Математический анализ

Назначение курса

Математический анализ является фундаментальной дисциплиной, составляющей основу математического образования. Курс предназначен для ознакомления студентов с основными понятиями математического анализа и их применением к решению задач. В курсе излагаются традиционные классические методы математического анализа

Цели преподавания дисциплины

Развитие интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению;

Обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования технических и других задач.

Литература

Основная литература:

Л. Д. Кудрявцев. Курс математического анализа, т. 1, 2.- М.: высшая школа, 1981

Г. Н. Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1987.

Н. С. Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисления, т. 1, 2. - М.: Наука, 1984.

Литература

Дополнительная литература:

Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики.-М.: Наука, 1978.

Учебно-методические разработки:

Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина, И. В. Пивоварова. Курс лекций по высшей математике, ч. 1, 2.- Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2001.

Сборник задач по высшей математике. Сост. И. В. Пивоварова, Л. Я. Дубинина, Л. С. Никулина. - Владивосток, изд. ВГУЭиС, 2002.

Пределы функций

Определение функции

Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y=f(x) \in У$,где X и Y -данные числовые множества, и при этом каждому элементу $y \in У$ поставлен в соответствие хотя бы один элемент $x \in X$, то y ***называется функцией от х, определенной на множестве Х.***

Определение предельной <u>точки</u>

δ-окрестностью точки *a* называется интервал (*a*–*δ*,*a*+*δ*), не содержащий точку *a*, т.е. O (*a*, *δ*) = (*a*- *δ*, *a*)∪(*a*, *a* + *δ*).

Пусть функция *f(x)* определена на множестве *X*, кроме быть может точки *a*.

Точку а мы будем называть предельной точкой множества Х,

если в любой δ -окрестности точки *а* содержится бесконечно много точек $x \in X$, то есть $O(a) \cap X \neq \varnothing$ для $\forall\ O(a)$.

Определение предела

Число A называется **предела**м функции $f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in X$, удовлетворяющего условию

$0 < |x - a| < \delta$, следует неравенство

$|f(x) - A| < \varepsilon$.

Другое определение предела

Говорят, что число А является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для $\forall$ $\varepsilon > 0$ существует δ-окрестность точки a $O(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$,где $\delta = \delta(\varepsilon)$, такая, что для $\forall$ $x \in O(a, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

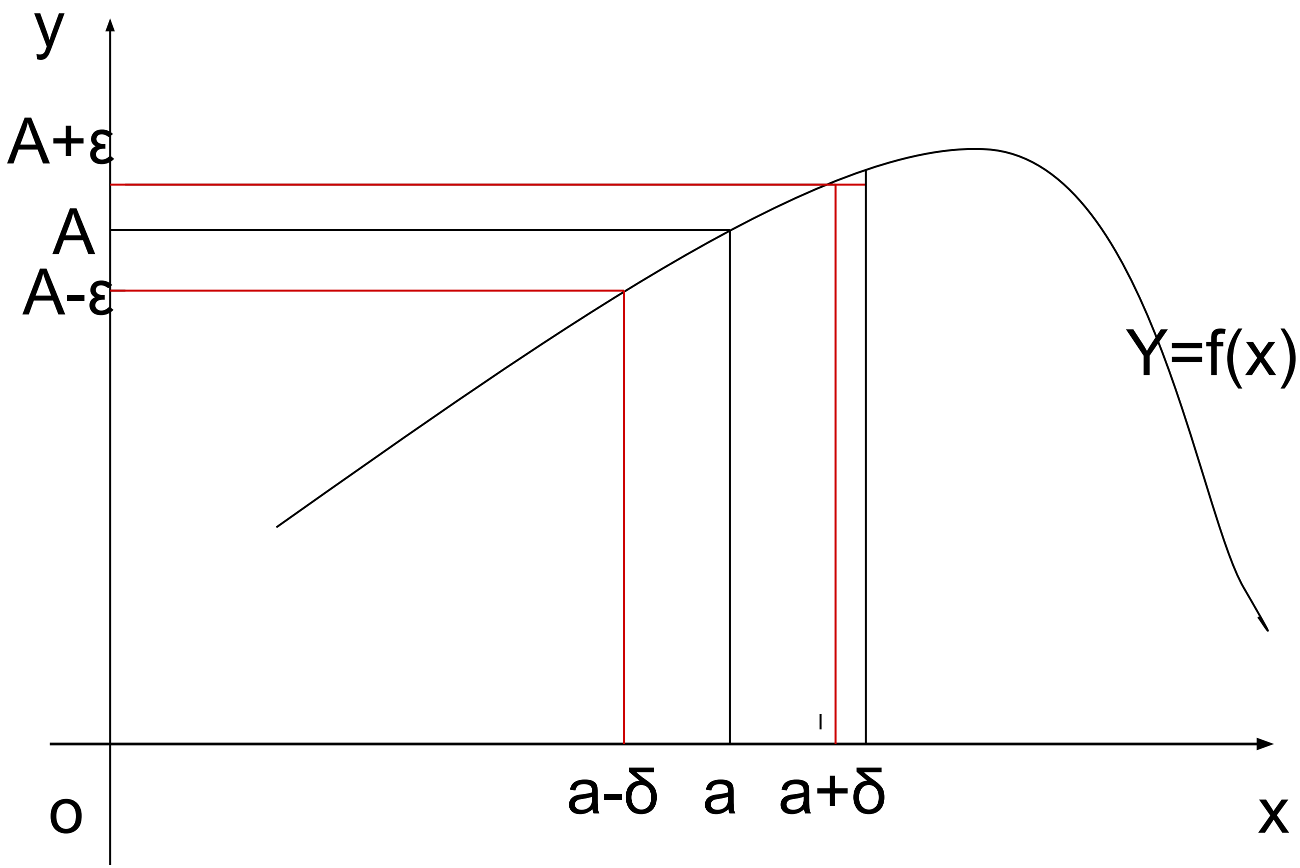
При этом пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

Утверждение $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ эквивалентно следующему:

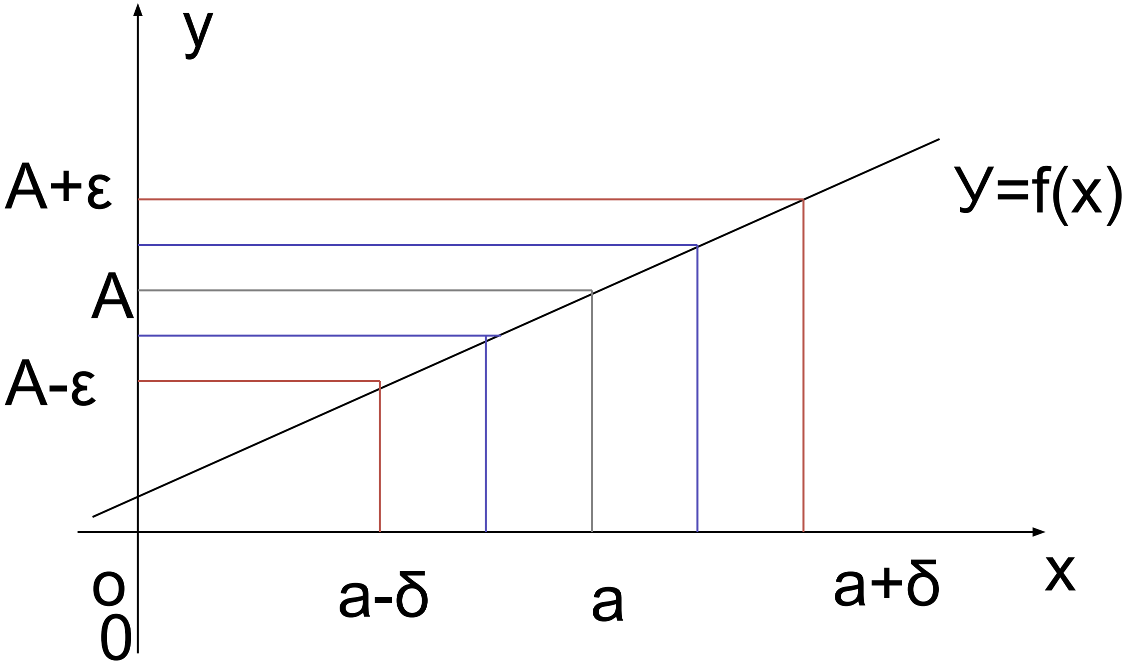
$|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > \Delta$, где $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ зависит от ε и по смыслу определения является достаточно большим положительным числом.

Множество всех точек x, для которых $|x| > \Delta$, очевидно является симметричной окрестностью символа ∞.

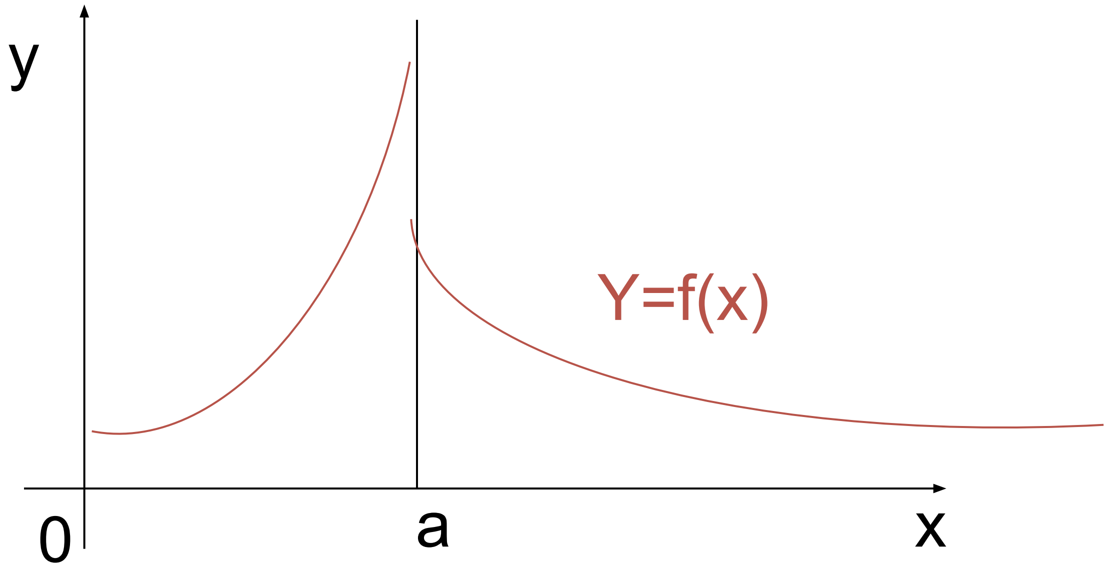
Геометрическая иллюстрация



Приведем еще один рисунок, поясняющий определение предела.



На этом рисунке изображена функция, которая в точке *a* не имеет предела.



Односторонние пределы

Односторонние пределы

Любой интервал (α, *a*), правым концом которого является точка *a*, называется *левой окрестностью* точки *a*.

Аналогично любой интервал (*a*, *β*), левым концом которого является точка *a*, называется ее *правой окрестностью*.

Односторонние пределы

Символически запись $x \to a + 0$ означает, что *x* стремится к *a* справа, оставаясь большим *a*, то есть при $x > a$;

запись $x \to a - 0$

означает, что *x* стремится к *a* слева, то есть при $x < a$.

Односторонние пределы

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ будем называть

левосторонним пределом

функции (при $x \to a$ слева),

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ - это

правосторонний предел функции.

Односторонние пределы

Теорема о существовании предела

Функция $y = f(x)$ имеет $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в том и только том случае, когда существуют и равны друг другу ее левосторонний и правосторонний пределы при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) =$

$= \lim\limits_{x \to a} f(x) = A.$

Бесконечно малые и бесконечно большие

Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \alpha\left(x\right) = 0.$$

Ясно, что тогда $|\alpha(x)| \angle \varepsilon$ для всех $x \in O(a, \delta)$ и $\forall\ \varepsilon > 0$.

Например, функция $f(x) = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$.

Функция *f(x)* называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Это равносильно тому, что каким бы ни было число $M > 0$, найдется такая окрестность О (a, δ), что для всех $x \in$ О (a, δ) $|f(x)| > M$.

Например, $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ – бесконечно большая при $x \to 0$.

Лемма.

Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$,

$$\frac{1}{f(x)} \to 0 \text{ при } x \to a.$$

Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$.

Свойства бесконечно малых.

Теорема 1.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Теорема 2.

Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Теорема 3.

Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции на функцию, ограниченную при $x \to a$, есть бесконечно малая при $x \to a$.

Следствие.

Целая положительная степень бесконечно малой при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$.

$$(\alpha(x))^n$$

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то в силу определения предела функции получаем: $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x \in O(a,\delta)$, что означает, что $f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Тогда, полагая $f(x)-A=\alpha(x)$, получим: $f(x) = A + \alpha(x)$, где

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Таким образом, имеем:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ <=> $f(x) = A + \alpha(x)$,

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Теоремы о пределах

Теорема.

Если функция *f(x)* = c постоянна в некоторой окрестности точки *a*, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Теорема.

Если *f(x)* имеет предел при $x \to a$, то этот предел единствен.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной на данном множестве X*, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in X$.

Если такое число M не существует, то функция $f(x)$ называется *неограниченной*

Лемма. Если функция *f(x)* имеет предел *A* при *x*→*a*, то она ограничена в некоторой окрестности точки *x = a.*

Теорема. *Пусть существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *и пусть M < f(x) < N в некоторой окрестности точки x = a. Тогда M ≤ A ≤ N.*

Положительная функция не может иметь отрицательного предела.

Теорема 1.

Если в точке *a* существуют пределы функций *f(x)* и *g(x)*, то в этой точке существует и предел суммы *f(x)±g(x)*,причём

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

Теорема 2.

Если в точке *a* существуют пределы функций *f (x)* и *g (x)*, то существует и предел произведения $f(x) \cdot g(x)$, причем

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

ВГУЭС

Следствие.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Теорема 3. Если в точке *a* существуют пределы функций *f(x)* и *g (x)* и при этом $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, то существует и предел частного , причем

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

.

Пример

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x-2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}.$$

По теореме о пределе частного

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{x^2-x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}=1$$

Пример

Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$

Преобразуем данную функцию так, чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель $x-1$, на который и разделим далее числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=0.$$

Пример

Найти $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

Преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{x-1}+3$.

$$\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\frac{(\sqrt{x-1}-3)(\sqrt{x-1}+3)}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\frac{x-1-9}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=$$

$$=\frac{x-10}{(x-10)(\sqrt{x-1}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x-1}+3.}$$

$$\lim_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}=\lim_{x\to 10}\frac{1}{\sqrt{x-1}+3}=\frac{1}{6}.$$

Пример

Еще один пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}$.

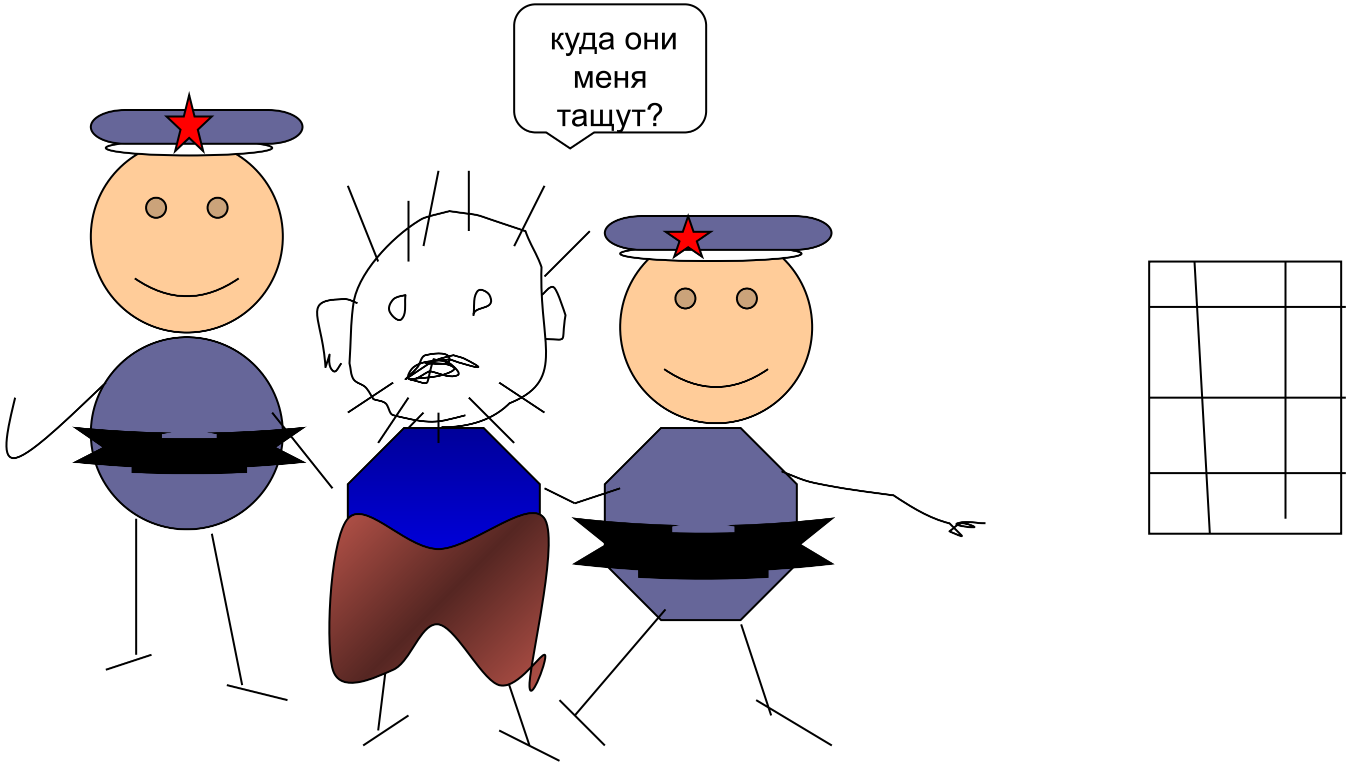
Положим $x = y^{12}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^4-1}{y^3-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\left(y^2-1\right)\left(y^2+1\right)}{\left(y-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=$$

$$=\lim_{y\to 1}\frac{\left(y-1\right)\left(y+1\right)\left(y^2+1\right)}{\left(y-1\right)\left(y^2+y+1\right)}=\lim_{y\to 1}\frac{\left(y+1\right)\left(y^2+1\right)}{y^2+y+1}=\frac{4}{3}.$$

Признаки существования предела

«Теорема о двух милиционерах»



Теорема (***о промежуточной функции***).

Пусть в некоторой окрестности О (*а*) точки *а* функция *f(x)* заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющими одинаковый предел *А* при $x \to a$, то есть

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x) \quad \text{и}$$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A.$$

Тогда функция *f(x)* имеет тот же предел:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Первый замечательный предел

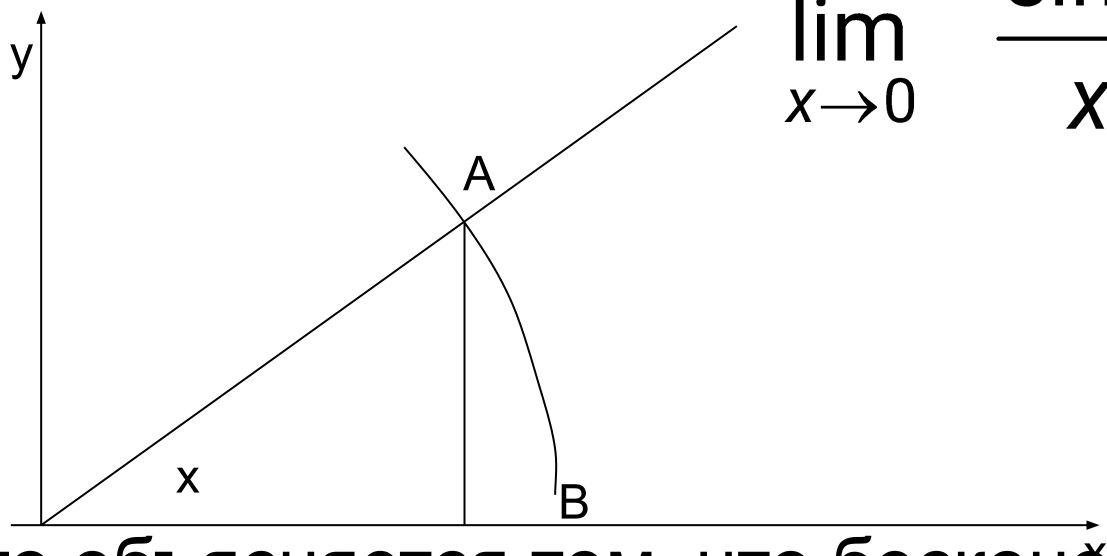
Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот предел называют первым замечательным пределом.

Первый замечательный ***предел***

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Это объясняется тем, что бесконечно малая дуга почти не успевает изменить свое направление, т.е. искривиться.

Второй замечательный предел

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ или}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+a(x))^{\frac{1}{a(x)}}=e$$

Примеры

Вычислим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=5.$$

Примеры

Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$. Полагая $\dfrac{3}{x}=y$, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to0}\left(1+y\right)^{\frac{3}{y}}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left[\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}\right]^{3}=e^{3}.$$

Сравнение бесконечно малых

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одинакового порядка*, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} =$ k, где k ≠0 и конечно.

При этом пишут: $\alpha(x) = O(\beta(x))$

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными* при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \; .$$

Это записывают так: $\alpha(x) \approx \beta(x)$ при $x \to a$.

Бесконечно малая при $x \to a$ функция $\alpha(x)$ называется ***функцией более высокого порядка*** по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \quad .$$

В этом случае пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$.

Приведем некоторые замечательные примеры в дополнение к первому и второму замечательным пределам.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a.$$

Теорема. Если при $x \to a$ бесконечно малые $\varphi(x) \approx \psi(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{f(x)}.$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0.$$