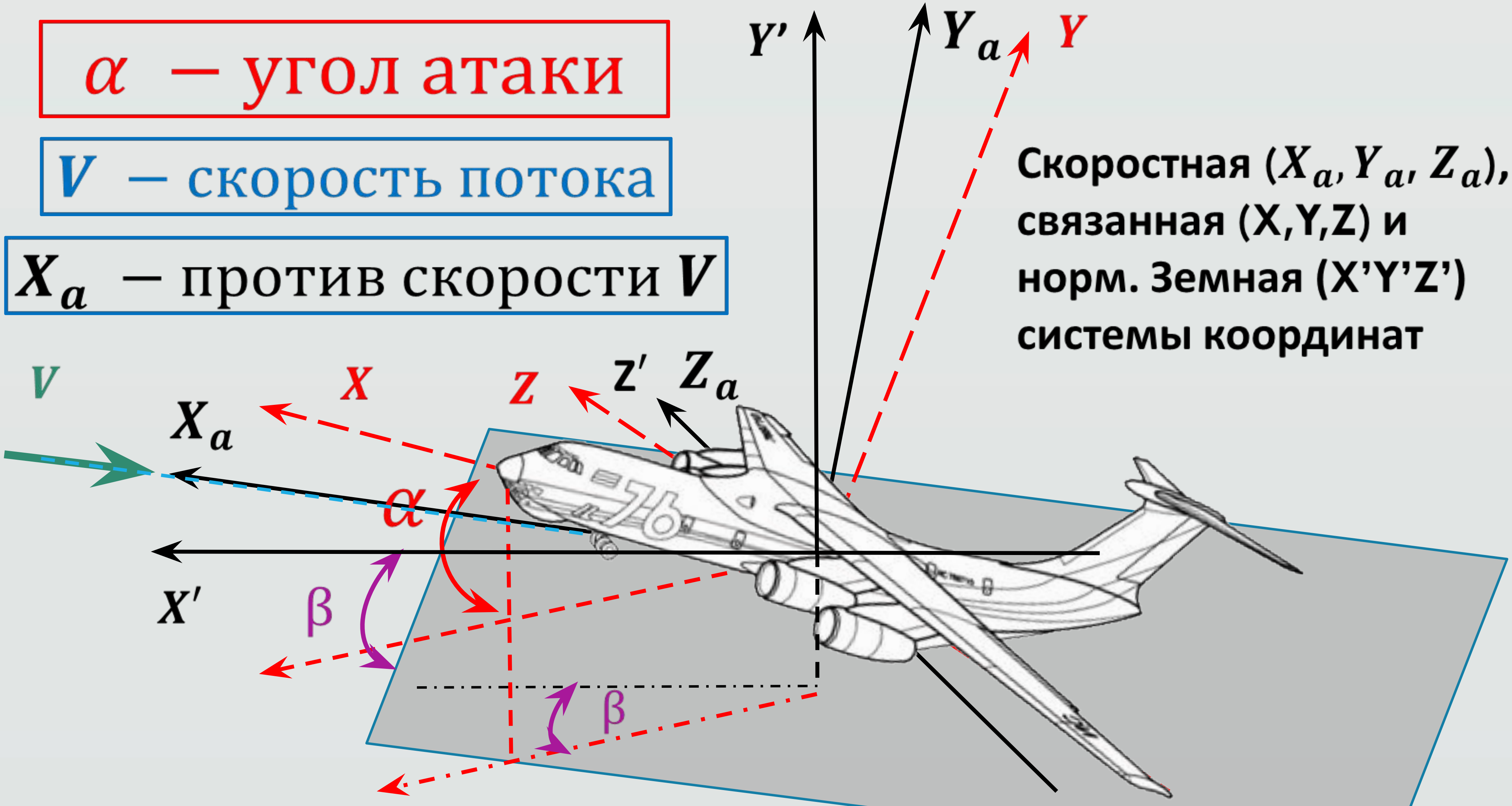


α – угол атаки

V – скорость потока

X_a – против скорости V

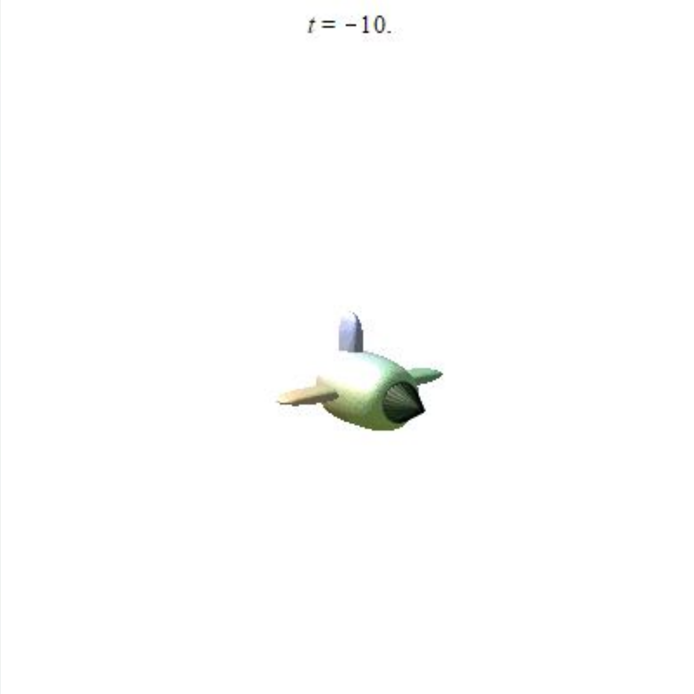
Скоростная (X_a, Y_a, Z_a), связанная (X,Y,Z) и норм. Земная (X'Y'Z') системы координат

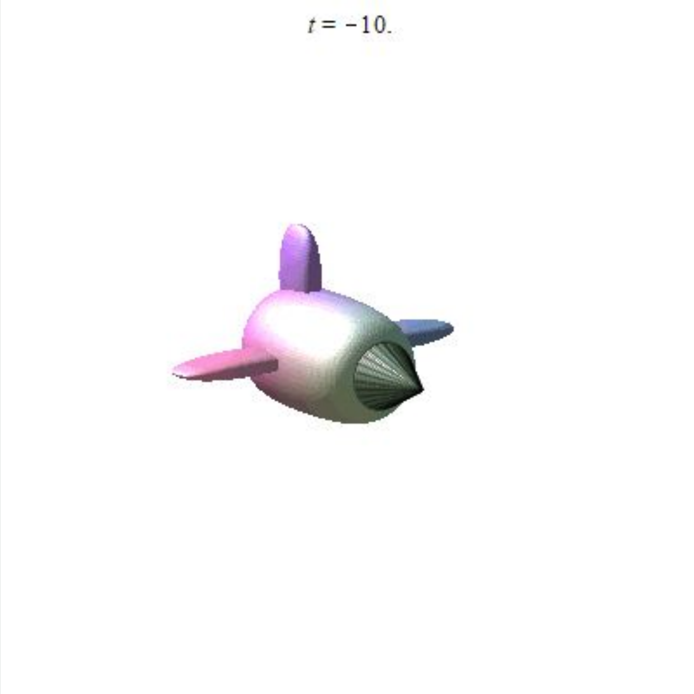


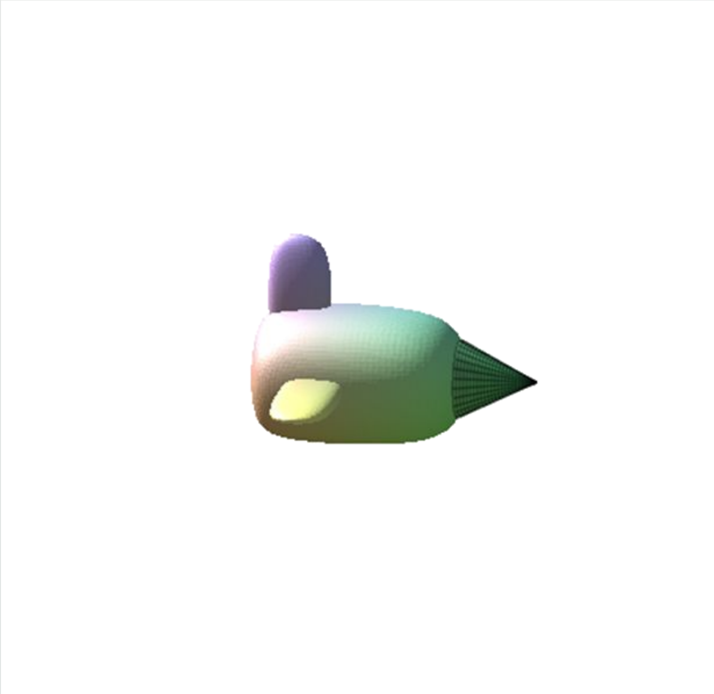
β – угол скольжения

X – вдоль оси самолета **(главной оси момента инерции)**

Вращение вокруг главных осей







Рысканье

Крен

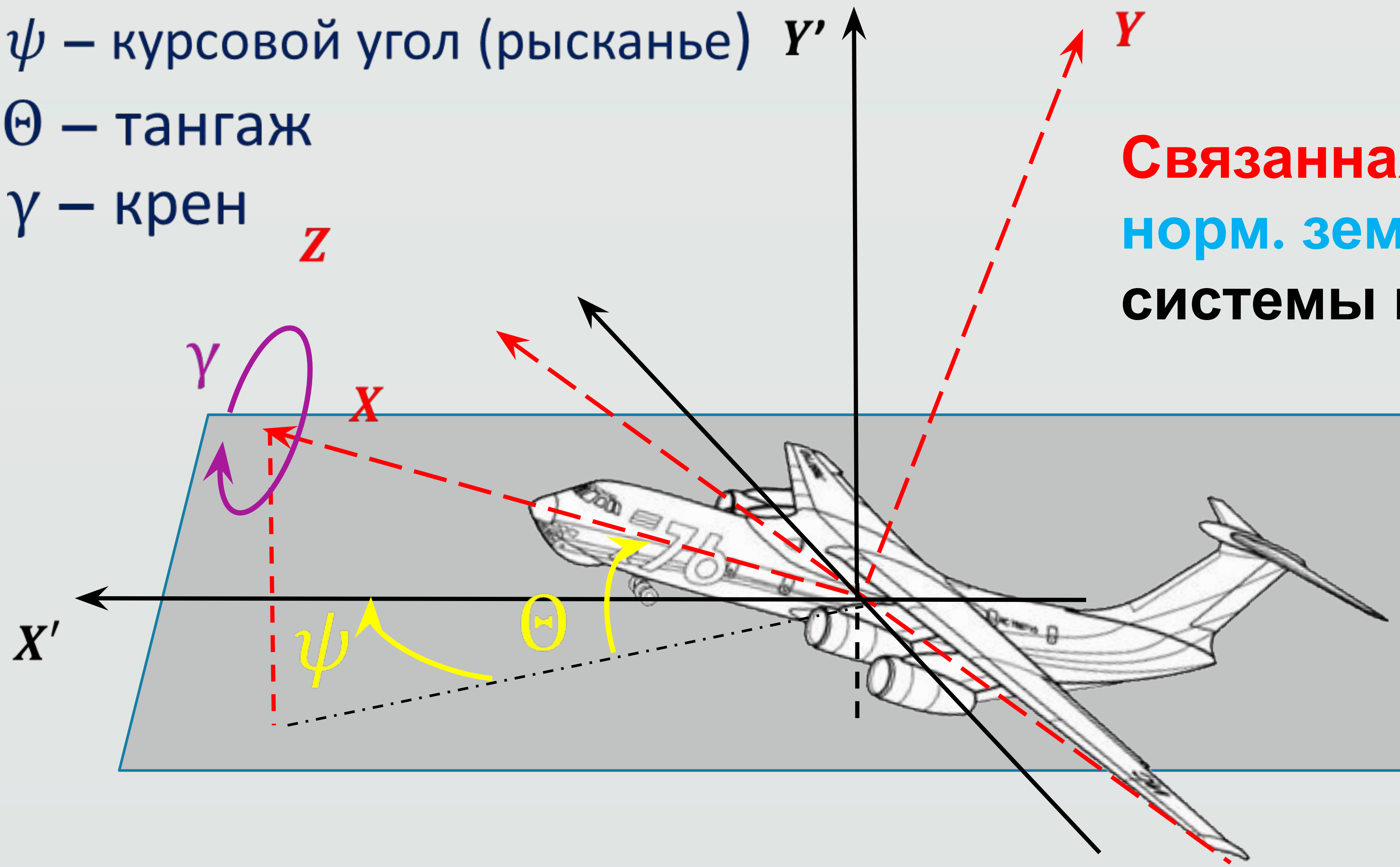
Тангаж

ψ – курсовой угол (рыскание)

Θ – тангаж

γ – крен

Связанная (X,Y,Z) и норм. земная (X'Y'Z') системы координат



X – вдоль оси самолета **(главной оси момента инерции)**

Установившийся полет

Сила лобового сопротивления

В стартовой системе координат:

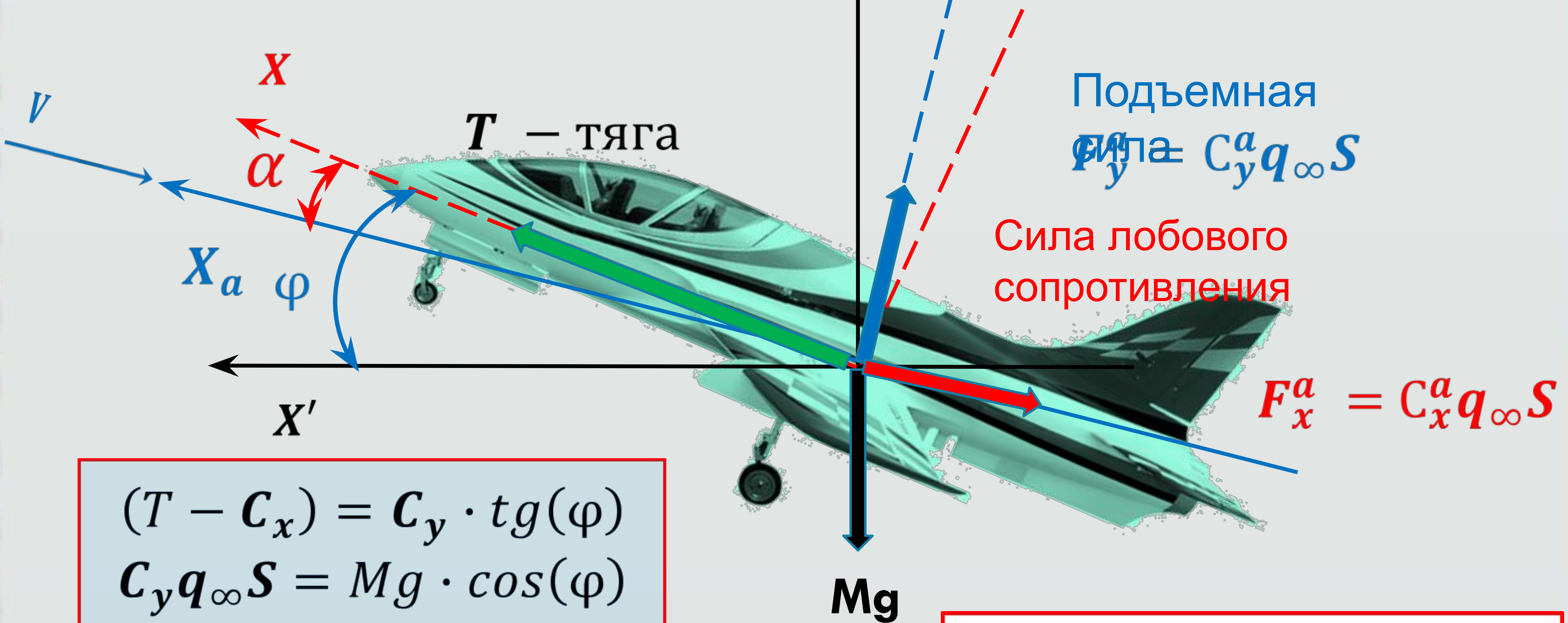
$$T\cos(\varphi) - \boldsymbol{C_x q_\infty S}\cdot\cos(\varphi-\alpha) - \boldsymbol{C_y q_\infty S}\cdot \sin(\varphi-\alpha) = 0$$

$$T\sin(\varphi) - \boldsymbol{C_x q_\infty S}\cdot\sin(\varphi-\alpha) + \boldsymbol{C_y q_\infty S}\cdot \cos(\varphi-\alpha) - Mg = 0$$

α – угол атаки

φ – угол тангажа

$q_\infty = \rho_\infty V_\infty^2/2$ – скоростной напор



$$(T - C_x) = C_y \cdot tg(\varphi)$$
$$C_y q_\infty S = Mg \cdot cos(\varphi)$$

$K = \frac{C_y}{C_x}$ – аэродинамическое качество

$$T = \left(\frac{1}{K} cos(\varphi) + sin(\varphi)\right) Mg$$

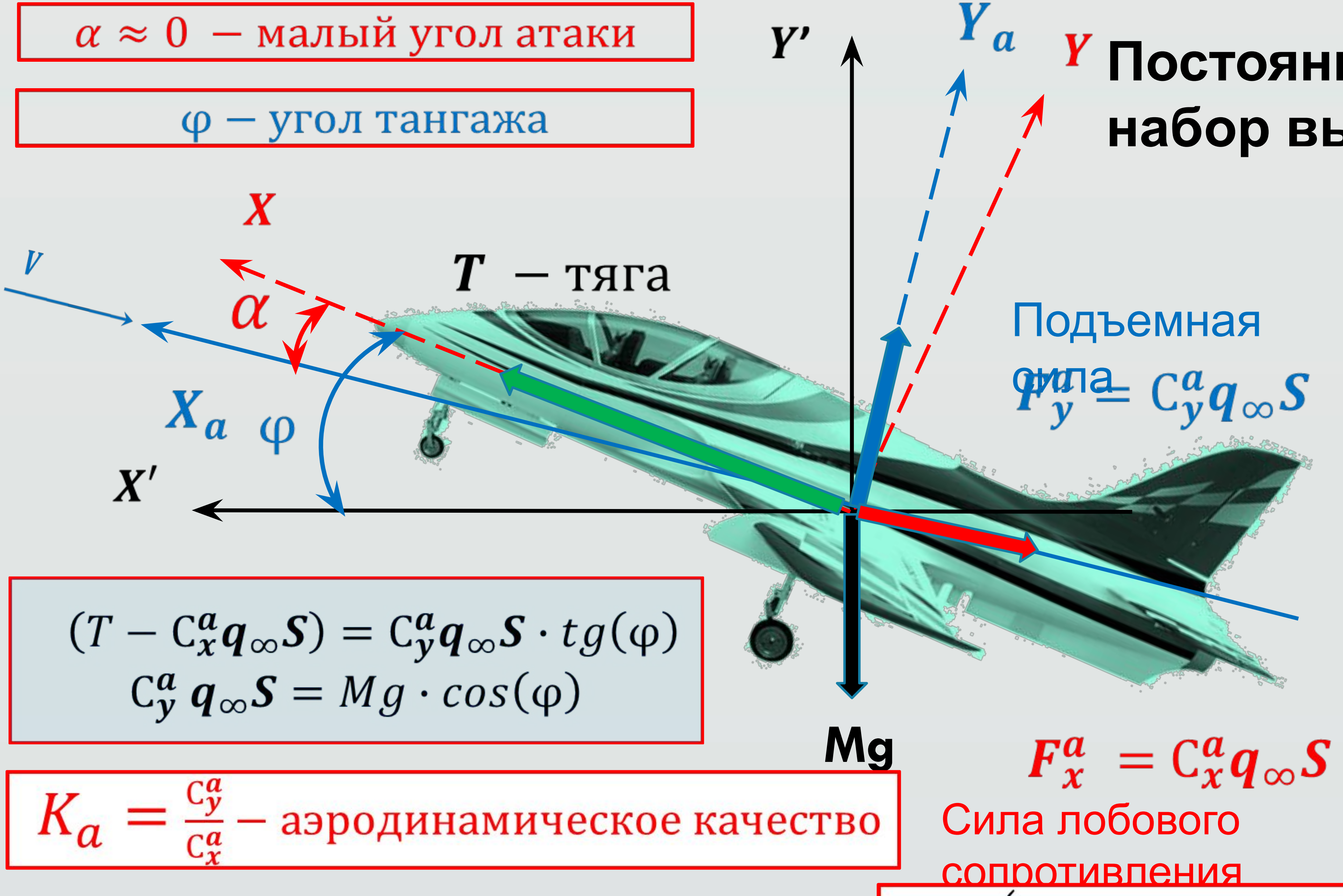
$$C_x = C_x^a \cdot cos(\alpha) - C_y^a \cdot sin(\alpha)$$

$$C_y = C_x^a \cdot sin(\alpha) + C_y^a \cdot cos(\alpha)$$

$\alpha \approx 0$ – малый угол атаки

φ – угол тангажа

Постоянный набор высоты



$$(T - C_x^a q_\infty S) = C_y^a q_\infty S \cdot tg(\varphi)$$
$$C_y^a\, q_\infty S = Mg \cdot cos(\varphi)$$

$K_a = \frac{C_y^a}{C_x^a}$ – аэродинамическое качество

$$C_y q_\infty S = Mg \cdot cos(\varphi)$$

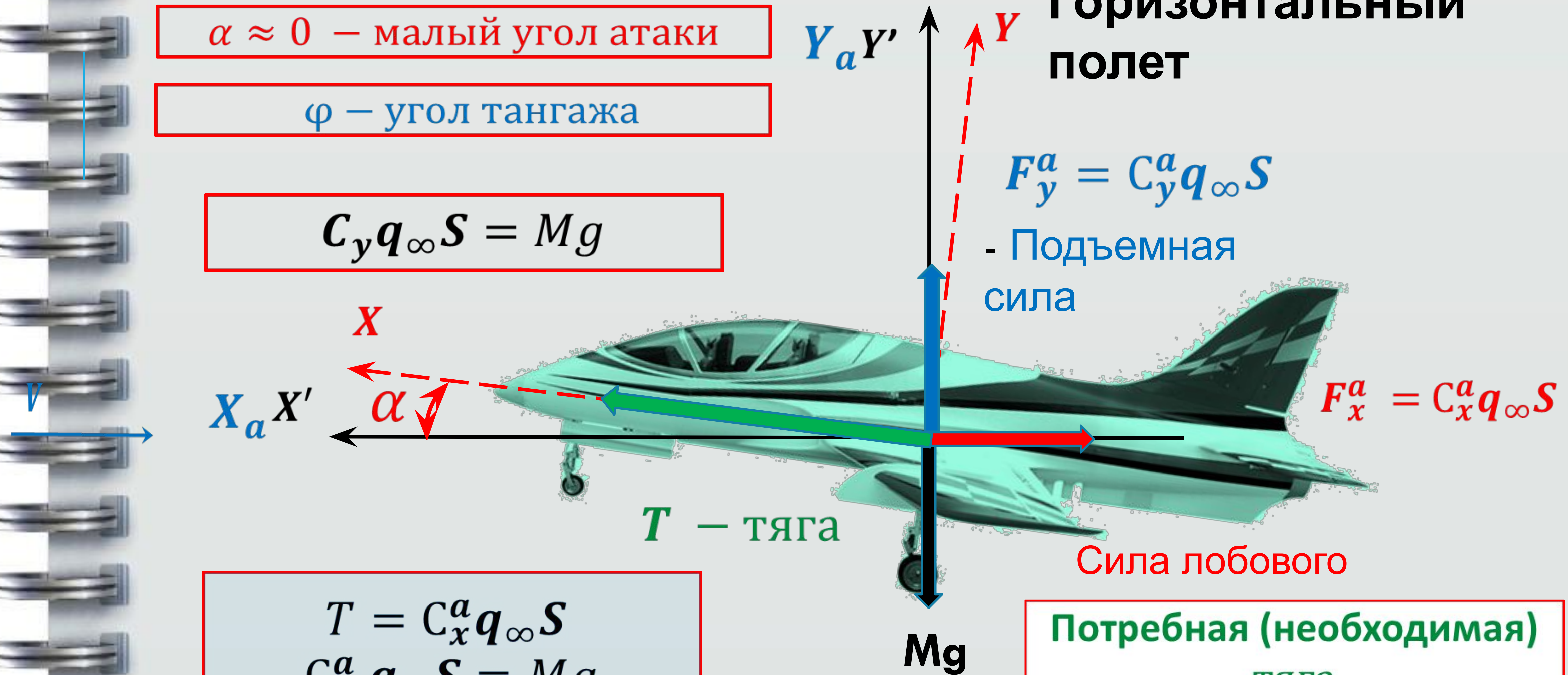
$$T = \left(\frac{1}{K_a} cos(\varphi) + sin(\varphi)\right) Mg$$

Горизонтальный полет

$\alpha \approx 0$ – малый угол атаки

φ – угол тангажа

$$C_y q_\infty S = Mg$$



$$T = C_x^a q_\infty S$$
$$C_y^a q_\infty S = Mg$$

Потребная (необходимая) тяга

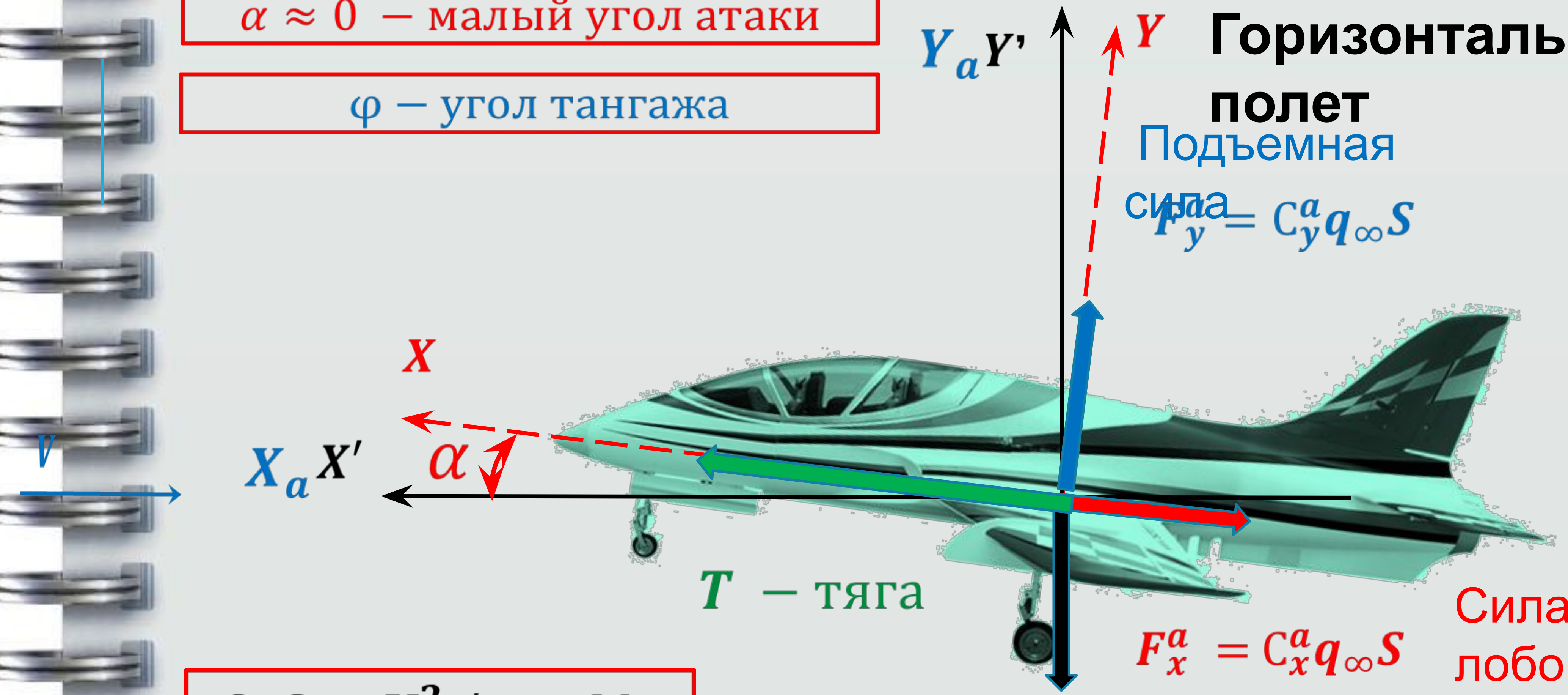
$K_a = \frac{C_y^a}{C_x^a}$ – аэродинамическое качество

$$T = \frac{1}{K_a} Mg$$

Горизонтальный полет

$\alpha \approx 0$ – малый угол атаки

φ – угол тангажа



$$C_y S \rho_\infty V_\infty^2 / 2 = Mg$$

$$V_\infty = \sqrt{\frac{2Mg}{C_y S \rho_\infty}}$$

- скорость горизонтального полета

Потребная (необходимая) тяга

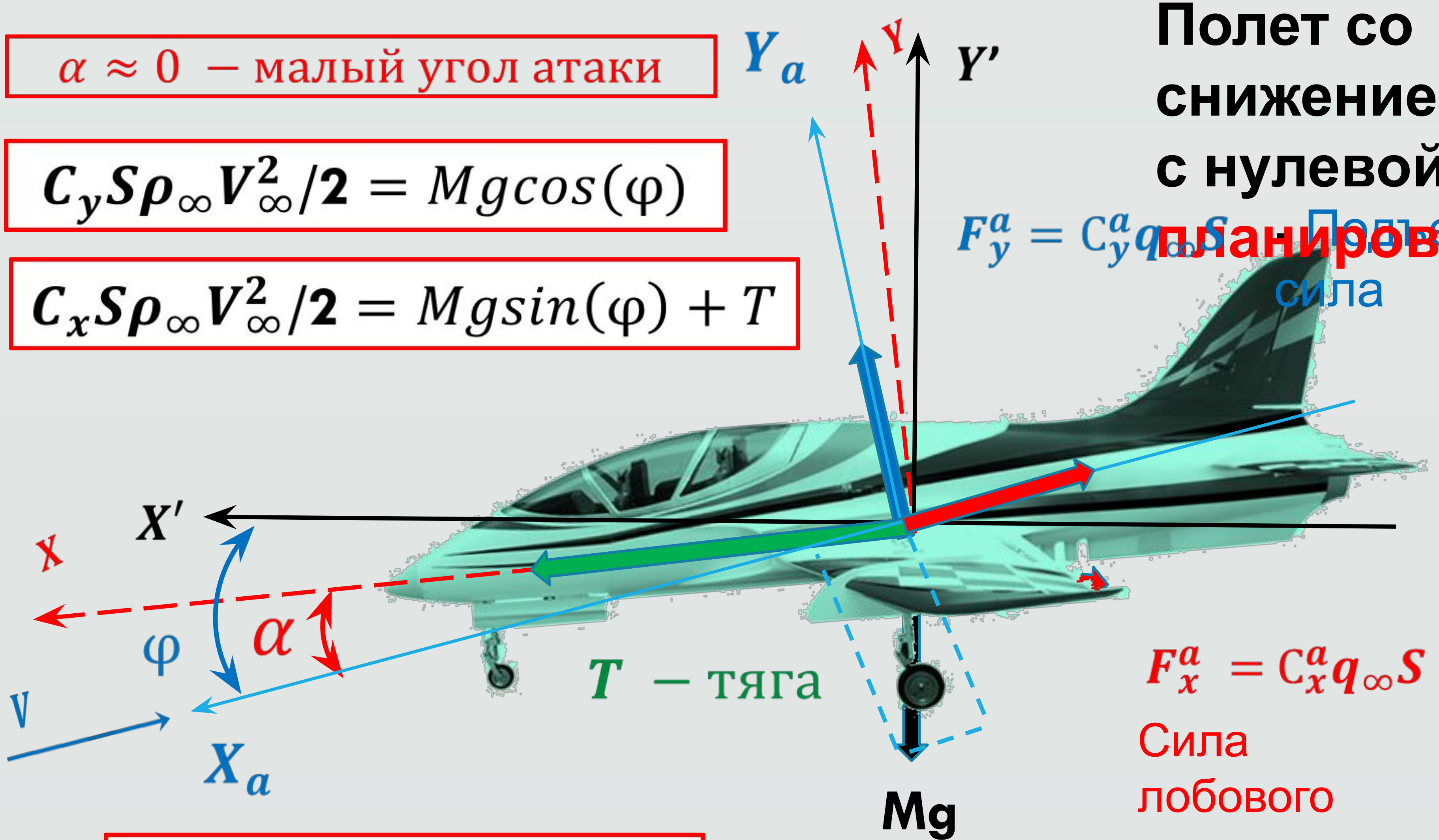
$$T = \frac{1}{K_a} Mg$$

Полет со снижением с нулевой тягой - **планирование**

$\alpha \approx 0$ – малый угол атаки

$$C_y S \rho_\infty V_\infty^2 / 2 = Mg\cos(\varphi)$$

$$C_x S \rho_\infty V_\infty^2 / 2 = Mg\sin(\varphi) + T$$



$$V_\infty = \sqrt{\frac{2Mg}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}\, S\rho_\infty}}$$

- Скорость планирования при

$$T = 0$$

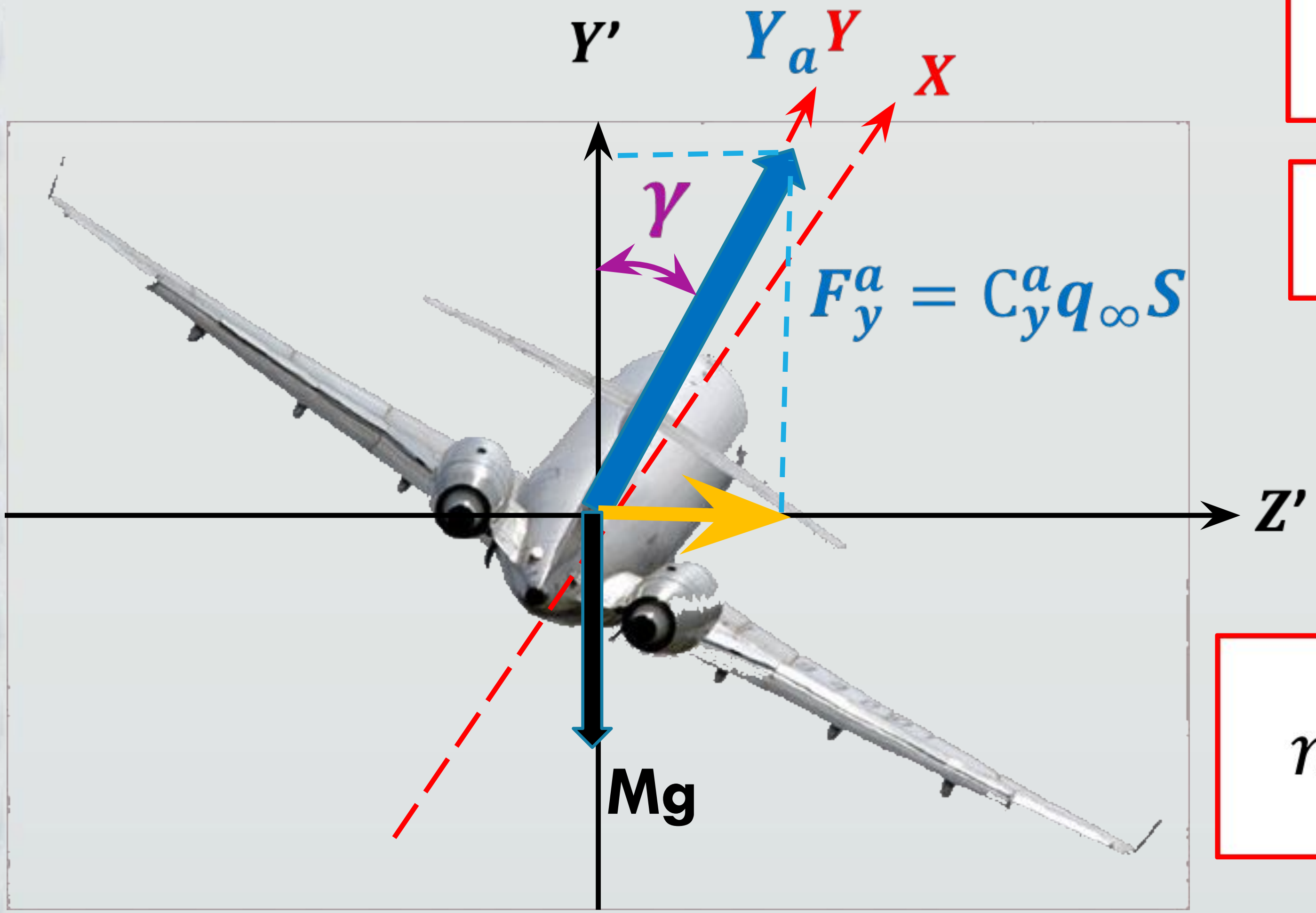
Вираж с креном без скольжения

$$\frac{Mv_{\infty}^{2}}{r} = F_y sin(\gamma)$$

$$C_x S \rho_{\infty} V_{\infty}^{2}/2 = T$$

$$\frac{V_{\infty}^{2}}{r} = g \cdot tg(\gamma)$$

$$Mg = F_y cos(\gamma)$$



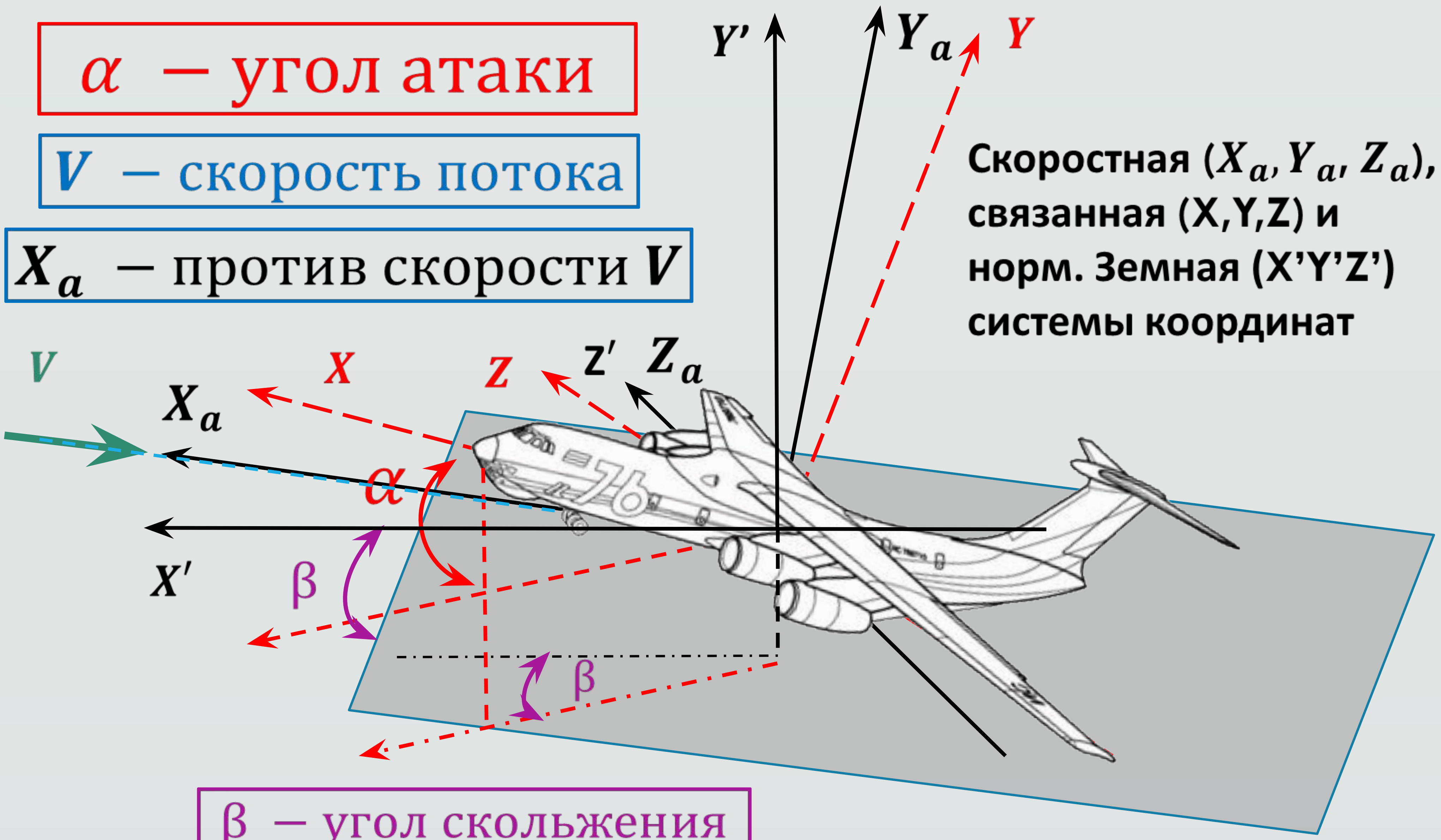
Перегрузка

$$n_y = \frac{F_y}{Mg} = \frac{1}{\cos(\gamma)}$$

α – угол атаки

V – скорость потока

X_a – против скорости V



Скоростная (X_a, Y_a, Z_a), связанная (X,Y,Z) и норм. Земная (X'Y'Z') системы координат

β – угол скольжения

X – вдоль оси самолета **(главной оси момента инерции)**