Лекция. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ Лекция 2-ого сентября 2020г

§ Обозначения и определения.

<u>Опр.</u> Под интервалом $\langle \alpha, \beta \rangle$ будем понимать (α, β), $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ или $[\alpha, \beta]$ или при $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty \to (-\infty, +\infty)$

<u>Опр.</u> Пусть $F(x, P_0, P_1, \dots, P_n)$ – заданная функция, определенная в области $\Omega \subset R^{n+2}$. Тогда уравнение

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (*)$$

называется ОДУ n-ого порядка относительно функции $y(x)$ переменной x. Наивысший порядок производной в уравнении $(*)$ называется порядком ОДУ.

<u>Опр.</u> Уравнение $(*)$ называется ОДУ n-ого порядка, заданным в неявном виде. Частным случаем этого ОДУ является уравнение вида

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Это ОДУ разрешённое относительно старшей производной, где $f(x, P_0, P_1, \dots, P_{n-1})$ задана в области $G \subset R^{n+1}$

<u>Примеры</u> 1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \arcsin(y + \sqrt{y'}) = 0$

2) $m\ddot{x}(t)=f(t,x,\dot{x})$, где $\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}$

Определение функция $y=\varphi(x)$ называется решением ОДУ ⊛, если 1) $\varphi(x)\in C^{(n)}\langle a,b\rangle$
2) для $\forall x$: $x\in\langle a,b\rangle\subset \Pi p_x\Omega \Longrightarrow$, что точки $(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x))\in\Omega$
3) при подстановке $y=\varphi(x)$ в ⊛ получим тождество относительно $x\in\langle a,b\rangle$.

Замечание Если в ⊛ $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\neq 0$ в Ω, то уравнение ⊛ может быть разрешено относительно старшей производной

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \quad (1)$$

Опр) Функция $y=\varphi(x)$ называется решением уравнения (1), если 1) $\varphi(x)\in C^{(n)}\langle a,b\rangle$, 2) для $\forall x\in\langle a,b\rangle$ точки $(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n-1)}(x))\in$ $\in G\subset R^{n+1}$, 3) при подстановке $y=\varphi(x)$ в (1) получается тождество относительно $x\in\langle a,b\rangle$.

Опр) Уравнение

$$y^{(n)}=a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y(x)+b(x) \quad (2)$$

называется линейным ОДУ n-ого порядка. $a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)$ и $b(x)$ — заданные функции, $y(x)$ — неизвестная функция.

Если $b(x) \equiv 0$, то уравнение (2) называется однородным, Если $b(x) \not\equiv 0$, то неоднородным.

§ Уравнение 1-ого порядка. Задача Коши.

Уравнение $F(x, y, y') = 0$ (*)

называется уравнением 1-ого порядка не разрешённым относительно производной. $F(x, p, q)$ — функция, заданная в области $\Omega \subset R^3$.

Уравнение $y' = f(x, y)$ (1)

называется ОДУ 1-ого порядка, разрешённым относительно производной. Функция $f(x, y)$ задана в области $G \subset R^2_{xy}$.

Опр. Задача Коши для уравнения (1) состоит в том, чтобы среди всех решений уравнения (1) найти такие, которые удовлетворяют условию

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

где $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $(x_0, y_0) \in G$

Условие (2) называется условием Коши (начальным условием), а задача (1),(2) — задачей Коши, то есть

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$ — задача Коши.

Опр. Решение задачи Коши называется частным решением.

Опр. Процесс нахождения решений ОДУ называется интегрированием дифферен- циального уравнения.

Замечание. Как правило, если ОДУ имеет хотя бы одно решение, то оно имеет их бесконечно много. Правда не всегда.

Пример. $(y')^2+y^2=0$.
Это уравнение имеет единственное реше- ние $y(x)\equiv 0$.

Опр. Общим решением уравнения (*) называется функция $y=\varphi(x,C)$, завися- щая от постоянной C такая, что при любом фиксированном C она является решением уравнения (*) и любое частное решение уравнения (*) может быть получено из $y=\varphi(x,c)$ соответствую- щим подбором постоянной C.

Опр. Равенство $\Phi(x,y,C)=0$ называется общим интегралом уравнения (*), если после разрешения этого уравнения отно- сительно $y(x)$, получим общее решение уравнения (*).
Если в равенстве $\Phi(x,y,C)=0$ постоянная C фиксирована, то $\Phi(x,y,C_0)=0$ назы-

вается частным интегралом уравнения ⊛

Замечание Аналогично определяется общее решение $y=\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ и общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n)=0$ уравнения

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0$$

Примеры 1) $(y'')^2 - x^2 = 0$

$$y = \pm\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \text{ — общее решение.}$$

2) $y' = f(x)$, $f(x) \in C\langle a, b\rangle$. Тогда

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C \text{ — общее решение.}$$

$x_0 \in \langle a, b\rangle$, $x \in \langle a, b\rangle$.

Теорема (ТСЕ — Теорема существования и единственности решения задачи Коши). Пусть задано уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y) \in C(G)$, $G \subset R^2_{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$ и $\exists M>0$: $|f| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M$. Тогда для $\forall (x_0, y_0) \in G$ $\exists h>0$: что на $[x_0-h, x_0+h]$ $\exists$ решение задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$ и это решение единственно.

Геометрическая интерпретация решения задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$

Каждой точке $(x,y)\in G$ поставим в соответствие вектор $(1; f(x,y))$ или единичный вектор $\vec{S}(x,y)$

$\vec{S}(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}; \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}\right)$. Таким образом в области G задаётся векторное поле

Опр) Векторной линией поля $\vec{S}(x,y)$ называется гладкая линия такая, что направление касательной к этой линии в каждой её точке совпадает с направлением поля $\vec{S}(x,y)$ в этой точке.

(Гладкой линией называется множество точек $(x;y)$ плоскости таких, что

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t\in\langle\alpha;\beta\rangle$$

таких, что $\varphi(t), \psi(t)\in C^{(1)}\langle\alpha,\beta\rangle$ и $|\varphi'|+|\psi'|>0$)

Опр) Решение уравнения $y'=f(x,y)$ ① определяет на плоскости Oxy линию $(x, y(x))$, которая называется графиком решения или интегральной кривой уравнения.

Очевидно, что интегральная кривая является векторной линией поля $\vec{S}(x,y)$.

$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))=f(x,y) \Longrightarrow$ вектор касательной коллинеарен вектору $\vec{S}(x,y)$ и наоборот векторная линия поля является интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Таким образом, решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

геометрически означает, что среди всех интегральных кривых уравнения (1) необходимо найти те, которые проходят через точку (x_0, y_0)

Следствие Из геометрической интерпретации следует

Лемма Чаплыгина. Пусть заданы две задачи Коши:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1) \\ y_1(x_0) = y_{10} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_2' = f_2(x, y_2) \\ y_2(x_0) = y_{20} \end{cases}$$

причём для каждой задачи Коши справедлива Теорема существования и единственности решения задачи Коши (ТСЕ).

Тогда если $f_1 \leq f_2$ для $\forall x \in \langle \alpha, \beta \rangle$ и

$y_{10} \leq y_{20}$, то $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $\forall x \in \langle \alpha; \beta \rangle$

§ Элементарные методы интегрирования ОДУ 1-ого порядка

Опр. ОДУ называется интегрируемым в квадратурах, если его решение может быть выражено через элементарные функции или интегралы от них.

Замечание ОДУ может быть интегрируемо в квадратурах, но решение не является элементарной функцией.

Пример $y' = e^{-x^2}$, $y = \int_{x_0}^{x} e^{-t^2} dt + C$

1) Уравнения с разделяющимися переменными

$y' = f(x) \cdot g(y)$ (может быть записано в виде $P(x)Q(y)dy + M(x)N(y)dx = 0$)

а) $g(y) \neq 0$ Тогда уравнение можно записать в виде $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

Следовательно, $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \Longrightarrow$

$G(y) = F(x) + C$ — общий интеграл

б) если $g(y_0) = 0$, то $y = y_0$ — решение

2) Однородные уравнения

Опр. Однородным уравнением называется уравнение вида $y' = f(x, y)$, (*)

где $f(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка. (То есть $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ для $\forall \lambda \in R$)

Тогда $f(x, y) = f(1; \frac{y}{x})$ и уравнение (*) запишется в виде $y' = \varphi(\frac{y}{x})$.

Делаем замену $\frac{y}{x} = t$, $y = tx$,
$y' = t' \cdot x + t$. Тогда: $t'x + t = \varphi(t) \Longrightarrow$
$t' = \frac{\varphi(t) - t}{x}$ или $\frac{dt}{\varphi(t) - t} = \frac{dx}{x}$.
Получили уравнение с разделяющимися переменными.

3) Линейные уравнения 1-ого порядка

Опр. Линейным уравнением 1-ого порядка называется уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (1)$$

Чтобы решить это уравнение, сначала сделаем 1-ый шаг. Решаем однородное уравнение $y' = a(x)y$ (1_0)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = a(x)dx \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow y = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$. Это общее решение однородного уравнения (1_0), где C – произвольная постоянная.

2-ой шаг (вариация произвольной постоянной)

Будем искать решение уравнения (1) в виде $y(x) = C(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}$ $(*)$
где $C(x)$ подберём так, чтобы при подстановке $(*)$ в (1) получилось тождество.

Подставив (*) в (1), получим

$$C'(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + C(x)a(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} = a(x)C(x)e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt} + b(x)$$

или $C'(x) = b(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \Longrightarrow$

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} b(\xi)\cdot e^{-\int_{x_0}^{\xi} a(t)dt} d\xi + C_0$$

Подставив найденную функцию $C(x)$ в (*), получим решение неоднородного уравнения (1).

§ Уравнение Бернулли

Опр. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x)\cdot y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \qquad (2)$$

при $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ получаем линейное уравнение, которое было рассмотрено ранее.

Замечание Если $\alpha > 0$, то очевидно функция $y(x) \equiv 0$ является решением уравнения (2)

Для решения уравнения (2) (при $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$) разделим обе части уравнения (2) на y^{α}

При $\alpha > 0$ следует учесть, что $y(x) \equiv 0$ является решением уравнения (2), которое при таком делении может быть потеряно.

В дальнейшем его надо будет добавить в ответ.

После деления на y^{α} уравнения (2), получим

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = \frac{a(x)}{y^{\alpha-1}} + b(x)$$

Сделаем замену $z(x) = y^{1-\alpha}$. Тогда $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\cdot y'$ и следовательно, приходим к уравнению относительно функции $z(x)$

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$$

Это линейное уравнение относительно функции $z(x)$, которое было рассмотрено ранее. После того как будет найдено $z(x)$, находим $y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

§ Уравнение Риккати

Опр) Уравнение вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + f(x) \qquad (3)$$

называется уравнением Риккати.

Если $f(x) \equiv 0$, то оно становится уравнением Бернулли при $\alpha = 2$.

Если $f(x) \not\equiv 0$, то в общем случае оно неразрешимо в квадратурах.

Пример. Уравнение $y' + y^2 = x^{\alpha}$

разрешимо в квадратурах $\Longleftrightarrow$ когда $\alpha = 0$ или $\alpha = -\dfrac{4m}{2m-1}$. Это было доказано Лиувиллем.

Замечание. Если известно частное решение уравнения Риккати (3), то его можно свести к однородному заменой

$y(x) = y_1(x) + z(x)$, где $y_1(x)$ — частное решение уравнения Риккати.

Действительно, подставив в (3) $y = y_1(x) + z(x)$, получим

$y_1' + z' = a(x)y_1 + a(x)z(x) + b(x)y_1^2 + 2by_1z + bz^2 + f(x) \Longrightarrow$ так как $y_1(x)$ является частным решением уравнения (3), то

$z' = a(x)z + 2by_1z + bz^2$ или

$z' = A(x)z + bz^2$, где $A(x) = a(x) + 2by_1$

Это уравнение Бернулли. Найдя из этого уравнения $z(x)$, получим

$y(x) = y_1(x) + z(x)$

§ Уравнения в полных дифференциалах.

Опр. Уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \ (x,y) \in G \subset R^2 \quad (1)$$

где $P(x,y),\ Q(x,y) \in C^1(G)$

называется уравнением в полных дифференциалах если существует функция $U(x,y) \in C^1(G)$, называемая потенциалом, такая, что $dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

В курсе математического анализа будет доказано, что потенциал $U(x,y)$ для уравнения ① существует тогда и только тогда когда $\boxed{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}$ для $\forall (x,y) \in G$

Это условие принято называть условием Эйлера – Пуассона

Задача Как найти потенциал $U(x,y)$?

Если найдём $U(x,y)$, то общий интеграл уравнения ① будет иметь вид $U(x,y) = C$, где $C = const$.

Так как $Pdx + Qdy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$,

то $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$

Из 1-ого условия имеем

$U(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$ (*)

Остаётся найти функцию $\varphi(y)$

Для этого воспользуемся 2-ым условием $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$

Тогда $Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx\right]+\varphi'(y)$

$\Rightarrow \varphi'(y)=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)$

Правая часть этого равенства в силу Эйлера–Пуассона не зависит от x. Обозначим её через $g(y)$. Тогда получим $\varphi'(y)=g(y) \Rightarrow \varphi(y)=\int g(y)dy+C$

Подставив $\varphi(y)$ в (*) найдём $U(x,y)$.

§ Интегрирующий множитель

Пусть задано уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \quad (1)$$

и $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда уравнение (1) не является уравнением в полных дифференциалах.

Предположим, что $\exists\ \mu(x,y)\not\equiv const$ такая что для уравнения

$$\underbrace{\mu(x,y)P(x,y)}_{P_1(x,y)}dx+\underbrace{\mu(x,y)Q(x,y)}_{Q_1(x,y)}dy=0 \quad (1')$$

выполняется условие $\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q_1(x,y)}{\partial x}$

То есть уравнение (1') становится уравнением в полных дифференциалах

Тогда такая функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем.

<u>Задача</u> Как найти интегрирующий множитель $\mu(x,y)$?