14. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14.1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть на отрезке *[a,b]* задана неотрицательная функция *y=f(x)*.

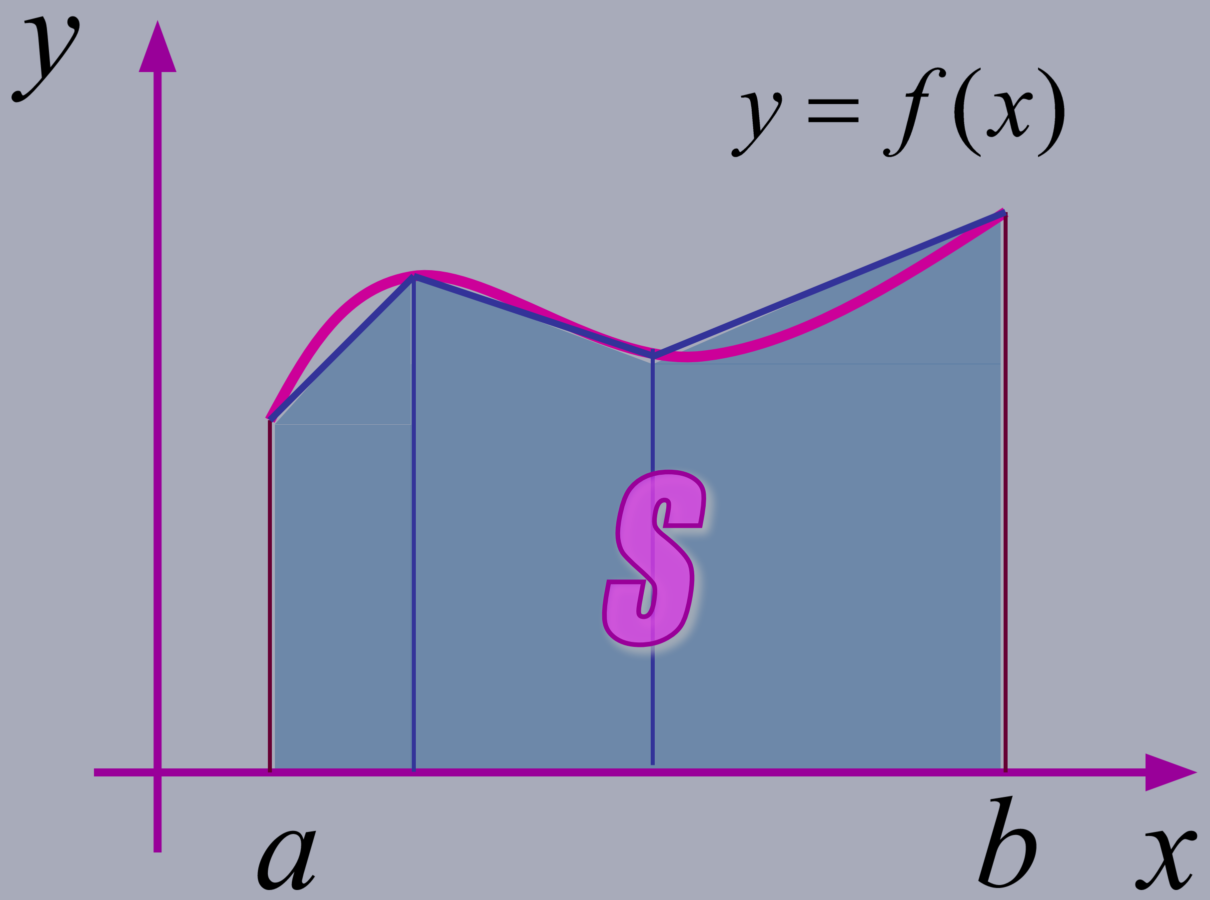
Требуется найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y=f(x)*, прямыми *x=a*, *x=b* и осью абсцисс *y=0*.

Рассмотрим ломаную, расположенную достаточно близко к кривой.

Фигура под ломаной состоит из трапеций и ее площадь равна сумме площадей всех трапеций:

$$S = \sum S_{трап}$$

Причем, площадь под кривой будет приближенно равна площади под ломаной, если ломаная достаточно близко подходит к кривой.



y
$y = f(x)$
S
a
b
x

За искомую площадь под кривой берут предел площади под ломаной при условии, что ломаная неограниченно приближается к кривой.

Разобьем отрезок *[a,b]* на n элементарных отрезков точками x_0, x_1, …x_n .

На каждом из отрезков выберем точку ξ_i , и найдем значение функции в этой точке

$$f(\xi_i)$$

Положим $$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

называют интегральной суммой

для функции y=f(x) на отрезке [a,b] .

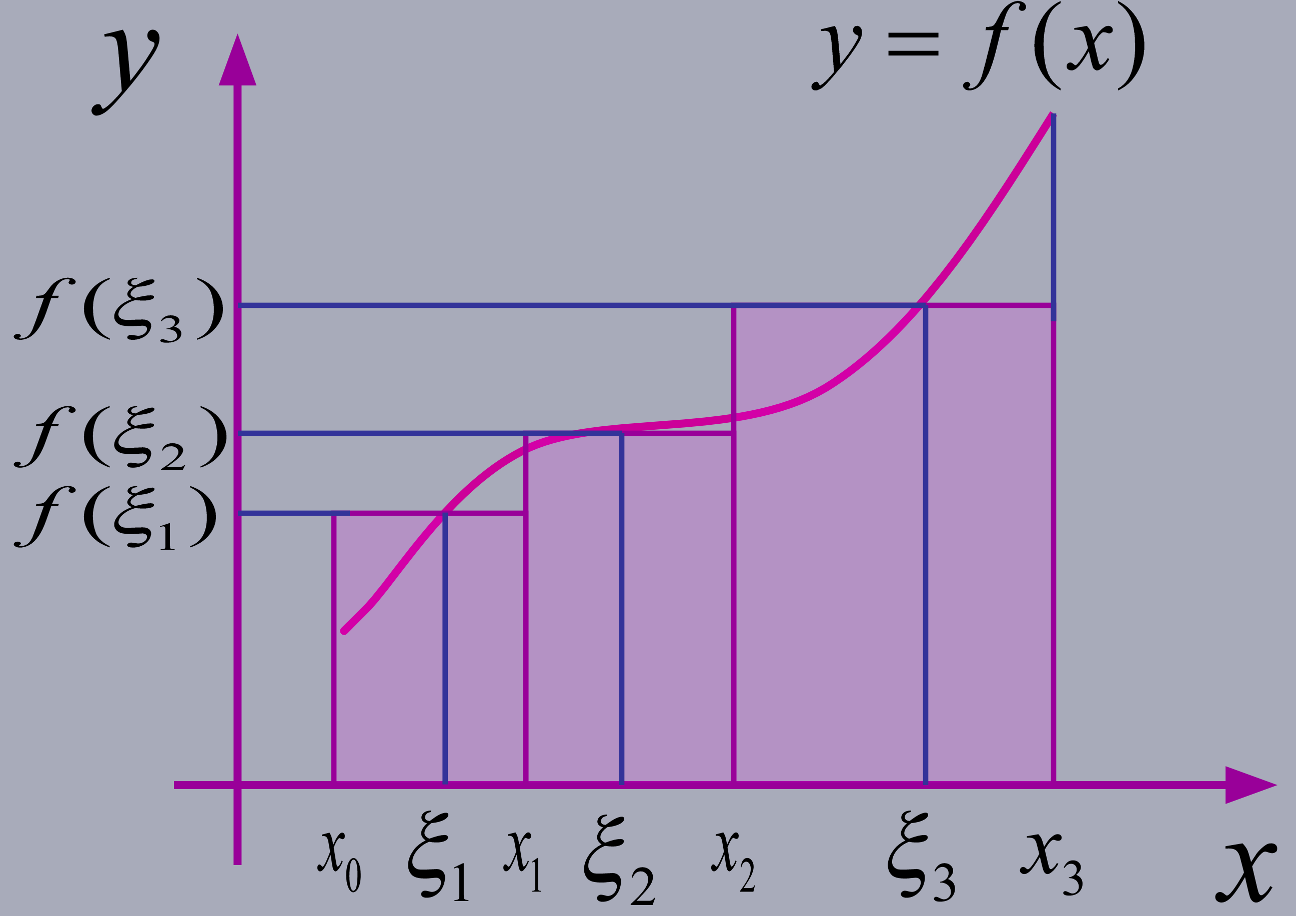
Интегральная сумма зависит от способа разбиения отрезка и выбора точек ξ_i

Каждое отдельное слагаемое в интегральной сумме

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

равно площади S_i прямоугольника со сторонами

$$f(\xi_i) \quad \text{и} \quad \Delta x_i$$



$y = f(x)$
y
$f(\xi_3)$
$f(\xi_2)$
$f(\xi_1)$
x_0
ξ_1
x_1
ξ_2
x_2
ξ_3
x_3
x

Наибольший из отрезков разбиения

$$\left[x_{i-1}, x_i\right]$$

обозначим как

$$\max \Delta x_i$$

Вся интегральная сумма будет равна

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Если существует конечный предел интегральной суммы при $\max \Delta x_i \to 0$ ***не зависящий от способа разбиения отрезка [a,b] и выбора точек*** ξ_i***, то он называется*** ***<u>определенным интегралом</u> от функции y=f(x) на отрезке [a,b].***

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$.

Числа a и b называются нижним и верхним пределом, соответственно.

Неопределенный интеграл $\int f(x)dx$

есть семейство функций, а определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

есть определенное число.

По определению предполагается, что *a* < *b*.

Положим

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

С учетом этого несущественно, какой предел больше или меньше.

Если *a* = *b*, то

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$$

$$2\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

14.2. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРА

Необходимое условие существования определе

Интегрируемая на отрезке [a,b] функция y=f(x) ограничена на этом отрезке.

Достаточное условие существования определе

Если на отрезке [a,b] функция y=f(x) непрерывна, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного и

1

Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2

Определенный интеграл от алгебраической суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций.

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3

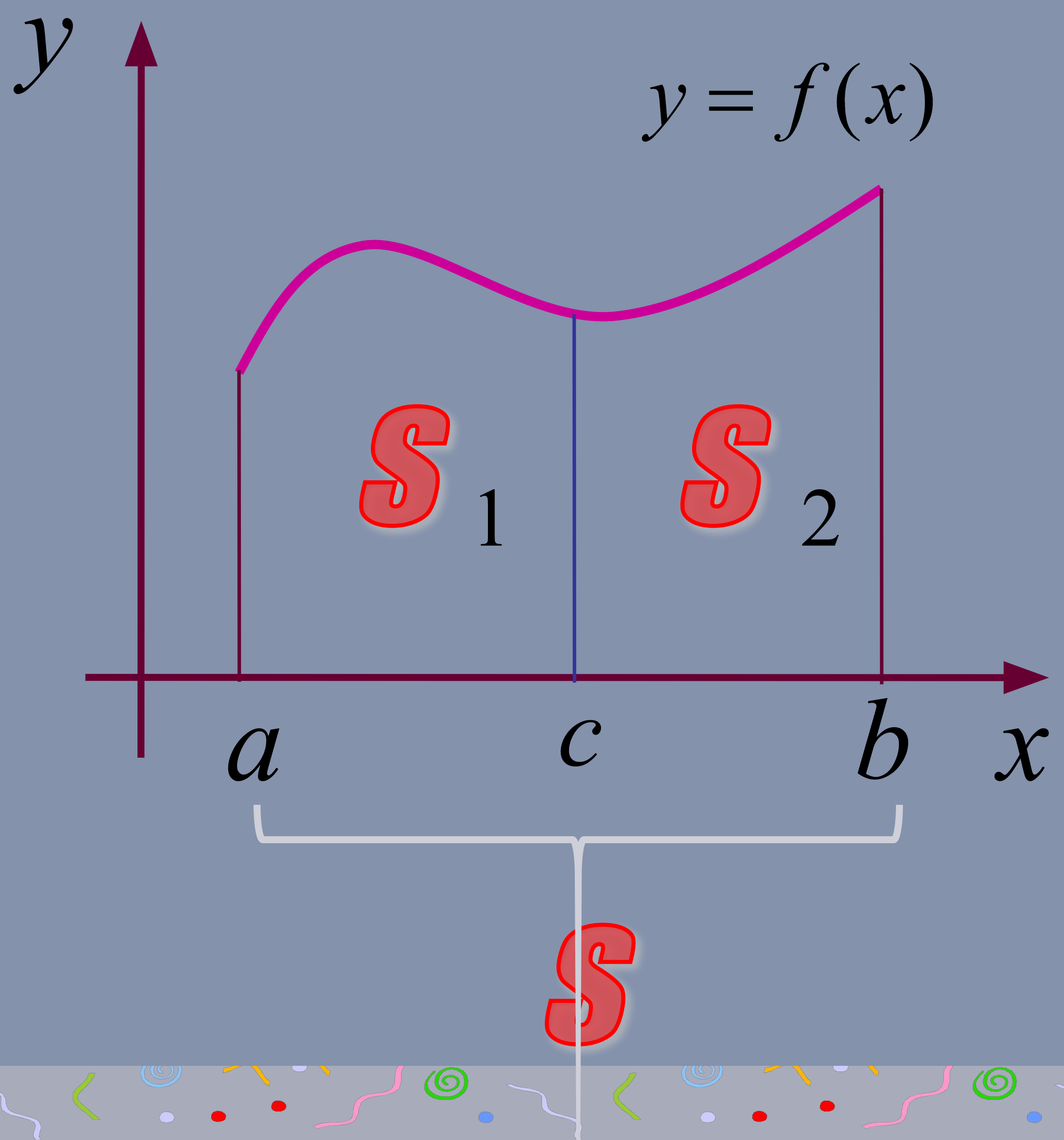
Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов по каждому из участков разбиения.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Геометрически это означает, что если a<c<b и функция y=f(x) неотрицательна на [a,b], то согласно геометрическому смыслу определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = S \quad \int_a^c f(x)dx = S_1 \quad \int_c^b f(x)dx = S_2$$

$$S_1 + S_2 = S$$



y
y = f(x)
S 1
S 2
a
c
b
x
S

4

Если на [a,b], где a<b, $f(x) \le g(x)$

то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Следствие.

Пусть на [a,b], где a<b,

$$m \le f(x) \le M$$

где m и M некоторые числа. Тогда

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

6

Геометрический смысл определенного инт

Если на [a,b] функция y=f(x) неотрицательна, то площадь под этой кривой численно равна определенному интегралу

$$\int_a^b f(x)dx = S$$

14.3. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Теорема.

Если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a,b] и F(x) – любая первообразная этой функции на [a,b], то определенный интеграл от функции f(x) на [a,b] равен приращению первообразной на этом отрезке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Нахождение определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница осуществляется в два этапа:

1. **Находится некоторая первообразная *F(x)* подынтегральной функции *f(x)*.**
2. **Находится приращение первообразной, равное искомому интегралу.**

Примеры.

1

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Решение.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

2

$$\int_1^2 2^{3x-5}\,dx$$

Решение.

$$\int_1^2 2^{3x-5}\,dx = \frac{1}{32}\int_1^2 2^{3x}\,dx = \frac{1}{32}\int_1^2 8^x\,dx = \frac{1}{32}\,\frac{8^x}{\ln 8}\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{8^2}{\ln 8} - \frac{8}{\ln 8}\right) = \frac{7}{12\ln 2}$$

14.4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ФОРМУЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Рассмотрим правило замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Сформулируем две теоремы.

Теорема 1.

Пусть функция φ(t) имеет непрерывную производную на [α,β], где φ(α)=a, φ(β)=b и функция f(x) непрерывна в каждой точке x=φ(t), где

$$t \in [\alpha, \beta]$$

Тогда справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt$$

Как и в случае неопределенного интеграла замена переменной во многих случаях позволяет свести интеграл к табличному.

В этом случае не обязательно возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно найти пределы интегрирования новой переменной как решения уравнений

$$\varphi(t) = a \quad \varphi(t) = b$$

На практике, выполняя замену переменной, часто указывают выражение

$$t=\varphi(x)$$

новой переменной через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной t упрощается:

$$\varphi(a)=\alpha \quad \varphi(b)=\beta$$

Пример.

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx$$

Решение :

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx = \left|\begin{array}{c} 2-x^2=t \\ dt=-2xdx \\ x=0, \quad t=2 \\ x=1, \quad t=1 \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6}\Bigg|_2^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{6}-\frac{1}{6}\right) = \frac{21}{4}$$

Теорема 2.

Пусть функции u=u(x) и v=v(x) имеют непрерывные производные на [α,β], тогда

$$\int_a^b u\,dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$$

где $$(u\cdot v)\Big|_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a)$$

Пример .

Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

Решение :

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left| \begin{matrix} \ln(1+x) = u \\ du = \dfrac{1}{1+x}\,dx \\ dv = dx \\ v = x \end{matrix} \right| = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx =$$

$$= \ln 2 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 dx = \ln 2 + \ln|1+x|\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1$$