Аэрогидродинамика

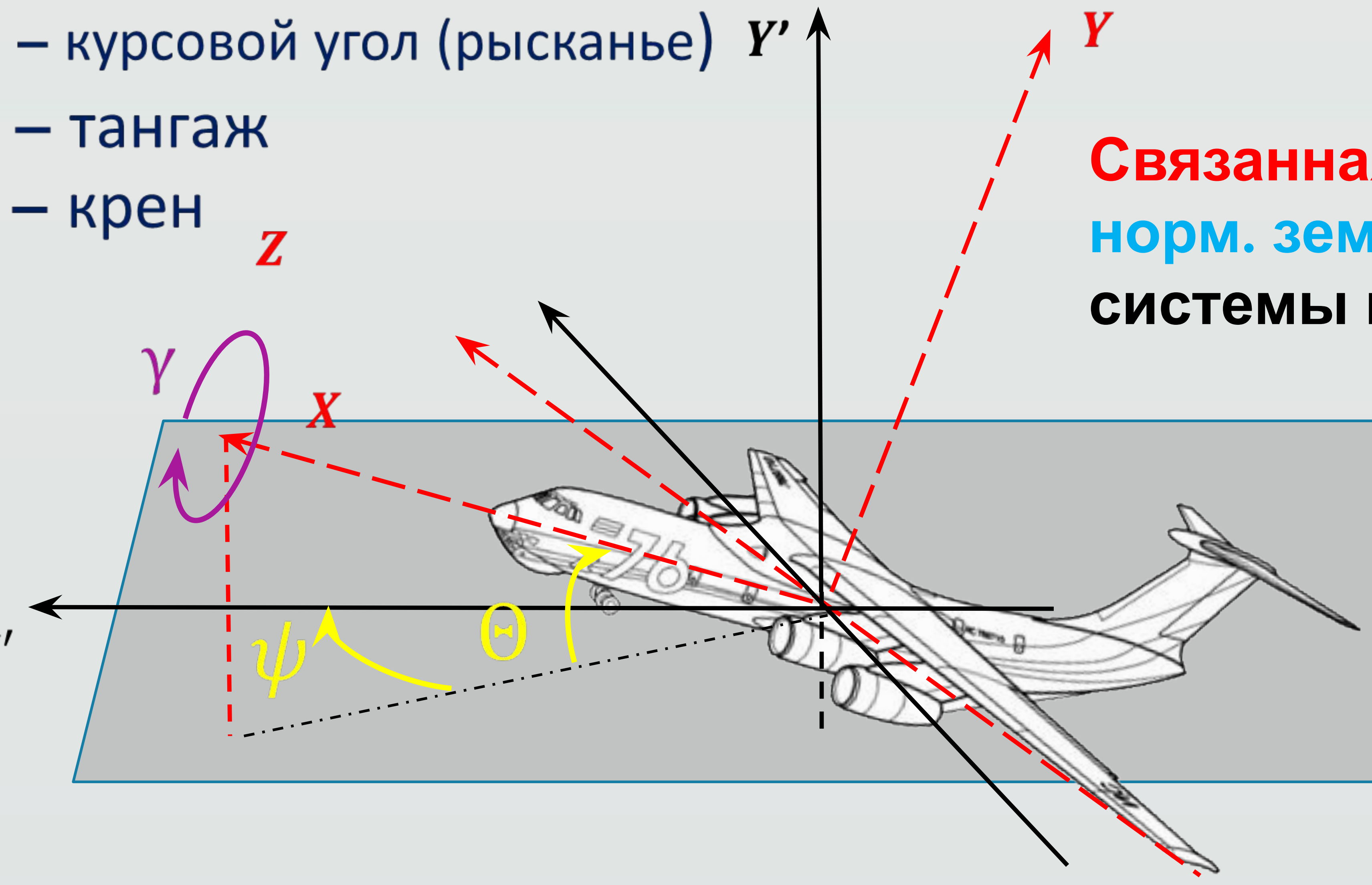
Лекция 2
Законы Ньютона
для жидкости и газа

ψ – курсовой угол (рыскание)

Θ – тангаж

γ – крен

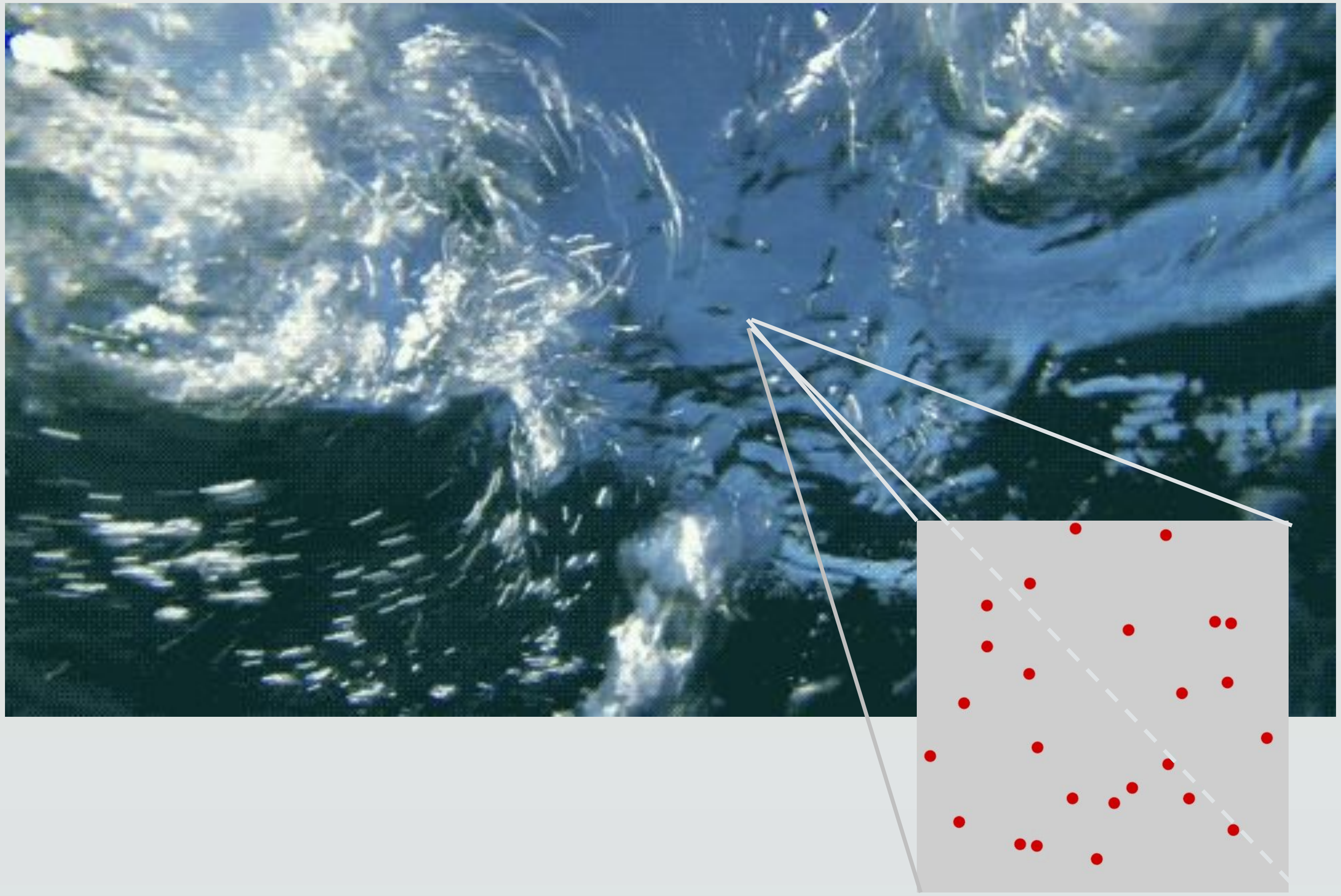
Связанная (X,Y,Z) и **норм. земная (X'Y'Z')** **системы координат**

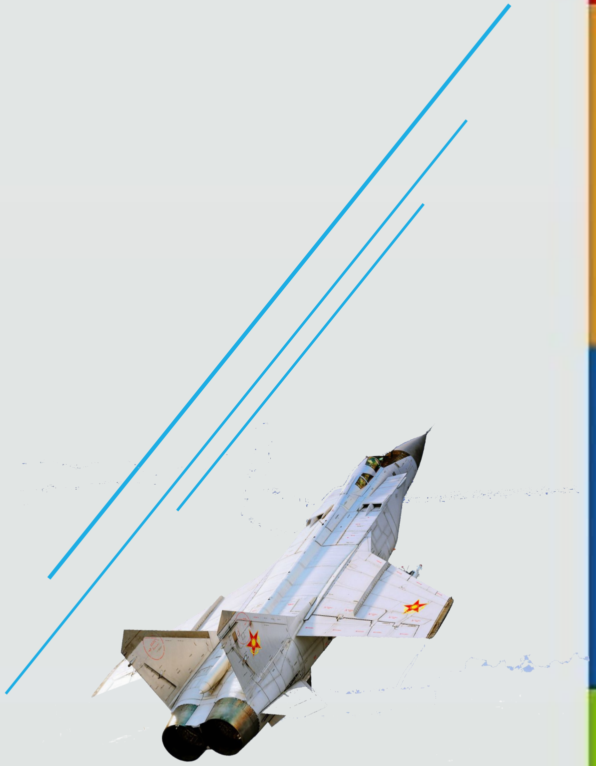


X – вдоль оси самолета **(главной оси момента инерции)**

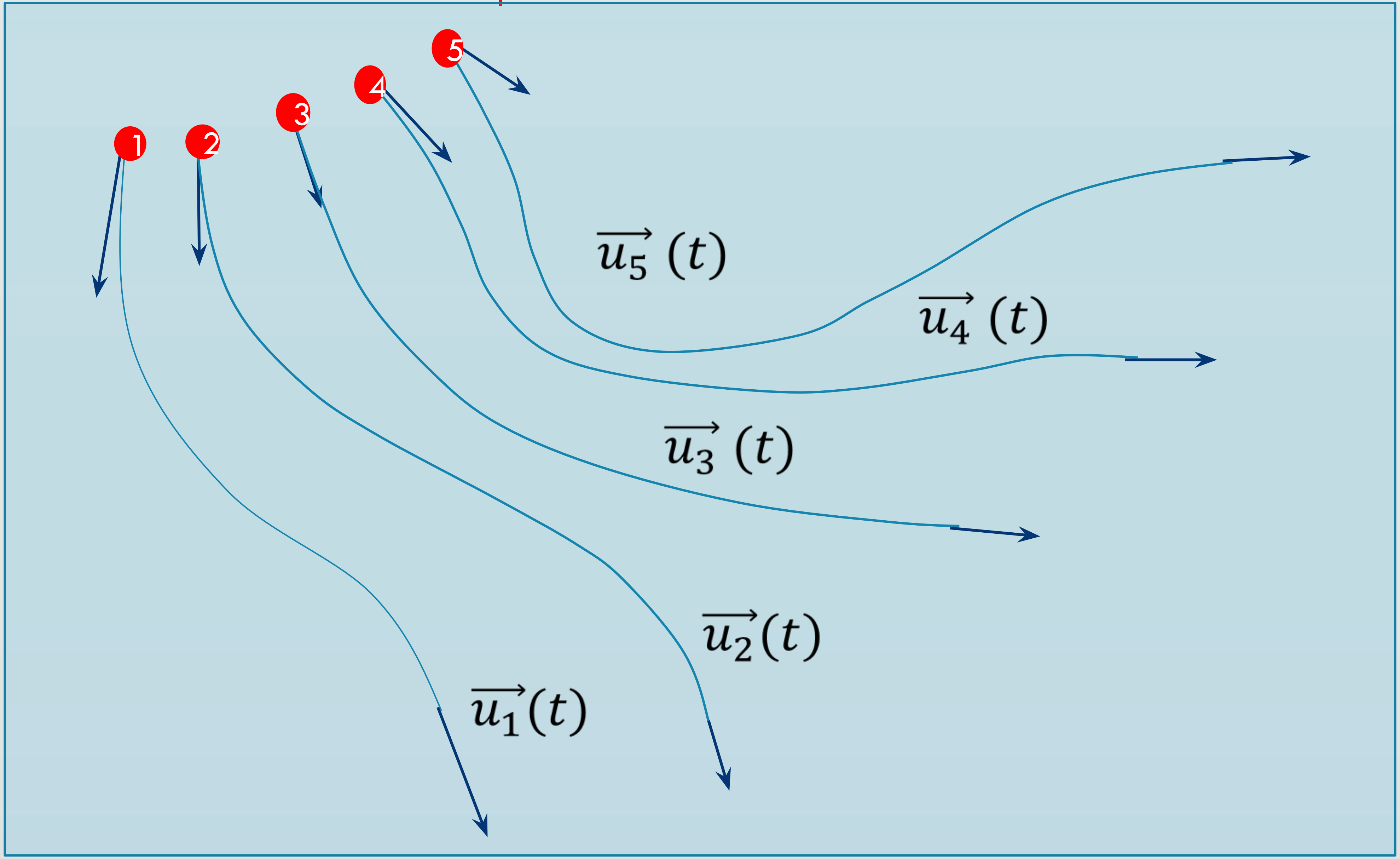
Чем определяются силы, действующие на летательный аппарат?

Непрерывная среда

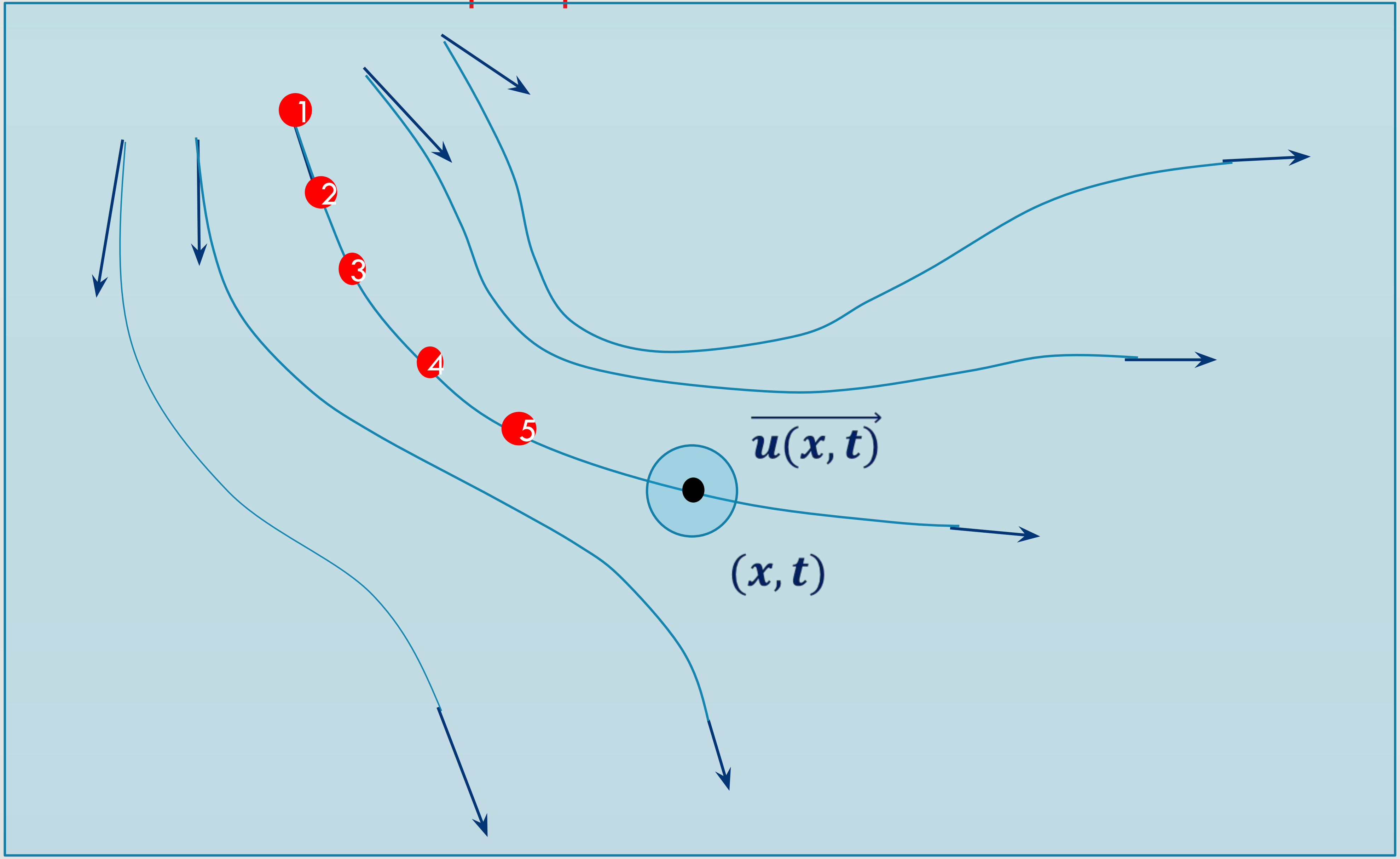




Лагранжев подход: следим за частицами



Эйлеров подход: следим за точками пространсмтва



Законы Ньютона для жидкости и газа

Уравнения движения для элемента среды

$$dm\frac{d\vec{u}}{dt} = d\vec{F}, \quad i = 1,\ldots\ ,N$$

$$\boxed{\rho\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}}$$

$$\begin{cases} dm = \rho dV \\ d\vec{F} = \vec{F}\,dV \end{cases}$$

ρ(x,y,z) – плотность среды

$\vec{F}$ - объемная сила

Законы Ньютона для жидкости и газа

Уравнения движения для элемента среды

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{u} = (u, v, w),$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}(x,y,z,t)}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

Законы Ньютона для идеальных жидкостей и газов

Уравнения движения для элемента среды

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}$$ – объемная сила

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g_z$$

Закон сохранения массы жидкости и газа

Сколько массы газа (или жидкости) втекло в объем, столько и вытекло!

$$dm = \rho dV$$

$$\frac{d(dm)}{dt} = \frac{d(\rho dV)}{dt} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$div(\rho \vec{u}) = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) = 0$$

Несжимаемая среда

Среда, в которой $\rho = const$, называется <u>несжимаемой</u>

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

$$\boxed{div(\mathbf{u}) = 0}$$

Для плоского течения *w=0*

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

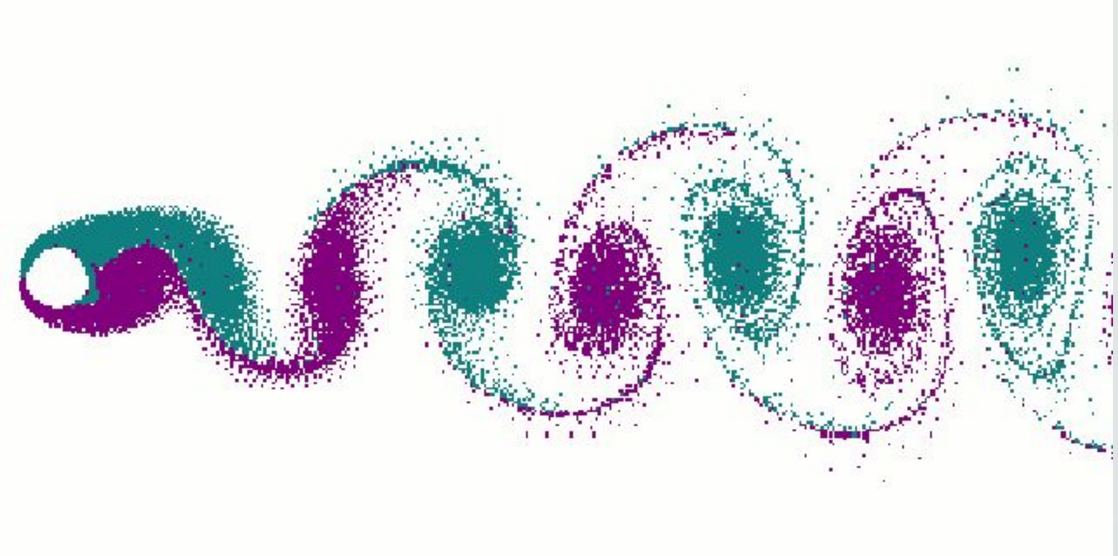
Вихревое течение

Течение, для которого rot $\vec{u} = \vec{\Omega} \neq 0$, называется <u>вихревым, а векторное поле</u> rot $\vec{u} = \vec{\Omega}$ <u>называется завихренностью</u>

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для плоского течения *w=0*

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

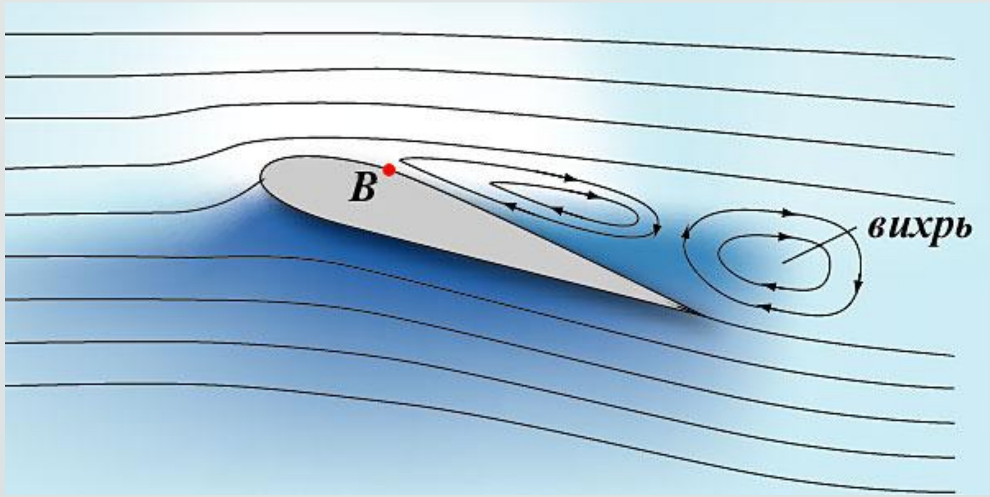


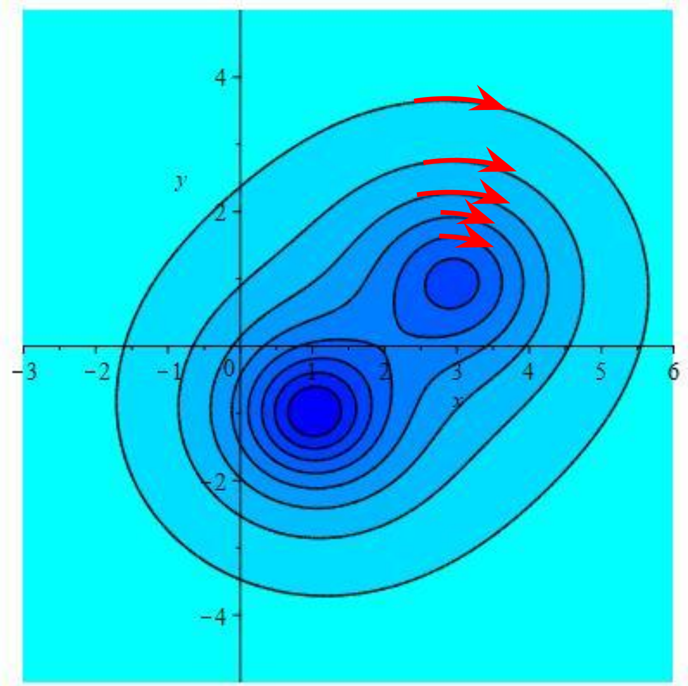
Функция тока

Функцией тока называется функция ψ, через которую выражаются компоненты скорости *u* и *v* для плоского течения по формулам:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 0$$

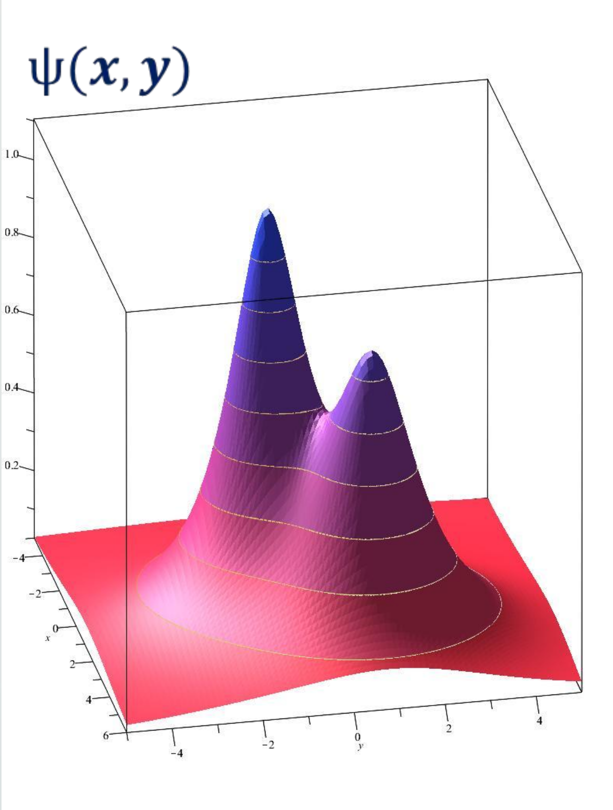




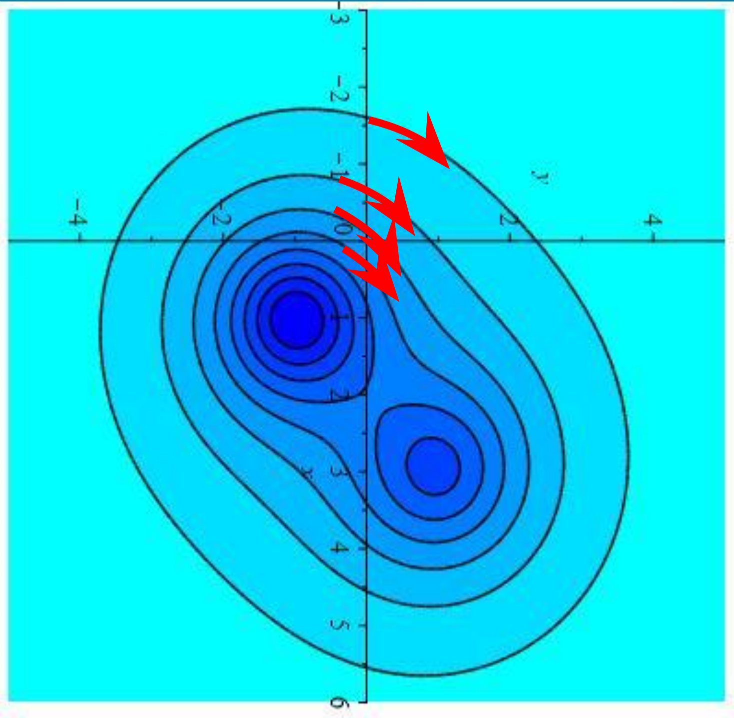
Смысл функции тока

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Изолинии функции тока ψ=cosnt являются линиями тока



Линии тока



Уравнения для функции тока

Функцией тока называется функция ψ, через которую выражаются компоненты скорости u и v для плоского течения по формулам:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}uv = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}uv + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

Уравнения для функции тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + \frac{p}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(uv + \frac{\partial}{\partial t}\psi\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uv - \frac{\partial}{\partial t}\psi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 + \frac{p}{\rho}\right) = 0$$

$$u^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad uv + \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad uv - \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

Уравнения для функции тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u^2 - v^2 = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}, \quad 2uv = -\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$u^2 + v^2 + 2\frac{p}{\rho} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad 2\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}, \quad 2\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{p}{\rho} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad 2\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Уравнения для функции тока

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$h = H + \frac{\partial \ln \psi}{\partial y}, \quad g = G + \frac{\partial \ln \psi}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}, \quad 2\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{p}{\rho} = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}, \quad 2\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

Потенциальное течение

Течение называется потенциальным, если компоненты скорости течения вычисляются по формулам:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Функция φ называется потенциалом течения

Для несжимаемой среды

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

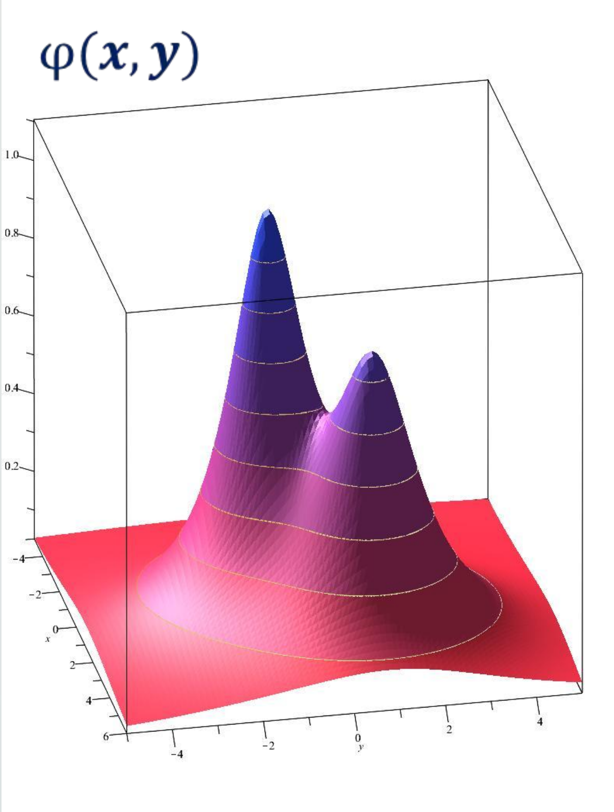
Потенциальное течение – бизвихревое:

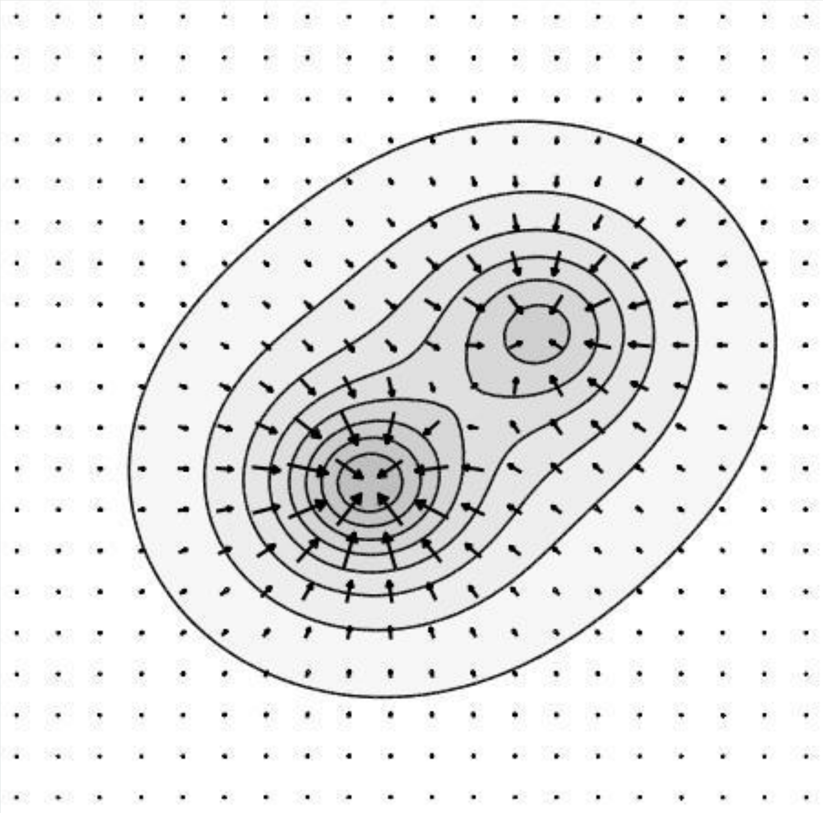
$$rot(\mathbf{u}) = 0$$

Потенциальное течение

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Силовые тока $\nabla\varphi$ являются линиями тока

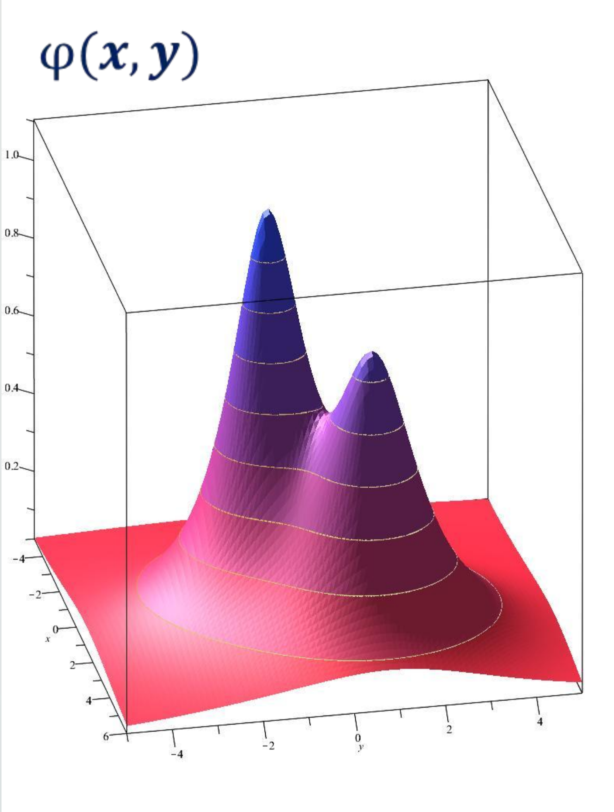


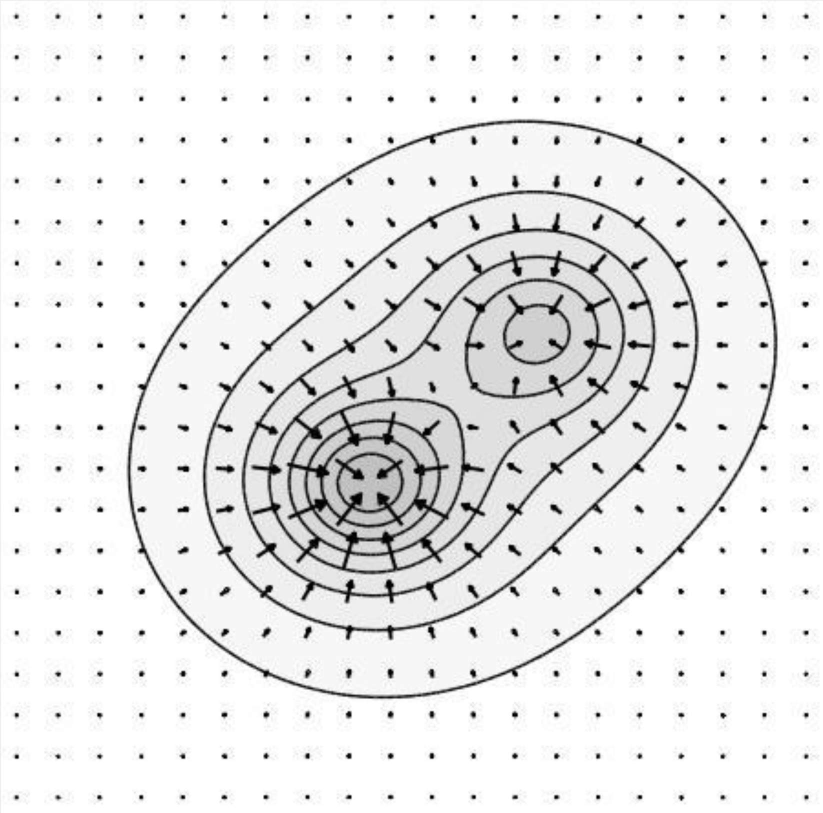


Потенциальное течение

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

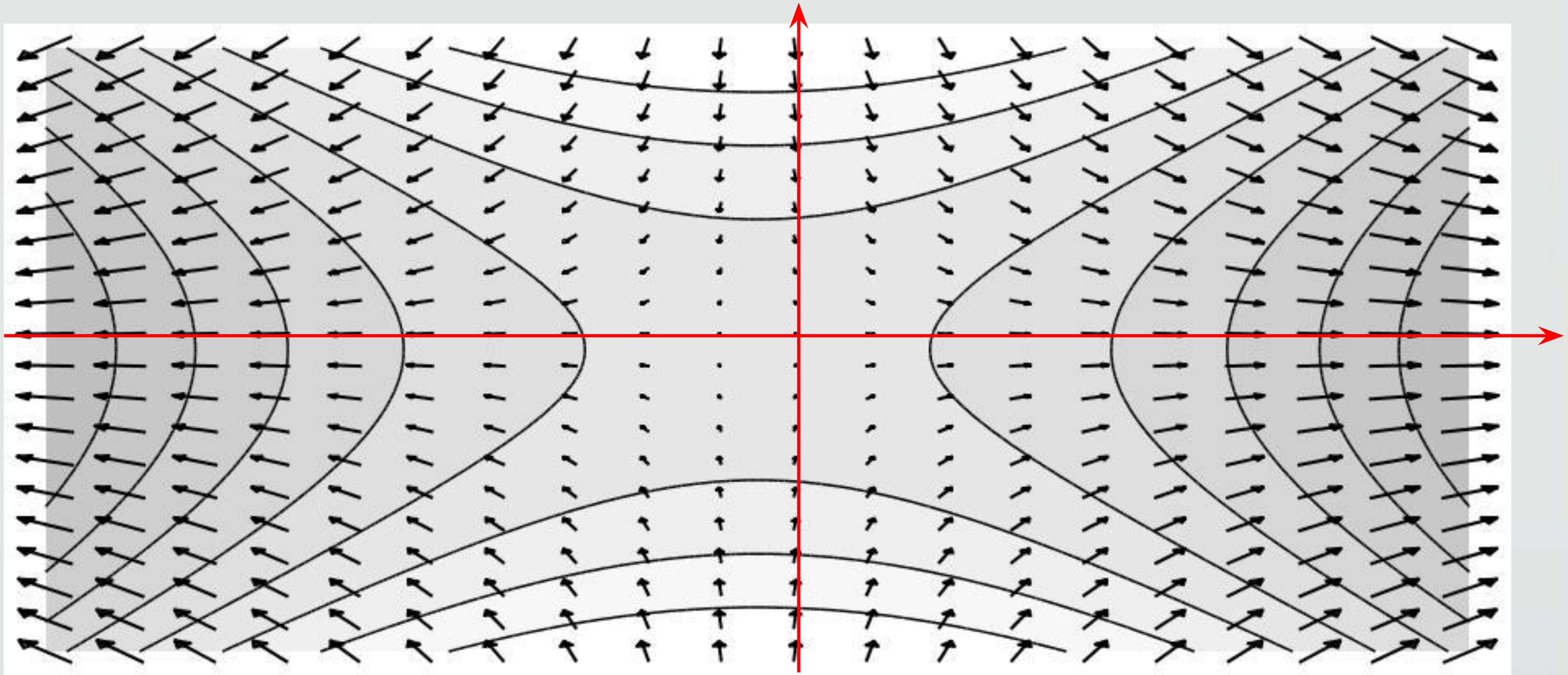
Силовые тока $\nabla\varphi$ являются линиями тока





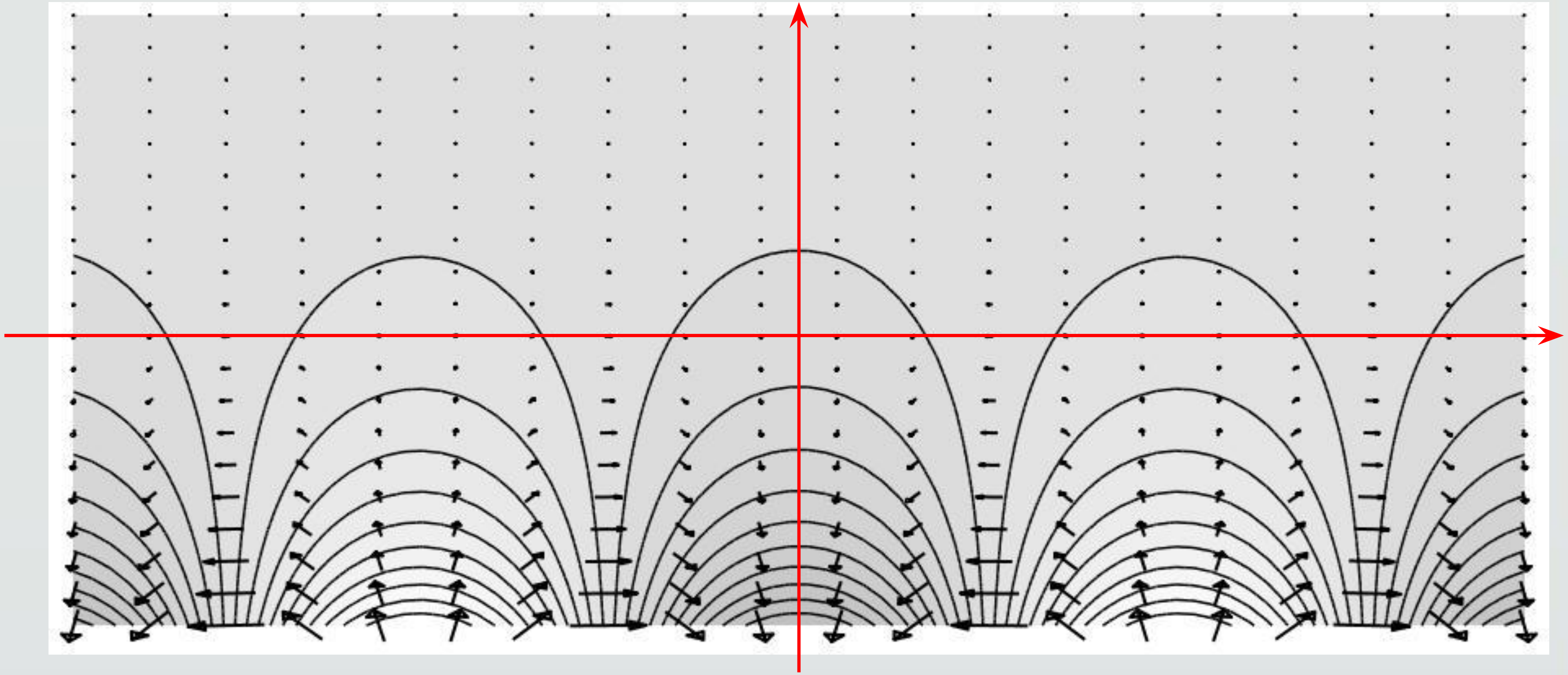
Потенциальные течения

$$\varphi = x^2 - y^2$$



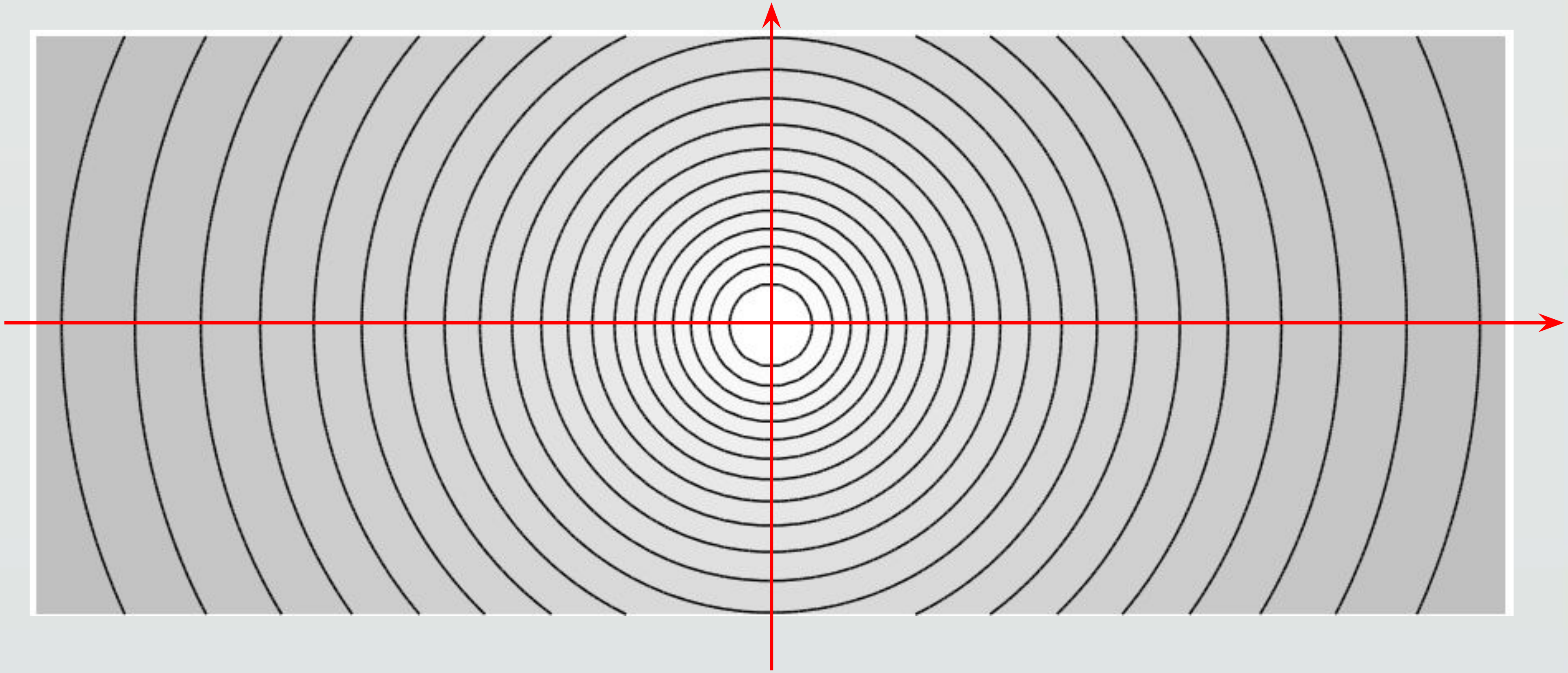
Потенциальные течения

$$\varphi = \cos(x)e^{-y}$$



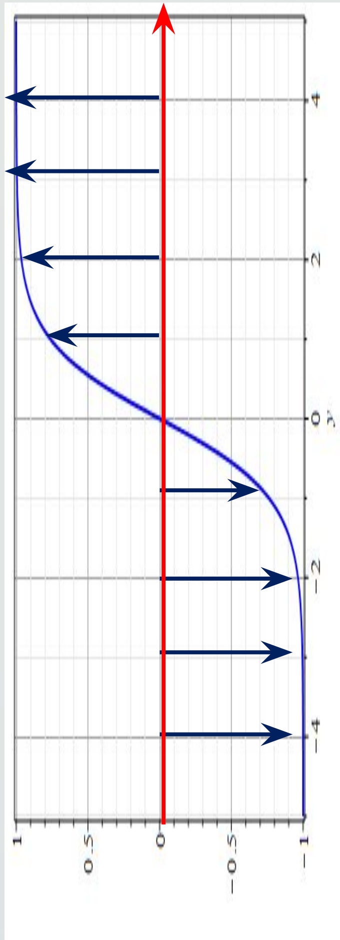
Вихревые течения

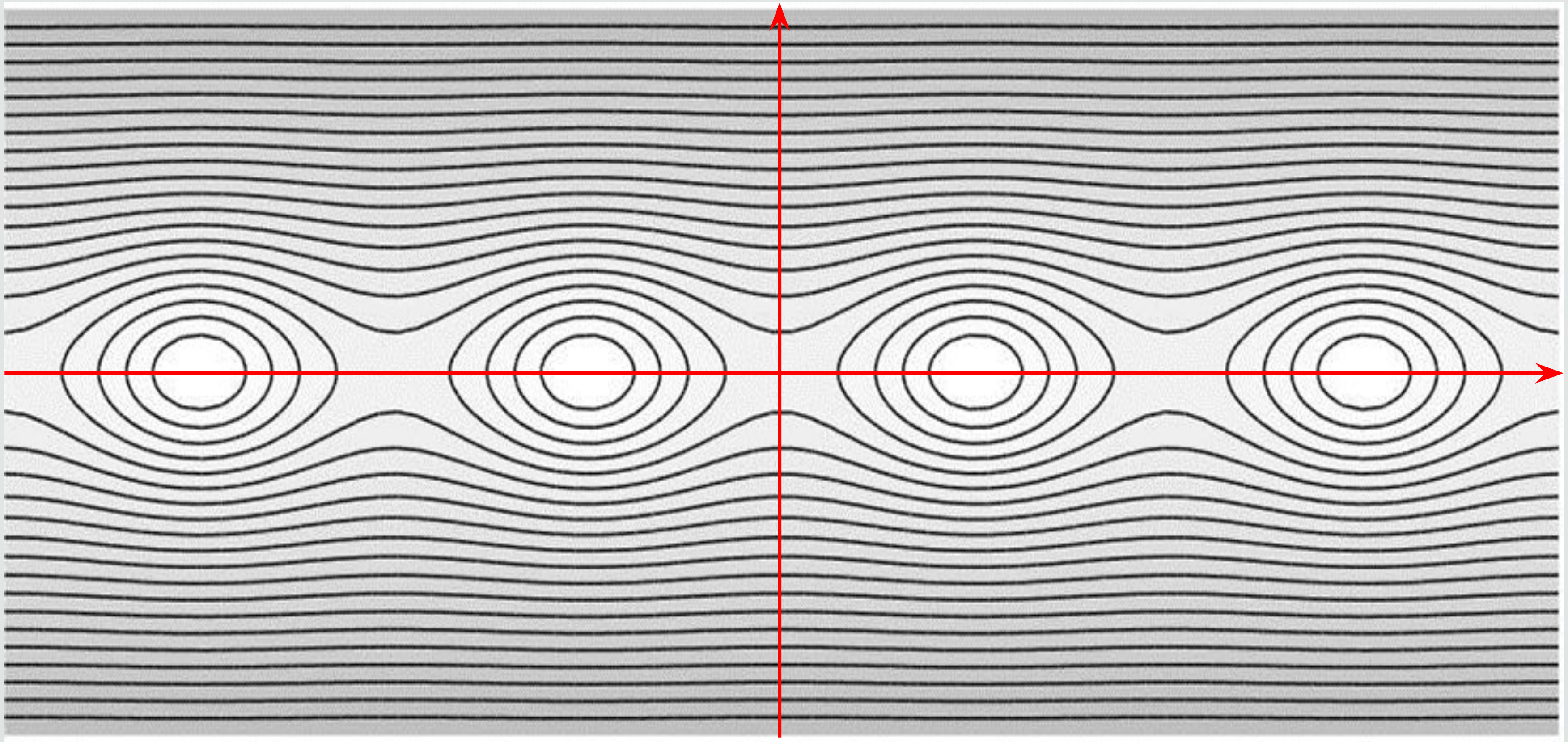
$$\psi = ln(x^2 + y^2)$$



Вихревые течения

$$\psi = ln(x^2 + y^2)$$

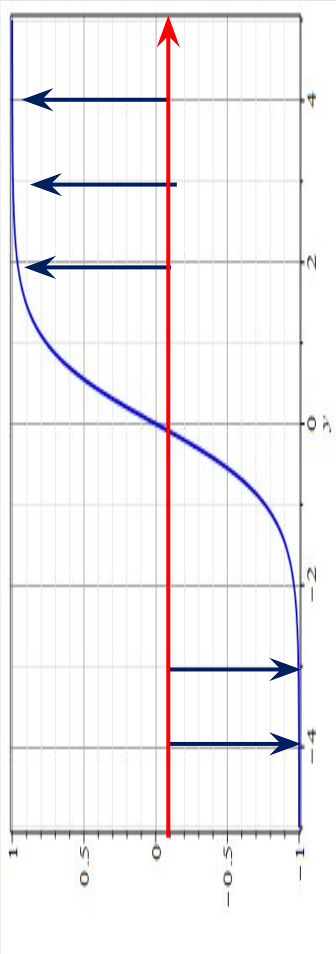


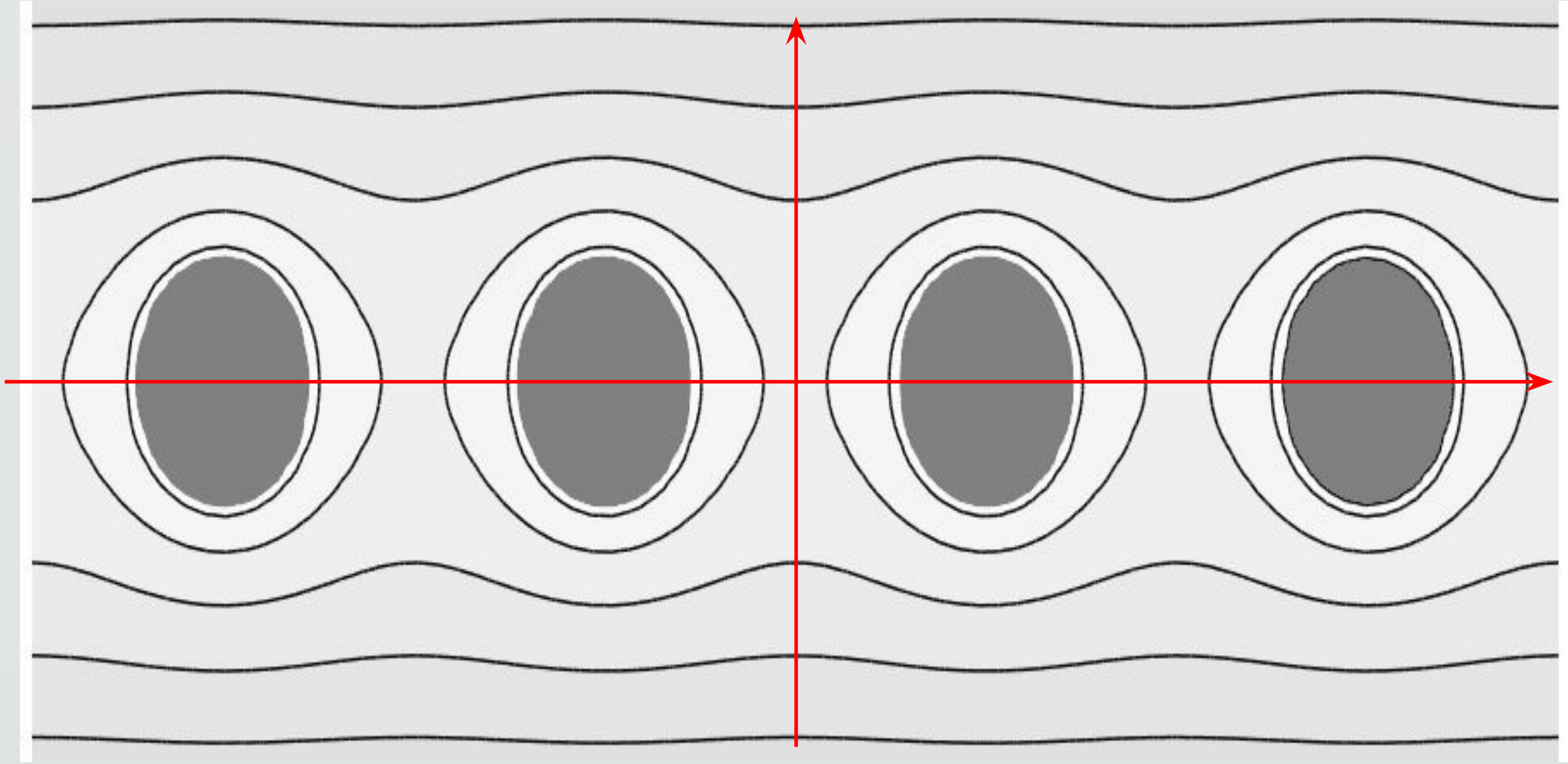


Вихревые течения

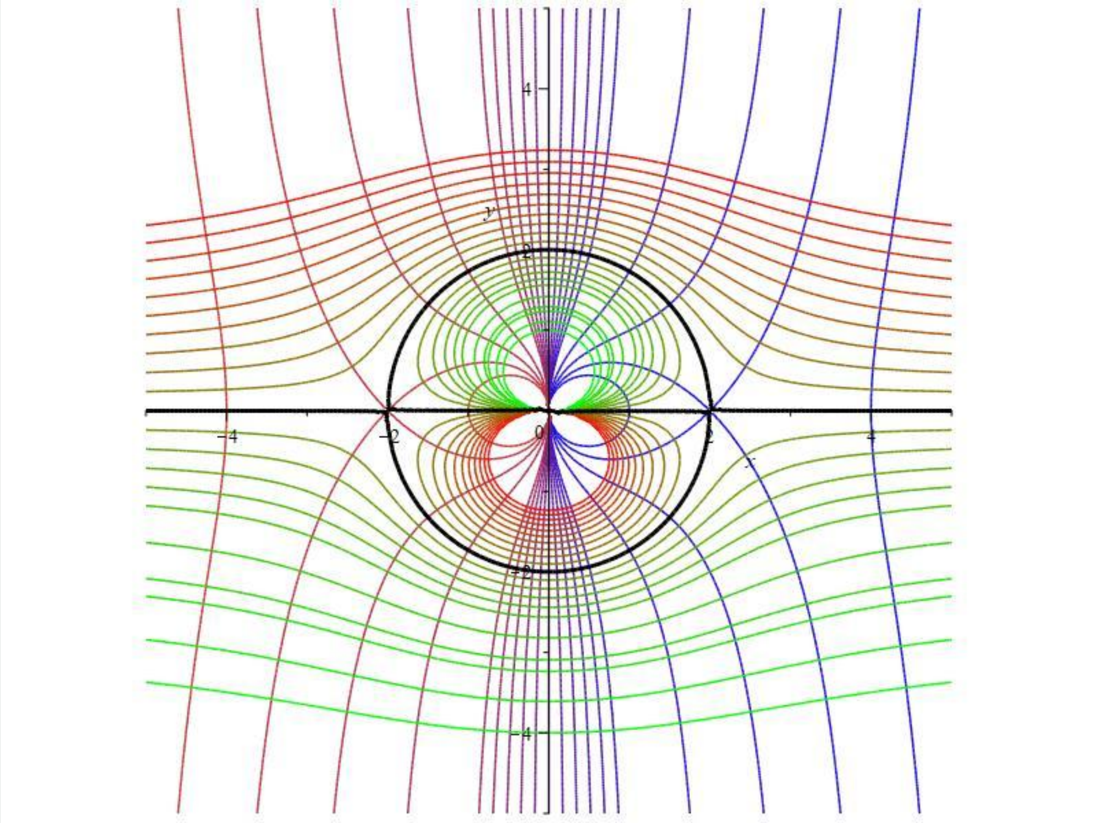
$$\psi = \ln(\mathrm{ch}\, y + 2\cos(x))$$

Критический слой





Обтекание цилиндра



Зелено- красные – линии тока (изолинии функции тока)

Сине- оранжевые – силовые линии (изолинии потенциала)

$$\Phi(z,t)=V_\infty\left(z+\frac{R^2}{z}\right)$$

Комплексный потенциал

В случае потенциального течения можно ввести комплексный потенциал:

$$\Phi(z,t)=\phi(x,y,t)+i\psi(x,y,t),$$

зависящий от одного комплексного аргумента

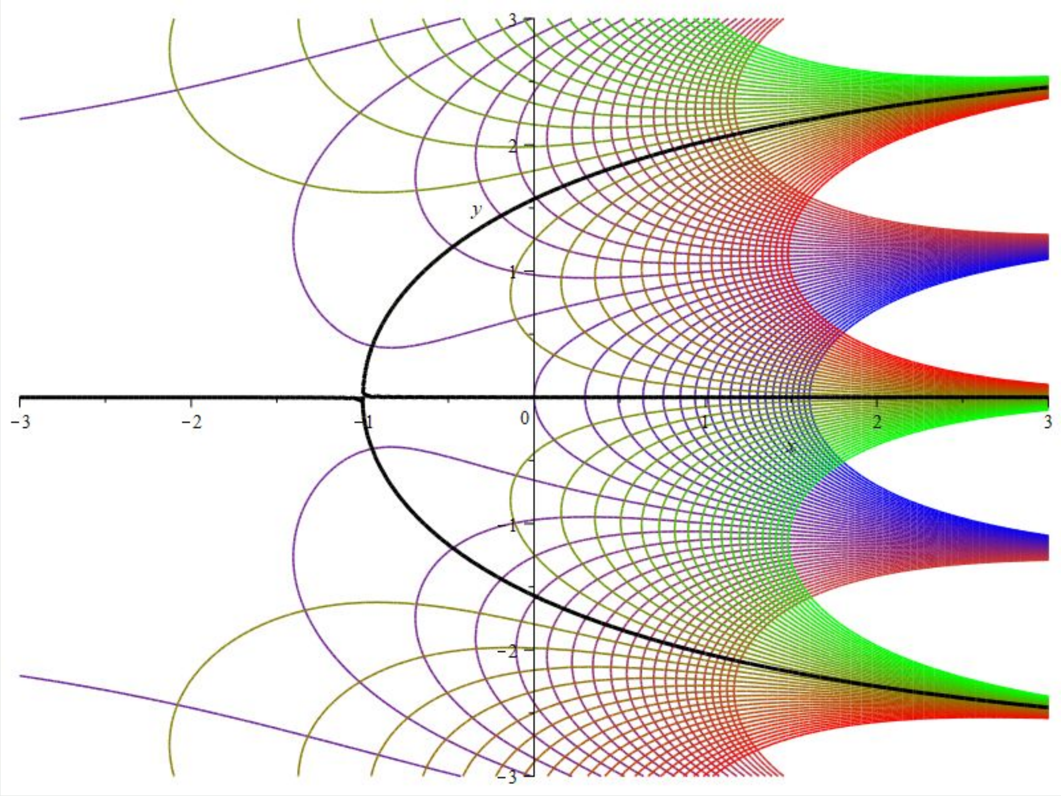
z=x+iy.

Вещественная часть $\phi(x,y,t)$ *является потенциалом, а мнимая* $\psi(x,y,t)$ *является функцией тока одного и того же потенциального течения*

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Комплексный потенциал

$$\Phi(z) = z\,e^{z}$$



Зелено- красные – линии тока
(изолинии функции тока)

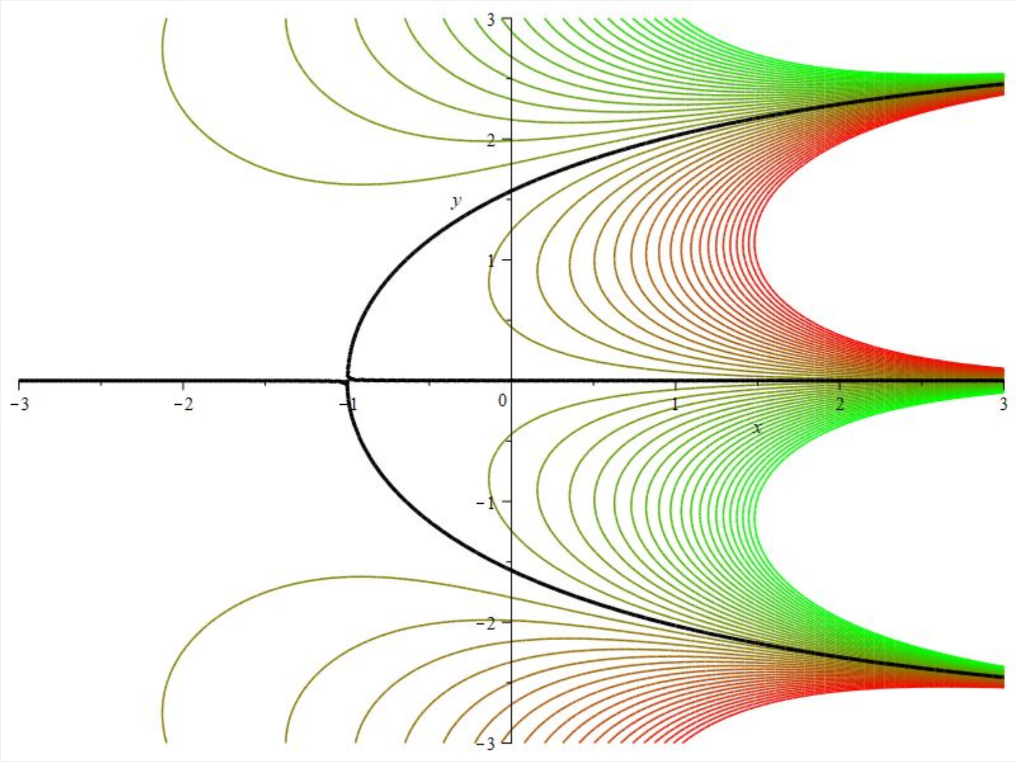
Сине- оранжевые – силовые линии
(изолинии потенциала)

Потенциал

$$\phi(x, y) = e^{x}(x\cos(y) - y\sin(y))$$

$$\psi(x, y) = e^{x}(y\cos(y) + x\sin(y))$$

Изолинии функции тока



Уравнение Бернулли

Закон сохранения энергии для потенциального течения идеальной несжимаемой среды ρ=const

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

$$\left(\vec{u}, \frac{d\vec{u}}{dt}\right) = -\left(\vec{u}, \vec{\nabla}\frac{p}{\rho}\right)$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) +$$
$$+ v\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$
$$+ w\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial x} + w\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

Уравнение Бернулли

Закон сохранения энергии для потенциального течения идеальной несжимаемой среды ρ=const

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

$$u_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,3.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{p}{\rho}, \quad \alpha = 1,2,3.$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + \frac{p}{\rho}\right) = 0, \quad \alpha = 1,2,3.$$

Интеграл Эйлера-Лапласа:

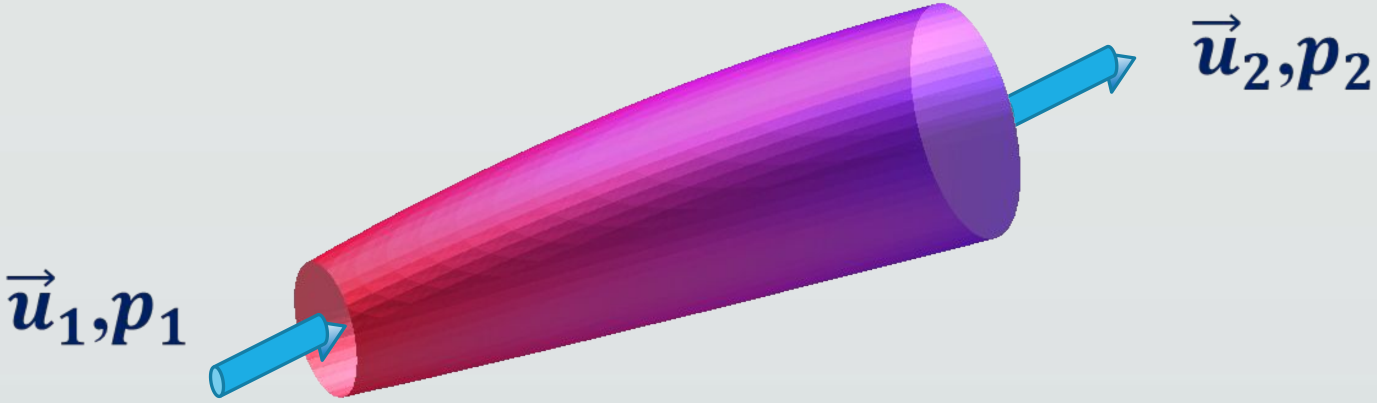
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{\mathbf{u}}^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const.$$

Уравнение Бернулли

Закон сохранения энергии для потенциального течения идеальной несжимаемой среды ρ=const

Закон Бернулли для стационарного потока газа $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\frac{\vec{\mathbf{u}}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{\vec{\mathbf{u}}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

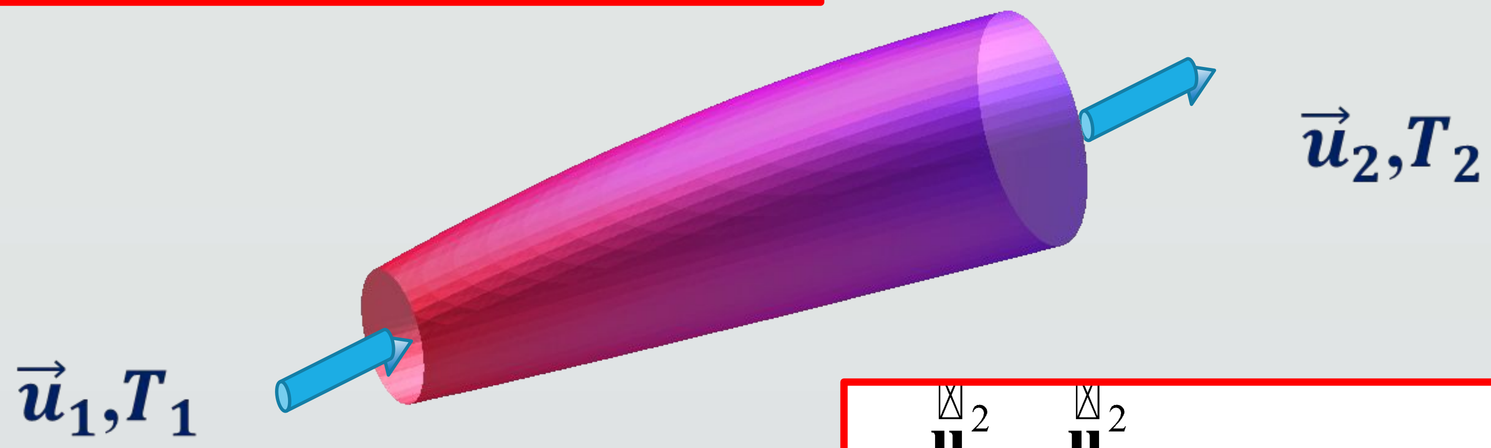


На что влияет сжимаемость?

Уравнение Бернулли в термодинамике

Закон сохранения энергии для потенциального течения идеальной сжимаемой среды для адиабатического процесса

$$\frac{\vec{\mathbf{u}}_1^2}{2}+\frac{p_1}{\rho}+c_pT_1=\frac{\vec{\mathbf{u}}_2^2}{2}+\frac{p_2}{\rho}+c_pT_2.$$



$$\frac{\vec{\mathbf{u}}_1^2}{2}-\frac{\vec{\mathbf{u}}_2^2}{2}=c_p(T_2-T_1).$$

Влажность и сжимаемость воздуха