Лекция 8

Тема: *" Поверхности второго порядка. Элементы теории векторного поля "*

Поверхности и линии в пространстве.

Поверхность в трехмерном пространстве описывается уравнением вида $F(x;\, y;\, z) = 0$ или $z = f(x;\, y)$.

Пересечение двух поверхностей задает линию в пространстве, т.е. линия в пространстве определяется системой двух уравнением вида:

$$\begin{cases} F_1(x;y;z) = 0 \\ F_2(x;y;z) = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} z = f_1(x;y) \\ z = f_2(x;y) \end{cases}.$$

Изучать характер изменения поверхности можно **методом параллельных сечений**, который заключается в следующем.
Рассматривают линии, получающиеся в сечении поверхности семейством параллельных плоскостей (чаще всего рассматривают плоскости, параллельные координатным плоскостям) и, на основании изменения этих сечений, судят о характере изменения (рельефе) поверхности.

Определение. ***Линией уровня*** функции $z = f(x;\, y)$, отвечающей значению $z = C$, называется множество точек, лежащих в области определения функции, в которых функция принимает значение равное C.

Таким образом линия уровня задается уравнением вида:

$$f(x;\, y) = C\ .$$

Если функция задана в неявном виде $F(x;\, y;\, z) = 0$, то уравнения линий уровня будут иметь вид:

$$F(x;\, y;\, C) = 0.$$

Для функции трех переменных аналогичным понятием будут поверхности уровня.

Определение. ***Поверхностями уровня*** функции $u = f(x;\, y;\, z)$ называются поверхности вида

$$f(x;\, y;\, z) = C,$$

где C - произвольная константа.

Пример. Найти линии уровня поверхности, заданной неявно: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

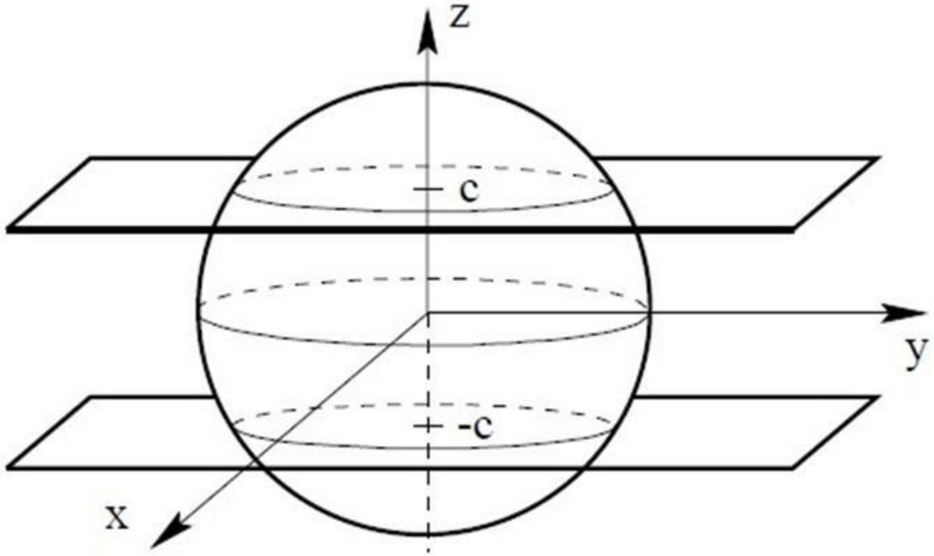
Решение: Линии уровня будут иметь уравнения $x^2 + y^2 + C^2 = R^2$, где C – произвольная константа. Преобразуя это уравнение получим: $x^2 + y^2 = R^2 - C^2$.

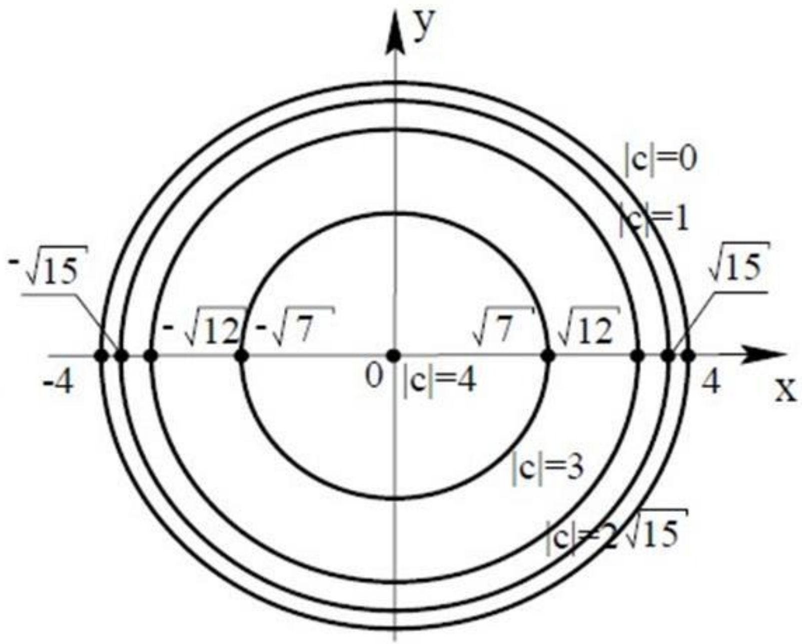
При $R^2 - C^2 > 0$, это уравнение задает окружности на плоскости Oxy с центром в точке O, радиуса $\sqrt{R^2 - C^2}$ тем большего, чем меньше C, при $C = 0$ радиус равен R.

При $|C| = R$ ($R^2 - C^2 = 0$) линией уровня данной поверхности будет точка O.

При $|C| > R$ ($R^2 - C^2 < 0$) линии уровня нет.

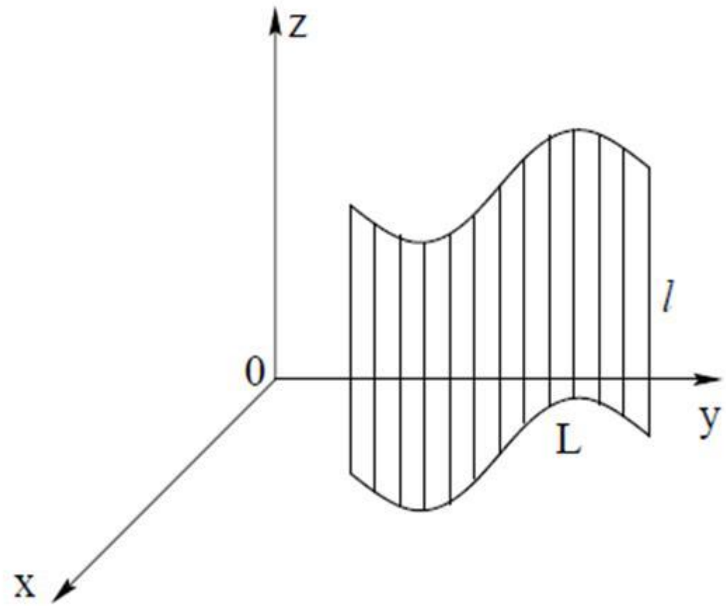
Поверхность и ее линии уровня изображены на рисунке для $R = 4$.





Цилиндрические поверхности.

Определение. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих данную линию L и параллельных данной прямой l, называется ***цилиндрической поверхностью***.
Линия L называется ***направляющей***, а каждая из прямых, параллельных прямой l - ***образующей*** цилиндрической поверхности.



Будем рассматривать только цилиндрические поверхности с плоскими направляющими, лежащими в одной из координатных плоскостей и образующими, перпендикулярными этой плоскости.

Можно показать, что уравнение $F(x;y)=0$, не содержащее переменной z, в пространстве $Oxyz$ является уравнением цилиндрической поверхности с образующими параллельными оси Oz и направляющей L, которая в плоскости Oxy задается тем же уравнением $F(x;y)=0$.

Замечание. В пространстве $Oxyz$ направляющая L определяется системой уравнений: $\begin{cases} F(x;y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Уравнение $F(x;z)=0$, не содержащее y и уравнение $F(y;z)=0$, не содержащее x, определяют в пространстве $Oxyz$ цилиндрические поверхности с образующими, параллельными соответственно осям Oy и Ox.

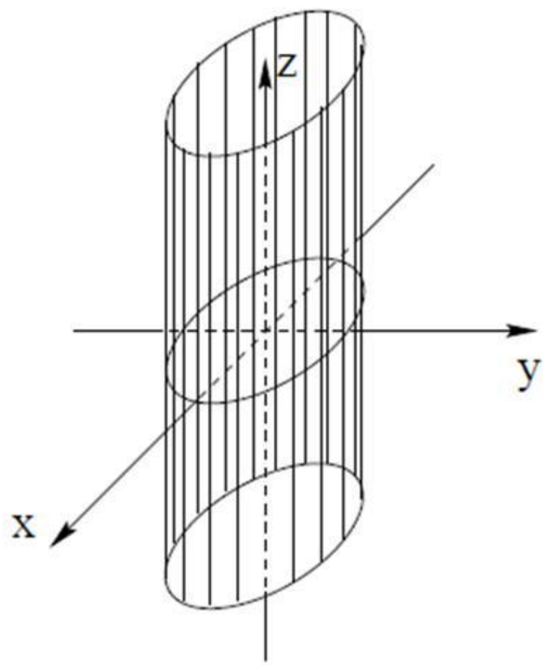
Рассмотрим примеры цилиндрических поверхностей.

Определение. Поверхность, определяемая уравнением

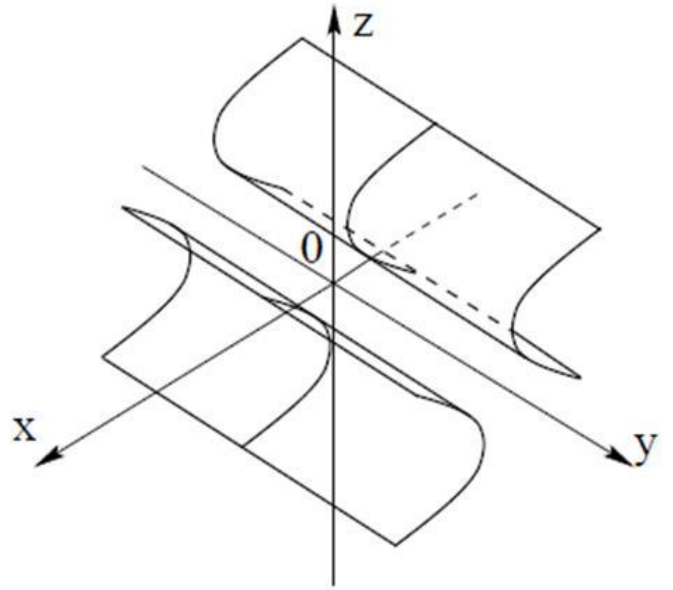
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1},$$

является цилиндрической и называется ***эллиптическим цилиндром***.

Ее образующие параллельны оси Oz, а направляющей является эллипс с полуосями a и b, лежащий в плоскости Oxy.



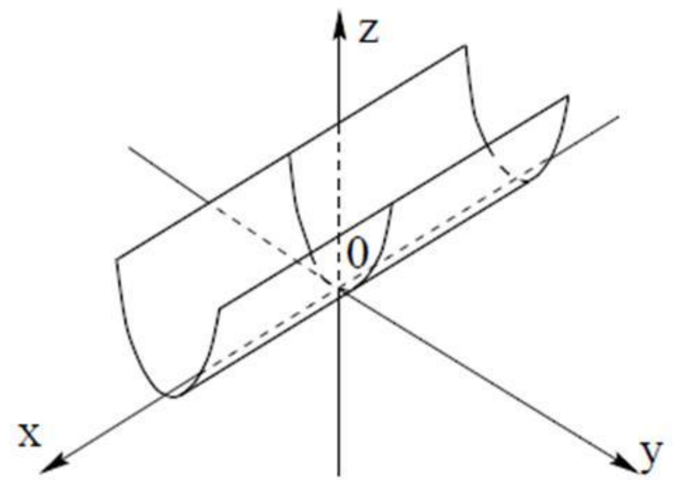
В частности, если $a = b$, то направляющей является окружность, а поверхность является прямым круговым цилиндром.
Его уравнение: $x^2 + y^2 = a^2$.



Определение. Цилиндрическая поверхность, определяемая уравнением

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1},$$

называется ***гиперболическим цилиндром***.
Образующие этой поверхности параллельны оси Oy, а направляющей служит расположенная в плоскости Oxz гипербола с действительной полуосью a и мнимой полуосью b.



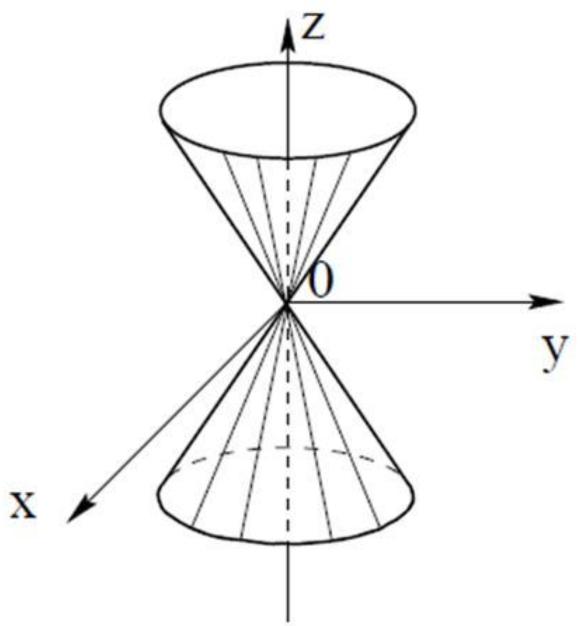
Определение. Цилиндрическая поверхность, определяемая уравнением

$$\boxed{y^2 = 2pz},$$

называется ***параболическим цилиндром***.
Ее направляющей является парабола, лежащая в плоскости Oyz, а образующие параллельны оси Ox.

Конические поверхности.

Определение. Поверхность, составленная из всех прямых, пересекающих линию L и проходящих через данную точку P, называется ***конической поверхностью***.



При этом линия L называется ***направляющей*** конической поверхности, точка P – ее ***вершиной***, а каждая из прямых, составляющих коническую поверхность – ***образующей***.

Рассмотрим коническую поверхность с вершиной в начале координат, для которой направляющей является эллипс:

$$\begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases},$$

с полуосями a и b, лежащий в плоскости $z = c$.

Эта поверхность называется ***конусом второго порядка***.

Каноническое уравнение конуса второго порядка имеет вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}.$$

В частности, если $a = b$, то направляющей является окружность и поверхность является прямым круговым конусом. Его уравнение имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Поверхности второго порядка.

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$\boxed{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0},$$

где a_{ij} – произвольно заданные числа, коэффициенты.

Рассмотрим основные виды поверхностей второго порядка и их общепринятые канонические уравнения.

Эллипсоид.

Определение. Поверхность, определяемая ***каноническим уравнением***:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1},$$

называется ***эллипсоидом***.

Числа a, b и c называются ***полуосями эллипсоида***.

Так как в уравнении текущие координаты входят в четных степенях, то эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей.

Форму эллипсоида будем изучать методом параллельных сечений.

Пересечем эллипсоид плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Если пересечь эллипсоид плоскостью $z = h$ ($|h| < c$), то в сечении получится эллипс L .

В самом деле, исключая из уравнений

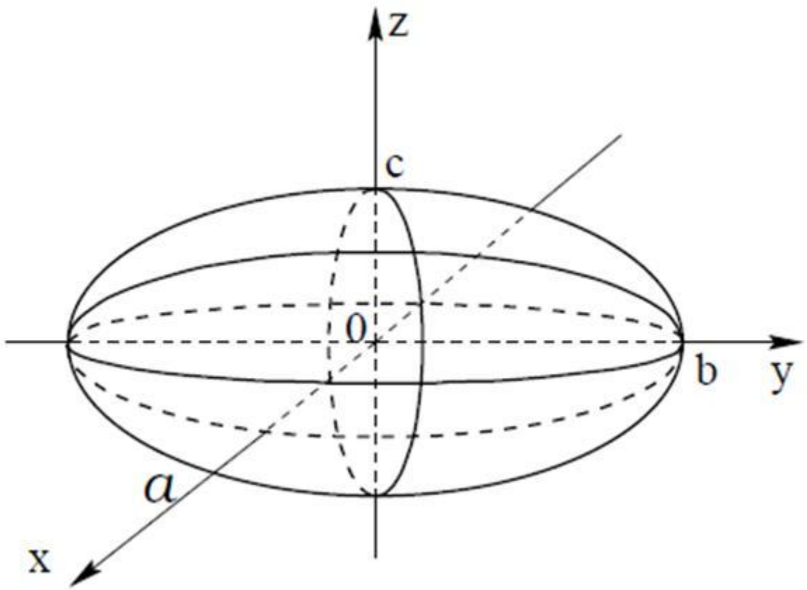
$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

аппликату z, получим уравнение цилиндрической поверхности, проектирующее сечение L на плоскость Oxy: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}$, или $\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$

Из этого уравнения видно, что кривая L есть эллипс с полуосями

$$\bar{a} = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\ \bar{b} = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

Из этих формул видно, что с возрастанием $|h|$ полуоси эллипса $\bar{a}$ и $\bar{b}$ уменьшаются. При $|h| = c$ имеем $\bar{a} = \bar{b} = 0$, и сечение вырождается в точку.



Аналогично можно показать, что при пересечении эллипсоида плоскостями $x = h$ ($|h| < a$) и $y = h$ ($|h| < b$) также получаются эллипсы.

В частном случае при $a = b$ получаем эллипсоид вращения:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Определение. Если все три полуоси эллипсоида равны между собой: $a = b = c$, то получившаяся поверхность называется ***сферой***:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Гиперболоиды.

Определение. Поверхность, определяемая ***каноническим уравнением***:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1},$$

называется ***однополостным гиперболоидом***.

Эта поверхность имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, т.к. текущие координаты x, y и z входят в уравнение в четных степенях.

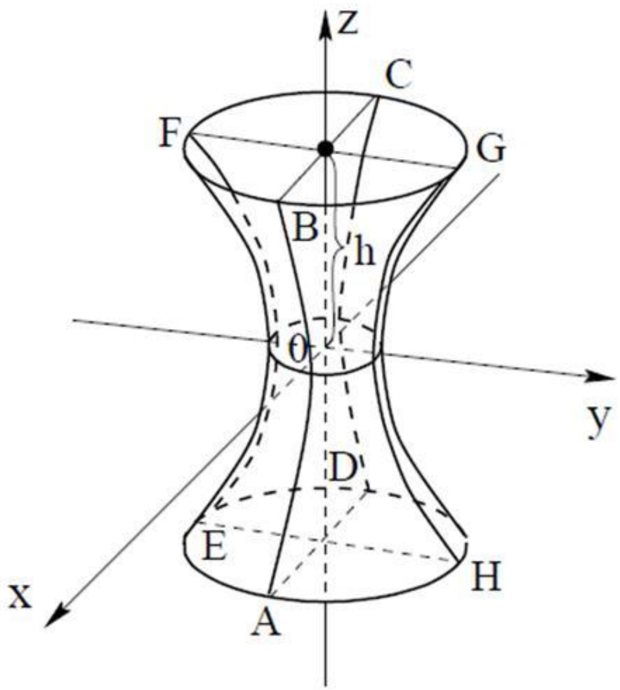
Пересекая однополостный гиперболоид плоскостью $y = 0$, получим в плоскости Oxz

гиперболу $ABCD$: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}.$

Аналогично, в сечении однополостного гиперболоида плоскостью $x = 0$ получится гипербола $EFGH$: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, лежащая в плоскости Oyz.

При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью $z = h$ получится эллипс $BFCG$, уравнения которого имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$



или

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1 \\ z = h \end{cases}.$$

Полуоси этого эллипса $\bar{a} = a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$ и $\bar{b} = b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$ возрастают с возрастанием абсолютной величины h.

При $h = 0$ получится эллипс, лежащий в плоскости Oxy и имеющий наименьшие полуоси a и b.

При $a = b$ получим однополостный гиперболоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

При пересечении его плоскостями $z = h$ получаются окружности

$$\begin{cases} z^2 + y^2 = a^2(1 + \dfrac{h^2}{c^2}) \\ z = h \end{cases}.$$

Замечание. Однополостный гиперболоид можно также рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий.

Рассмотрим прямую, определяемую уравнениями: $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = k(1 + \dfrac{y}{b}) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{k}(1 - \dfrac{y}{b}) \end{cases}$,

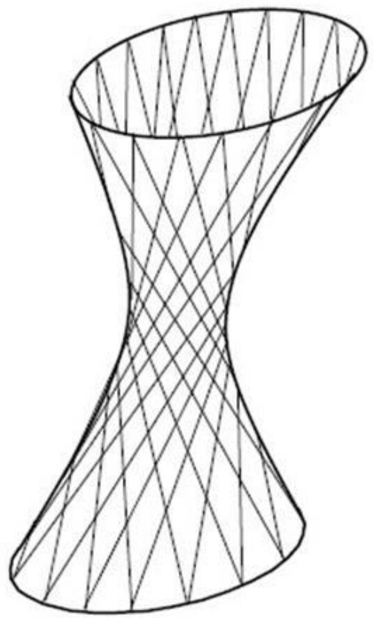
в которых a, b и c – полуоси однополостного гиперболоида, а k – произвольно выбранное число ($k \neq 0$).

Перемножая почленно эти уравнения, получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

т.е. уравнение однополостного гиперболоида.

Таким образом, координаты любой точки M (x; y; z), удовлетворяющие системе, удовлетворяют также и уравнению однополостного гиперболоида.
Т.е. все точки прямой принадлежат гиперболоиду.
Меняя значения k, мы получим целое семейство прямых, лежащих на поверхности.



Аналогично можно показать, что однополостному гиперболоиду принадлежат все прямые семейства: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=l(1-\dfrac{y}{b}) \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{l}(1+\dfrac{y}{b}) \end{cases}$, где l – произвольный параметр.

Можно также показать, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит по одной прямой каждого из указанных семейств.
Таким образом, однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий.

Определение. Поверхность, определяемая ***канонческим уравнением***:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1},$$

называется ***двуполостным гиперболоидом***.
Координатные плоскости являются плоскостями симметрии для двуполостного гиперболоида.

Пересекая эту поверхность координатными плоскостями Oxz и Oyz, получим

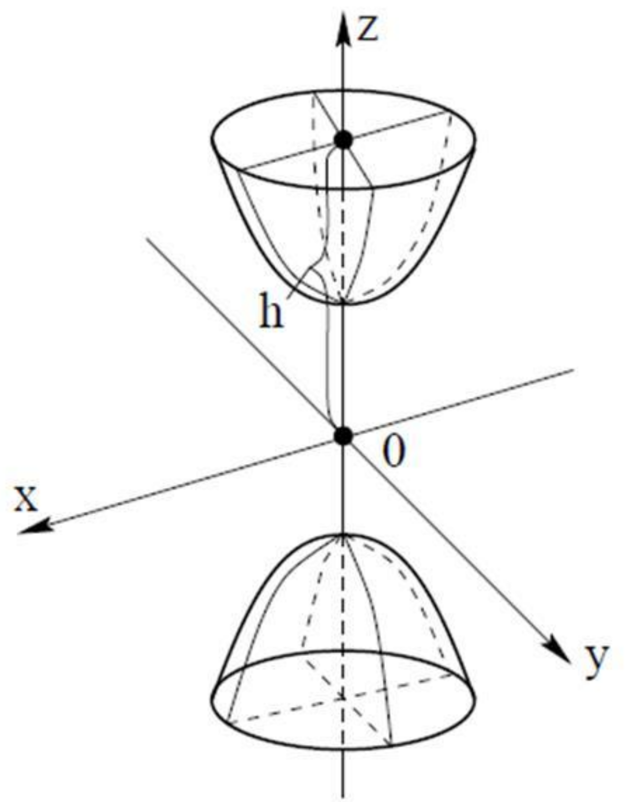
соответственно гиперболы: $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Если двуполостный гиперболоид пересечь плоскостью $z = h$ (при $|h| > c$), то в

сечении получится эллипс: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h \end{cases}$ с полуосями

$\overline{a} = a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}$ и $\overline{b} = b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} - 1}$ возрастающими с

возрастанием $|h|$.



При $|h| < c$ поверхность с плоскостью $z = h$, очевидно, не пересекается.
Двуполостный гиперболоид состоит из двух отдельных частей (полостей), чем и объясняется его название.
При $a = b$ уравнение двуполостного гиперболоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \text{или} \qquad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1$$

и является уравнением двуполостного гиперболоида вращения.

В сечении последнего плоскостью $z = h$ ($|h| > c$) получится окружность:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2\left(\dfrac{h^2}{c^2} - 1\right) \\ z = h \end{cases} \quad \text{радиуса } R = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}.$$

Параболоиды.

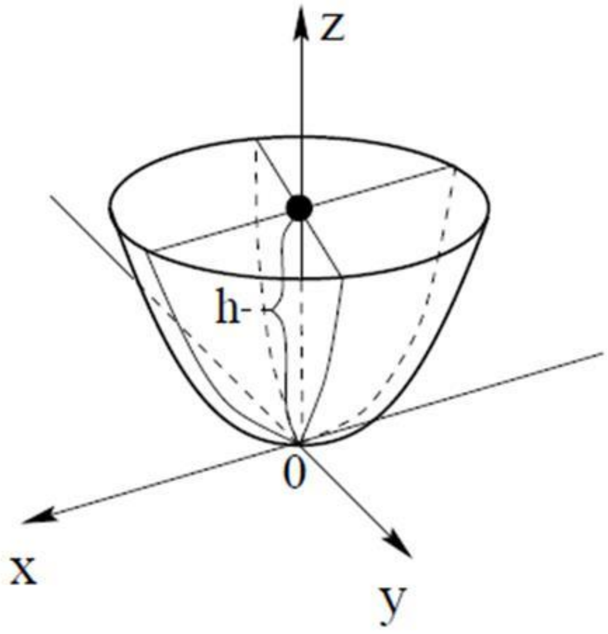
Определение. ***Эллиптическим параболоидом*** называется поверхность, определяемая ***каноническим уравнением***:

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Поскольку x и y входят в уравнение в четных степенях, эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии: Oxz и Oyz.

При пересечении эллиптического параболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz получатся соответственно параболы:

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = \dfrac{y^2}{b^2}, \\ x = 0 \end{cases}$$



а при пересечении плоскостью $z = h$ ($|h| > 0$) – эллипс

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 h} + \dfrac{y^2}{b^2 h} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad \text{с полуосями } a\sqrt{h} \text{ и } b\sqrt{h}.$$

В случае $a^2 = b^2$ получим параболоид вращения: $a^2 z = x^2 + y^2$.

Определение. ***Гиперболическим параболоидом*** называется поверхность, определяемая ***каноническим уравнением***:

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Пересекая эту поверхность плоскостью Oxz, получим параболу: $\begin{cases} a^2 z = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$.

При пересечении гиперболического параболоида плоскостью $x = h$ получится парабола:

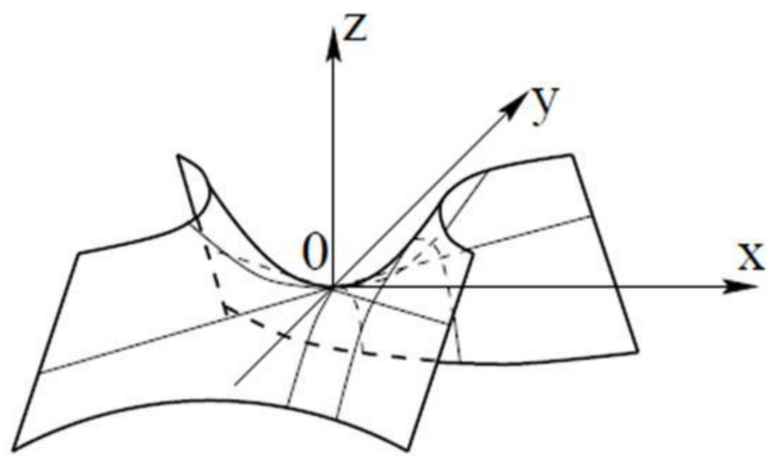
$$\begin{cases} z = \dfrac{h^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \\ x = h \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b^2\left(z - \dfrac{h^2}{2a^2}\right) = -y^2 \\ x = h \end{cases}.$$

При различных значениях h получится целое семейство парабол, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости Oyz и имеющих одинаковый параметр b^2.

Гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, описываемую движением любой из этих парабол при условии, что плоскость движущейся параболы остается параллельной плоскости Oyz, ось симметрии параболы остается в плоскости Oxz, а вершина движется по параболе.

Пересекая гиперболический параболоид плоскостью $z = h$, получим (при $h \neq 0$) гиперболу:

$$\begin{cases} h = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 h} - \dfrac{y^2}{b^2 h} = 1 \\ z = h \end{cases}.$$



На рисунке показано расположение этой гиперболы для двух случаев: $h > 0$ (верхний край) и $h < 0$ (нижний край).

При $h = 0$, т.е. при пересечении гиперболического параболоида координатной плоскостью Oxy, получится линия, уравнение которой в плоскости Oxy имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Последнее уравнение равносильно системе двух уравнений: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \end{array}\right.$.

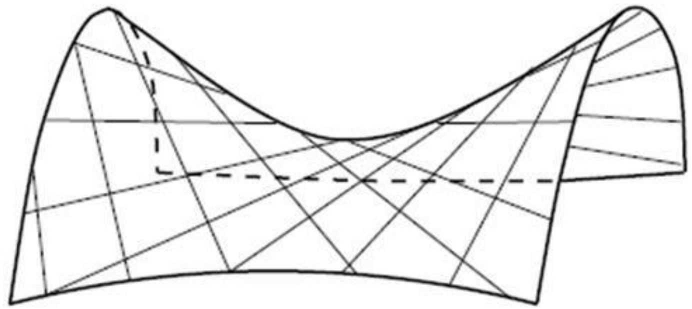
Это означает, что гиперболический параболоид пересекается с плоскостью Oxy по двум прямым: $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, лежащим в плоскости Oxy и проходящим через начало координат.

Кроме этих двух прямых, существуют и другие прямые, полностью лежащие на гиперболическом параболоиде.

Более того, как и в случае однополостного гиперболоида, можно показать, что через каждую точку гиперболического параболоида проходит по одной прямой каждого из

двух семейств прямых: $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=kz \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{k} \end{cases}$ и $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{l} \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=lz \end{cases}$, где

k и l – произвольные параметры.



Замечание. Гиперболический параболоид можно рассматривать как поверхность, составленную из прямых линий.

Определение. Поверхности, составленные из прямых линий, называются *линейчатыми*.

Цилиндрические и конические поверхности, а также однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид являются линейчатыми поверхностями.

Кроме рассмотренных поверхностей, других видов поверхностей второго порядка нет (за исключением отдельных вырожденных случаев).

Например, плоскость, пара плоскостей или даже одна точка формально могут быть заданы как поверхности второго порядка.

Произвольное уравнение второго порядка всегда приводится к уравнению (за исключением отдельных вырожденных случаев) одного из указанных канонических видов, относительно «новых» (отличных от x, y, z) декартовых координат.

Пример. Определить вид поверхности, задаваемой уравнением

$$3x^2 - 4y^2 + 5z^2 - 6 = 0 .$$

Решение. Перенеся свободный член в правую часть уравнения и поделив обе его части на 6, получим:

$$\frac{3x^2}{6} - \frac{2y^2}{3} + \frac{5z^2}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{6/3} - \frac{y^2}{3/2} + \frac{z^2}{6/5} = 1.$$

Это каноническое уравнение однополостного гиперболоида, расположенного вдоль

оси Oy, с полуосями $\sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$ и $\sqrt{\frac{6}{5}}$ эллипса в плоскости $y = 0$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Предположим, что поверхность в трехмерном пространстве задана уравнением вида:

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – некоторая дифференцируемая функция.

Для нахождения уравнения касательной плоскости, воспользуемся следующим свойством градиента.

Теорема. Градиент функции в каждой точке ортогонален поверхности (линии) уровня функции проходящей через эту точку.

Поскольку заданная поверхность является поверхностью уровня функции $u = F(x, y, z)$, то градиент этой функции ортогонален поверхности в каждой точке, т.е. является вектором нормали.

Для нахождения уравнения касательной плоскости, используем уравнение плоскости, проходящей через данную точку P_0:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

В качестве нормального вектора $\vec{n}(A;B;C)$ возьмем вектор градиента, перпендикулярный касательной плоскости.

Уравнение касательной плоскости примет вид:

$$\boxed{F'_x(x_0;y_0;z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0;y_0;z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0;y_0;z_0)(z-z_0)=0}.$$

Определение. Прямая, проходящая через точку касания P_0, перпендикулярно касательной плоскости называется ***нормалью*** к поверхности.

Для нахождения ее уравнения, воспользуемся уравнением прямой в пространстве, проходящей через заданную точку P_0:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

В качестве направляющего вектора $\vec{s}(m;n;p)$ возьмем вектор градиента, параллельный нормали.

Уравнение нормали примет вид:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{F'_x(x_0;y_0;z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0;y_0;z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0;y_0;z_0)}}.$$

Замечание. Формулы для направляющих косинусов нормали в точке P_0 при задании поверхности уравнением $F(x;y;z)=0$ получаются следующие:

$$\cos\alpha=\frac{F'_x(P_0)}{|grad\ F(P_0)|};\ \cos\beta=\frac{F'_y(P_0)}{|grad\ F(P_0)|};\ \cos\gamma=\frac{F'_z(P_0)}{|grad\ F(P_0)|},$$

где $|grad\ F(P_0)|=\sqrt{\left(F'_x(P_0)\right)^2+\left(F'_y(P_0)\right)^2+\left(F'_z(P_0)\right)^2}$.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z=\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}$$

в точке $(-3,5,-2)$.

Решение. В данном случае необходимо перенести все слагаемые уравнения в одну из частей уравнения для того, чтобы привести уравнение к виду $F(x, y, z) = 0$. Например, перенесём z в правую часть и обозначим:

$$F = \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} - z.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{3}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y}{5}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0) = \frac{-6}{3} = -2; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(M_0) = -\frac{10}{5} = -2; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(M_0) = -1.$$

Искомые уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности имеют вид:

$$-2(x+3) - 2(y-5) - (z+2) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{-2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Элементы теории векторного поля.

Пусть в каждой точке области D трехмерного пространства задан вектор $\vec{F}$, с проекциями $F_x = P = P(x,y,z)$, $F_y = Q = Q(x,y,z)$ и $F_z = R = R(x,y,z)$.

В этом случае говорят, что в области D задано ***трехмерное (пространственное) векторное поле***:

$$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

Определение. Линия L, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением вектора $\vec{F} = (P,Q,R)$ в этой точке, называется ***векторной линией***.

Пусть в данном векторном поле дана замкнутая кривая C .

Определение. Множество всех векторных линий, проходящих через замкнутую кривую C , образуют поверхность, называемую ***векторной трубкой***.

Рассмотрим некоторые характеристики векторного поля.

Скалярной характеристикой векторного поля является ***дивергенция***, которая вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Определение. Точка векторного поля, в которой $\operatorname{div}\vec{F} > 0$, называется ***источником***, а точка, в которой $\operatorname{div}\vec{F} < 0$ – ***стоком***.

Определение. Векторное поле, в каждой точке которого $\operatorname{div}\vec{F} = 0$, называется ***соленоидальным*** (или трубчатым).

Пример. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{F} = (x-2z)\vec{i} + (x+3y+z)\vec{j} + (5x+y)\vec{k}$.

Решение:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x-2z) + \frac{\partial}{\partial y}(x+3y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(5x+y) = 4.$$

Пример. Проверить, является ли соленоидальным векторное поле

$$\vec{F} = (2-x^2y)\vec{i} + y^2z\vec{j} + (2xyz - z^2y)\vec{k}.$$

Решение: Векторное поле $\vec{F}$ является соленоидальным, если в каждой его точке $\operatorname{div}\vec{F} = 0$.

Найдем дивергенцию векторного поля

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2-x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(2xyz - z^2y) = -2xy + 2yz + 2xy - 2zy = 0.$$

Следовательно, данное поле является соленоидальным во всех точках трехмерного пространства.

Приведем важную векторную характеристику векторного поля.

Определение. ***Ротором (или вихрем)*** векторного поля

$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется вектор обозначаемый $\operatorname{rot}\vec{F}$ и равный

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Определение. Векторное поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется ***безвихревым***, если во всех его точках $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$.

Определение. Векторное поле $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ называется ***потенциальным***, если существует функция $\mathrm{U} = \mathrm{U}(x,y,z)$, градиент которой равен вектору $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$. Такая функция называется ***потенциальной функцией*** (или просто ***потенциалом***) поля $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$.

Пусть область, в которой задано векторное поле, является внутренностью некоторой замкнутой поверхности.
Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы векторное поле $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ было потенциальным необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е., чтобы во всех точках поля выполнялось условие:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

Пример. Найти ротор векторного поля $\vec{F}=(x-y+3z)\vec{i}+(y-3x+z)\vec{j}+(x-3y+z)\vec{k}$.

Решение:

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-y+3z & y-3x+z & x-3y+z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(x-3y+z)-\frac{\partial}{\partial z}(y-3x+z)\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(x-y+3z)-\frac{\partial}{\partial x}(x-3y+z)\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(y-3x+z)-\frac{\partial}{\partial y}(x-y+3z)\right)\vec{k}=-4\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}.$$

Пример. Проверить является ли данное поле $\vec{F}=(2xy+z)\vec{i}+(x^2-2y)\vec{j}+x\vec{k}$ потенциальным.

Решение: Для того чтобы векторное поле $\vec{F}$ было потенциальным, необходимо, чтобы в каждой точке этого поля $\operatorname{rot}\vec{F}=0$.

В данном случае

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+z & x^2-2y & x\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}x-\frac{\partial}{\partial z}(x^2-2y)\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(2xy+z)-\frac{\partial}{\partial x}x\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2y)-\frac{\partial}{\partial y}(2xy+z)\right)\vec{k}=0\cdot\vec{i}+(1-1)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0.$$

Следовательно, данное векторное поле $\vec{F}$ имеет потенциал.

Спасибо за внимание