Лекция 7
Тема: *"Функции нескольких переменных"*

Основные понятия функции нескольких переменных.

Определение. ***Функцией двух переменных*** называется правило, которое каждой паре действительных чисел $(x, y) \in D$ ставит в соответствие единственное число $z \in E$.

Переменные x и y называются ***независимыми переменными*** или аргументами, переменная z – ***зависимой переменной*** или ***функцией***, множество D называется ***областью определения*** $D(f)$, множество E называется областью изменения или ***множеством значений функции*** $E(f)$.

Обозначения функции двух переменных: $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$.

Значение функции для фиксированного значения аргументов x_0, y_0: $z_0 = f(x_0, y_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$ или $z_0 = z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.

Определение. ***Графиком функции*** двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z), аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве.

Основными способами задания функции двух переменных являются аналитический (функция задается посредством формул в явном или неявном виде) и табличный.

Определение. ***Функцией*** n ***переменных*** называется правило, которое каждому набору действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ ставит в соответствие единственное число $z \in E$.

Функция n переменных обозначается $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Предел и непрерывность функции двух переменных.

Определение. δ***-окрестностью точки*** $P_0(x_0, y_0)$ называется внутренняя часть круга радиуса δ с центром в этой точке: $\left\{P(x,y) : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}$.

Любая точка P этой δ-окрестности находится от точки P_0 на расстоянии меньшем δ.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ за исключением быть может самой точки P_0.

Определение. Число A называется ***пределом функции двух переменных*** или ***двойным пределом функции*** $z = f(x, y)$ при $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$, если для любого числа ε найдется такая δ-окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$, что для любой точки $P(x, y)$ этой окрестности, за исключением точки P_0, будет выполнено неравенство:

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \text{ или } \lim_{P \to P_0} f(P) = A.$$

Из определений, следует что

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} f(x,y) = A},$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ – расстояние между точками P и P_0.

Пример. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}$.

Решение: Так как $x_0=0,\ y_0=0$, то $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.
Таким образом,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+9}-3} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+9}+3)}{\rho^2+9-9} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+9}+3)}{\rho^2+9-9} = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\rho^2+9}+3) = 6.$$

В данном примере функция $\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}$ не определена в точке $P_0(0;0)$, но имеет предел при $P\to P_0$.

Заметим, что двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$ при одновременном стремлении обоих аргументов не обязательно совпадает с повторными пределами

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x;y)\right) \qquad \text{и} \qquad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x;y)\right),$$

которые не являются новыми понятиями, а вычисляются последовательно как обычные пределы функции одной переменной.

Имеет место теорема, которая позволяет заменить двойной предел функции двух переменных повторным пределом при достаточно широких предположениях.

Теорема. Пусть существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)$. Предположим, что $\forall y\in\delta$-окрестности точки y_0, $y\neq y_0$, существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$, тогда существует повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x;y)$ и он совпадает с двойным пределом

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x;y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y).$$

Аналогично, если $\forall x\in\delta$-окрестности x_0, $x\neq x_0$, существует $\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$, то существует и повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x;y)$ и

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x;y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y).$$

Пример. Вычислить повторные пределы в условиях предыдущего примера.

Решение:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{y^2+9}-3}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2(\sqrt{y^2+9}+3)}{y^2+9-9}=\lim_{y\to 0}(\sqrt{y^2+9}+3)=6.$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}-3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2+9-9}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+9}+3)=6.$$

Определение предела естественным образом распространяется на случай функции n переменных.

Определение. Функция n переменных $u = f(P)$ называется ***непрерывной в точке*** P_0, если функция определена в этой точке и в некоторой ее окрестности и

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Точка P_0, в которой функция $u = f(P)$ непрерывна, называется ***точкой непрерывности*** этой функции.

Частные производные 1-го порядка.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Зафиксируем значение одного из аргументов, например y, положив $y = y_0$.

Тогда функция $f(x, y_0)$ есть функция одной переменной x.

Пусть она имеет производную в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Эта производная называется ***частной производной*** (или частной производной первого порядка) функции $z = f(x, y)$ по x в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $f'_x(x_0, y_0)$.

Разность $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется ***частным приращением*** по x функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) .$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции $z = f(x, y)$ по y и частная производная по y в точке $P_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) ,$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Частные производные обозначаются следующим образом:

$$f'_x(x, y),\ f'_y(x, y) \text{ или } z'_x(x, y),\ z'_y(x, y) \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Замечание. **Геометрический смысл частной производной** $\frac{\partial z}{\partial x}$: значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ равно тангенсу угла, составленного с осью Ox касательной, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ к линии пересечения поверхности $z=f(x;y)$ и плоскости $y=y_0$.

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Замечание. Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных.
Вследствие этого все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных функции одной переменной, сохраняются для частных производных функции нескольких переменных. Следует лишь помнить, что во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какому-либо аргументу все остальные аргументы считаются постоянными.

Пример. Найти частные производные первого порядка функции $z=\sqrt{x^2-y^2}$ в точке $P_0(5;3)$.

Решение: $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}=\left.\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}\right|_{P_0}=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right|_{P_0}=\frac{5}{\sqrt{5^2-3^2}}=\frac{5}{4};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}=\left.\frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}\right|_{P_0}=-\left.\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right|_{P_0}=-\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}=-\frac{3}{4}.$$

Частные производные высших порядков.

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных.

Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются ***вторыми частными производными*** (или ***частными производными второго порядка***) исходной функции.

Например, функция $z = f(x; y)$ двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x;y); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y).$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x;y); \qquad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x;y).$$

Функция $u = f(x; y; z)$ трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x;y;z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x;y;z); \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = f''_{xz}(x;y;z)$$

и т.д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: частной производной n-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной (n-1)-го порядка той же функции.

Например, частная производная третьего порядка $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функции $z = f(x; y)$ есть

частная производная первого порядка по y от частной производной второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}: \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется ***смешанной частной производной***.

Например, частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ являются смешанными частными производными функции двух переменных $z = f(x; y)$.

Пример. Найти смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3$.

Решение: Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(2xy^3\right)_y' = 6xy^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(3x^2y^2\right)_x' = 6xy^2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Смешанные частные производные одного порядка одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

В частности для функции двух переменных $z = f(x; y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Полный дифференциал функции.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$.

Предположим, что ее аргументы x и y получают приращения Δx и Δy.

Тогда функция $z = f(x, y)$ получает полное приращение Δz, которое определяется следующей формулой: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Геометрически полное приращение функции Δz равно приращению аппликаты графика функции $z = f(x, y)$ при переходе из точки $P(x, y)$ в точку $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

Определение. ***Полным дифференциалом функции двух переменных*** $z = f(x, y)$ называется сумма ее частных дифференциалов по x и по y:

$$\boxed{dz = f_x'(x, y)dx + f_y'(x, y)dy}.$$

Определение. Функция называется ***дифференцируемой в этой точке*** $P(x, y)$, если приращение функции Δz представляется в виде суммы дифференциала dz и бесконечно малой $\omega(\Delta x, \Delta y)$ более высокого порядка, чем расстояние $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ между точками $P(x, y)$ и $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$:

$$\boxed{\Delta z = dz + \omega(\Delta x, \Delta y)}, \text{ где } \lim_{\rho \to 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0.$$

В этом случае, видно, что полный дифференциал является **главной частью** приращения функции Δz, **линейной относительно приращений аргументов** $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$.

Если функция $z = f(x, y)$ в точке $P(x, y)$ дифференцируема, то она имеет в этой точке частные производные $f_x'(x, y)$ и $f_y'(x, y)$. Однако, обратное утверждение неверно.

Теорема. Если частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ существуют в некоторой окрестности точки $P(x, y)$ и непрерывны в этой точке, то функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P(x, y)$.

Все сказанное легко распространяется на функции трех и большего числа переменных.

Например, для дифференцируемой функции трех переменных $u = f(x; y; z)$ полное приращение Δu выражается формулой:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \omega(\Delta x; \Delta y; \Delta z)$$

при условии $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega}{\rho} = 0$ ($\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$), а ее полный дифференциал имеет вид

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.

Полный дифференциал функции нескольких переменных можно использовать для приближенных вычислений.

Так как $\Delta z = dz + \omega(\Delta x, \Delta y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy + \omega(\Delta x, \Delta y)$, где $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{\omega(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0$ и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, то

$$\Delta z \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y,$$

т.е. приращение функции можно приближенно заменить ее полным дифференциалом.
Если $z = f(x, y)$, то $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.
Тогда, получаем:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f_x'(x, y)\Delta x + f_y'(x, y)\Delta y.$$

Откуда

$$\boxed{\Delta f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y}.$$

Аналогичные формулы можно вывести для функции n переменных.

Пример. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала

$$\frac{1}{\sqrt{2{,}95^2+4{,}01^2}}.$$

Решение: Рассмотрим функцию $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Найдем частные производные:

$$z'_x=-\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}; \qquad z'_y=-\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}.$$

Положим $x=3$; $\Delta x=-0{,}05$; $y=4$; $\Delta y=0{,}01$.

Тогда $\dfrac{1}{\sqrt{2{,}95^2+4{,}01^2}}\approx\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5\sqrt{5}}\cdot 0{,}05-\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\cdot 0{,}01\approx 0{,}21.$

Если $z=f(x,y)$ имеет частные производные второго порядка, то можно найти дифференциал от полного дифференциала, называемый ***дифференциалом второго порядка***: $d(dz)=d^2z$.

$$d^2z=d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dydx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Таким образом,

$$\boxed{d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}.$$

Дифференцирование сложной и неявной функций.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.
Таким образом, функция z является сложной функцией двух независимых переменных u и v .

Можно показать, что частные производные сложной функции $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ находятся по формулам:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}, \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}.$$

Рассмотрим частный случай: $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$.
Таким образом, сложная функция z является функцией одной переменной x и

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

поэтому справедлива формула:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}} \; .$$

Замечание. Полный дифференциал dz не меняет своей формы: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, когда x и y являются функциями новых переменных.

Это свойство полного дифференциала называется ***инвариантностью формы***.
Дифференциалы более высоких порядков таким свойством не обладают.

Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$, в котором $F(x, y)$ функция двух переменных.

Справедлива следующая теорема.

Теорема (о неявной функции). Если функция $F(x, y)$ и ее частные производные $F_x'(x, y)$ и $F_y'(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$, в которой $F(x_0, y_0) = 0$, а при этом $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y)$ определяет в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ единственную неявную функцию $y = y(x)$, непрерывную и дифференцируемую в некотором интервале, содержащем точку x_0, причем $y(x_0) = y_0$.

Производную неявной функции $y = y(x)$ можно найти по формуле:

$$\boxed{y_x' = -\frac{F_x'}{F_y'}}.$$

Производная по направлению. Градиент скалярного поля.

Определение. Если каждой точке P некоторой области D трехмерного пространства соответствует число u, определяемое функцией $u = f(P) = f(x; y; z)$, то говорят, что в области D задано трехмерное ***скалярное поле***.

Если поле определяется функцией двух переменных $z = f(x; y)$, то оно называется двумерным или плоским скалярным полем.

Пусть в области D задана дифференцируемая функция $u = f(x; y; z)$.

Рассмотрим точку $P(x,y,z)\in D$ и некоторое направление $\vec{l}$, задаваемое единичным вектором $\vec{l}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$, где α,β,γ – углы вектора $\vec{l}$ с осями координат. Пусть $P_1(x+\Delta x;\, y+\Delta y;\, z+\Delta z)\in D$ - какая-нибудь другая точка луча l.

Разность значений функции u в точках P_1 и P назовем приращением этой функции в направлении $\vec{l}$ и обозначим через $\Delta_l u$.

Тогда $\Delta_l u = f(x+\Delta x;\, y+\Delta y;\, z+\Delta z) - f(x;\, y;\, z)$.
Обозначим через Δl расстояние между точками P_1 и P: $\Delta l = PP_1$.

Определение. ***Производной функции*** $u=f(x;y;z)$ ***в точке*** P ***по направлению*** $\vec{l}$ называется предел $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Производная функции u по направлению $\vec{l}$ обозначается символом $\dfrac{\partial u}{\partial l}$.

Таким образом, $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Заметим, что если производная функции u в данной точке $P(x;y;z)$ по данному направлению $\vec{l}$ положительна, то функция u в этом направлении возрастает; если же $\dfrac{\partial u}{\partial l}<0$, то функция u в этом направлении убывает.

Можно сказать, что производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ дает скорость изменения функции u в этом направлении.

Можно показать, что производная по направлению находится по формуле:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = f'_x(x;y;z)\cos\alpha + f'_y(x;y;z)\cos\beta + f'_z(x;y;z)\cos\gamma}.$$

Отсюда следует, что если вектор $\vec{l}$ совпадает с одним из ортов $\vec{i}$ или $\vec{j}$, то производная z по направлению $\vec{l}$ совпадает с соответствующей частной производной этой функции.

Пример. Найти производную функции $z = x^2 + 2y^2$ в точке $M\,(1;1)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 60°.

Решение: Найдем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \cos(90° - 60°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Найдем значения частных производных в точке $M(1;1)$: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.2x\right|_{x=1} = 2;$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.4y\right|_{y=1} = 4.$$

Тогда производная по направлению:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \cos\beta = 2\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3} \approx 4{,}46.$$

Определение. ***Градиентом*** в точке $P(x;\ y;\ z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = f(x;\ y;\ z)$ или просто градиентом функции называется вектор, равный

$$f'_x(x;y;z)\vec{i} + f'_y(x;y;z)\vec{j} + f'_z(x;y;z)\vec{k}.$$

Градиент функции $u = f(x;\ y;\ z)$ обозначается одним из символов $grad\ f(x;\ y;\ z)$, $grad\ f(P)$, $grad\ u$.

Следовательно, по определению

$$grad\ f(x;y;z) = f'_x(x;y;z)\vec{i} + f'_y(x;y;z)\vec{j} + f'_z(x;y;z)\vec{k},$$

или

$$\boxed{grad\ f(x;y;z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}}.$$

Пример. Найти градиент функции $z = x^2 + 2y^2$ в точке $M(1;1)$.

Решение: $grad\ z\big|_M = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_M ; \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_M\right) = (2;4)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Проекция вектора $grad\ u$ на единичный вектор $\vec{l} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ равна производной функции u по направлению l:

$$np_l grad\ u = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Обозначим через угол φ – угол между единичным вектором $\vec{l}$ и $grad\ u$.
Тогда $пр_l grad\ u = |grad\ u| \cos\varphi$.
Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\ u| \cos\varphi .$$

Если направление векторов $\vec{l}$ и $grad\ u$ совпадают ($\varphi = 0$), то производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ имеет, очевидно, наибольшее значение, равное $|grad\ u|$.

Геометрический смысл градиента: $grad\ u$ есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.

Спасибо за внимание