Интервальные оценки.
Проверка статистических гипотез.
(повторение)

Семинар 23

Распределение χ^2

Пусть $X_i (i=1,2,..,n)$- независимые случайные величины ,каждая из которых имеет распределение N(0,1). Тогда сумма квадратов этих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону χ^2 («*хи-квадрат*») с *n* степенями свободы.

Распределение Стьюдента

Пусть *Z* независимая *нормально распределенная* случайная величина , N(0,1). *V*- независимая от *Z* случайная величина, которая распределена по *закону* χ^2 *с n* степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/n}}$$

имеет распределение *Стьюдента* с *n* степенями свободы.

(Стьюдент псевдоним английского статистика В. Госсета)

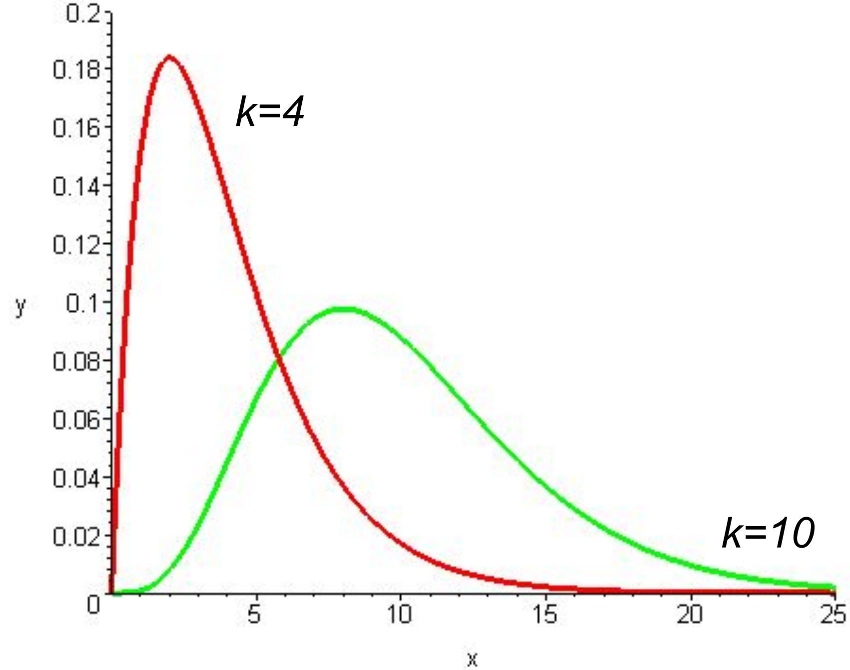
Распределение Фишера- Снедекора

Пусть U и *V* независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

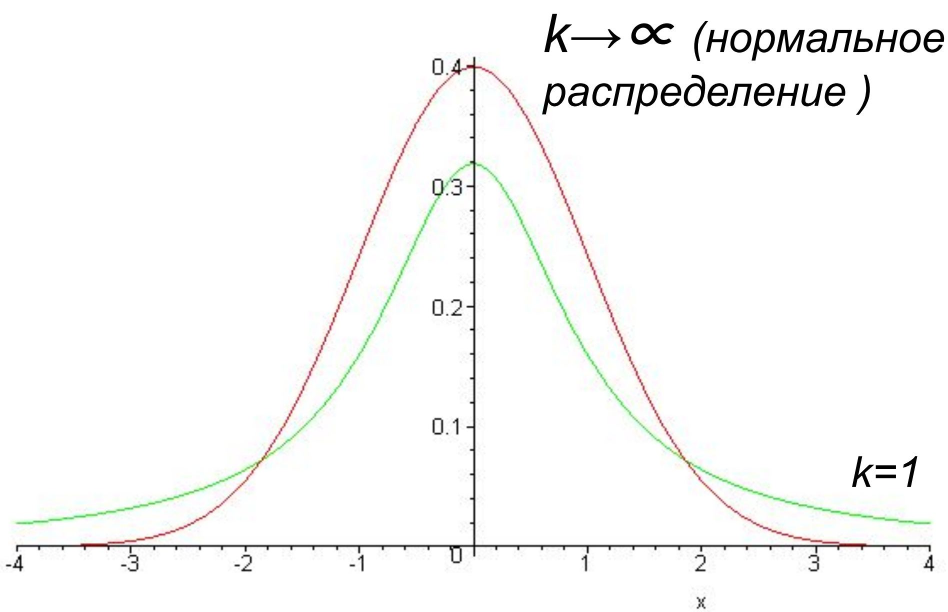
$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$$

имеет распределение *F Фишера- Снедекора* со степенями свободы k_1 и k_2 .

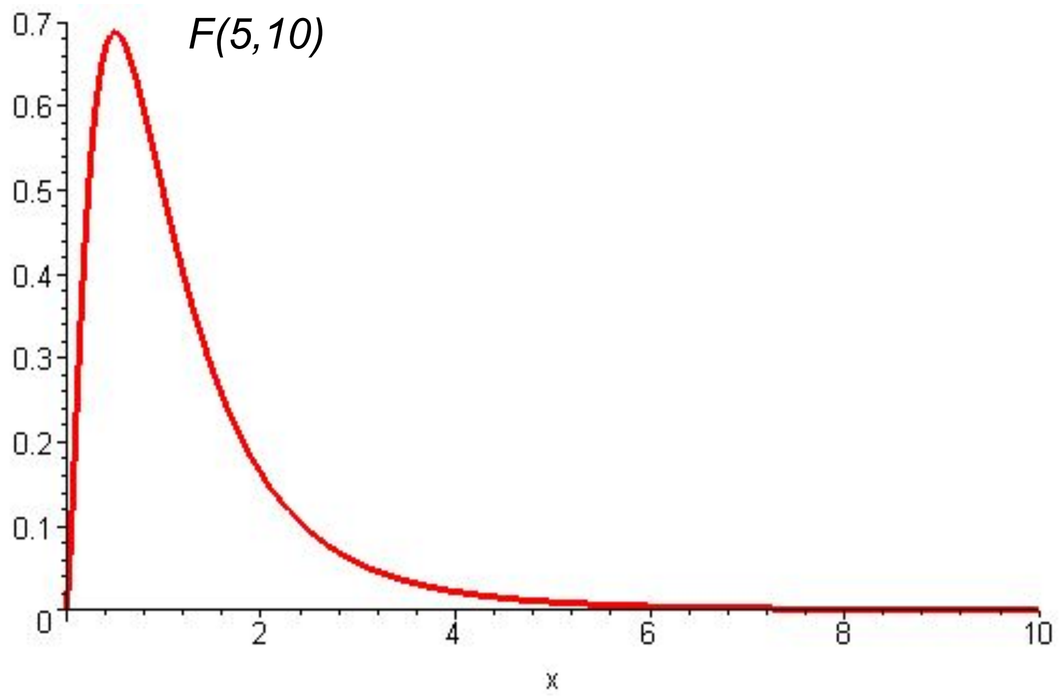
Распределение $\chi^2(k)$



Распределение Стьюдента $T(k)$.



Распределение Фишера- Снедекора $F(n_1,n_2)$



Доверительные интервалы для параметра p биномиального распределения *(повторение)*

Пусть *x*– наблюденное значение случайной величины *X,* имеющей распределение *B(n, p)*. Оценкой для *p* является *относительная частота h=x/n* . Если *n>50*, а *nh>5* ,и *n(1-h)>5* , то распределение случайной величины $Z = \frac{h-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \; q = 1 - p,$ аппроксимируется нормальным распределением *N(0,1)*.Можно использовать следующие формулы для границ p_1 и p_2 доверительного интервала

$$p_{1,2} \approx h \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{h(1-h)}$$

Задача 3.22

В 10 000 сеансах игры с автоматом выигрыш появился 4000 раз. Найти 95% доверительный интервал для вероятности выигрыша. Сколько сеансов игры следует провести, чтобы с вероятностью 0.99 вероятность выигрыша отличалась от частоты не не более, чем на 0.01.

Решение

1) $p_{1,2} \approx h \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)}$ $\quad h = \frac{4000}{10\,000} = 0.4$ $\quad u_{1-\alpha/2} = u_{1-0.05/2} = u_{0.975} = 1.96$

$$p_{1,2} \approx 0.4 \pm \frac{1.96}{\sqrt{10\,000}}\sqrt{0.4(1-0.4)}$$

0.39 $<$ p $<$ 0.41

2) $|h-p| \le 0.01$ $\quad$ *P=0.99; α=1-0.99=0.01*

$$Z = \frac{h-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \qquad |h-p| = u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \le 0.01$$

$$u_{1-\alpha/2} = u_{1-0.005} = u_{0.995} = 2.576$$

n ≥16 000

Доверительные интервалы для параметра λ распределения Пуассона.

Пусть *x*– наблюденное значение случайной величины *X*, имеющей распределение Пуассона с параметром λ**.** Нижняя и верхняя границы λ_1 и λ_2 доверительного интервала для параметра λ определяются как корни уравнений

$$\sum_{i=x}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{x} \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2} = \frac{\alpha}{2}$$

Распределение Пуассона удобно аппроксимировать распределением χ^2 .

Такая аппроксимация приводит к следующим формулам вычисления доверительных границ для параметра λ:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \chi^2_{\alpha/2}(2x)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \chi^2_{1-\alpha/2}(2x+2)$$

Задача 3.27

Число отказавших во время испытания элементов аппаратуры имеет распределение Пуассона с параметром λ. Найти 95% доверительный интервал для λ по следующим данным:

1) За время испытаний отказало 3 элемента в одном комплекте аппаратуры;
2) В четырех испытуемых комплектах отказал соответственно 1, 0, 2, 1 элемент.

Решение

1) Отказало 3 элемента; x=3; *α/2=(1-0.95)=0.05/2=0.025;*

$$\chi^2_{\alpha/2}(2x) = \chi^2_{0.025}(6) = 1.24;$$
$$\chi^2_{1-\alpha/2}(2x+2) = \chi^2_{0.975}(8) = 17.5$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\chi^2_{\alpha/2}(2x) = \frac{1}{2}\cdot 1.24 = 0.62;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\chi^2_{1-\alpha/2}(2x+2) = \frac{1}{2}\cdot 17.5 = 8.75; \qquad \boldsymbol{0.62 < \lambda < 8.75}$$

2) В 4-ех комплектах отказал соответственно *1, 0, 2, 1* элемент.

Если для оценки параметра ***λ*** используют результаты ***n*** наблюдений независимых С.В.$X_1, X_2, \ldots, X_n$,каждая из которых имеет распределение Пуассона с параметром λ, доверительные границы вычисляются для параметра ***nλ*** С.В. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Доверительный интервал для nλ имеет вид $\lambda_1 < n\lambda < \lambda_2$.

Доверительный интервал для λ : $\boldsymbol{\lambda_1 / n < \lambda < \lambda_2 / n}$.

n=4. Общее число отказов равно $x = \sum_{i=1}^{4} x_i = 1 + 0 + 2 + 1 = 4;$

$$\chi^2_{\alpha/2}(2x) = \chi^2_{0.025}(8) = 2.18;$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(2x+2) = \chi^2_{0.975}(10) = 20.5$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\chi^2_{\alpha/2}(2x) = \frac{1}{2}\cdot 2.18 = 1.09;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\chi^2_{1-\alpha/2}(2x+2) = \frac{1}{2}\cdot 20.5 = 10.75;$$

Таким образом доверительный интервал для 4λ будет $1.09 < 4\lambda < 10.75$

Доверительный интервал для λ : $\frac{1.09}{4} < \lambda < \frac{10.75}{4}$ $\boldsymbol{0.2725 < \lambda < 2.5625}$

Проверка статистических гипотез.

Задача 4.31.

Новый метод измерения длины был опробован на эталоне, причем оценка дисперсии по 10 замерам составила 100 кв. мкм. Согласуется ли этот результат с утверждением:

«Дисперсия результатов измерений по предложенному методу не превосходит 50 кв. мкм?» Принять α=0,05.

Решение:

1) Гипотезы : H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$;

альтернативная гипотеза : H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$.

Проверяемая гипотеза	Предположение относительно m	Статистика критерия Z	Распределение Z f(z/H_0)	Область принятия H_0 для двухст. критерия	Область принятия H_0 для правост. критерия
H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$;	m неизвестно, $\widetilde{m} = \overline{X}$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

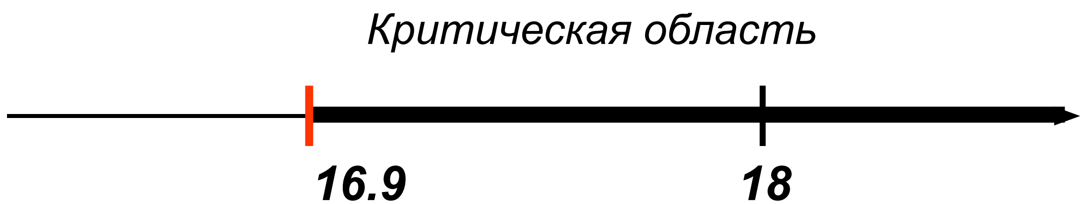
2) Критическая область определяется неравенством $Z > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$

$\alpha=0{,}05$, $\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{1-0.05}^2(10-1) = \chi_{0.95}^2(9) = 16.9$

3) Выборочное значение нормированной статистики критерия равно :

$$Z_в = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(10-1)\cdot 10^2}{\sigma_0^2} = 18;$$

4)



$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$$

5) Статистическое решение: так как выборочное значение критерия принадлежит критической области, гипотеза H_0 отклоняется. Результат не согласуется с утверждением:

«Дисперсия результатов измерений по предложенному методу не превосходит 50 кв. мкм?»

Задача 4.35.

Давление в камере контролируется по двум манометрам. Для сравнения точности одновременно фиксируются их показания. По результатам 10 измерений выборочные средние оказались равными 15.3 и 16.1 соответственно, а оценки для дисперсий - 0.2 и 0.15.

Используя односторонний и двусторонний критерии при α=0,1 проверить гипотезу о равенстве дисперсий и гипотезу о равенстве средних.

Решение:

1. **Сначала проверим гипотезу о равенстве дисперсий. H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$**

Параметр	Предроложение относительно ***m***	Статистика Z	Распределение Z	Область принятия гипотезы H_0 (двухсторон. критерий)	Область принятия гипотезы H_0 (правосторон. критерий)
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	m_1, m_2 неизвестны	S_1^2 / S_2^2 $S_1^2 > S_2^2$	$F(n_1-1, n_2-1)$	$S_1^2 / S_2^2 <$ $< F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$	$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $S_1^2 / S_2^2 <$ $< F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$

$S_1^2 = 0.2;\ \ S_2^2 = 0.15;$ n_1=10; n_2=10; α=0.10 $S_1^2 / S_2^2 = 0.2/0.15 = 1.33$

Статистика критерия Z имеет распределение Фишера.

1) Двухсторонний критерий. Альтернативная гипотеза **H$_1$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$**

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{1-0.10/2}(10-1, 10-1) = F_{0.95}(9,9) = 3.18$$

$$S_1^2 / S_2^2 < F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1);\ \ 1.33 < 3.18$$

Гипотеза H$_0$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ принимается.

2) Односторонний критерий. Альтернативная гипотеза **H$_1$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$**

$$F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1) = F_{1-0.10}(10-1, 10-1) = F_{0.9}(9,9) = 2.44$$

$$S_1^2 / S_2^2 < F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1);\ \ 1.33 < 2.44$$

Гипотеза H$_0$ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ принимается.

2. Проверим гипотезу о равенстве средних. Гипотеза H$_0$ m$_1$=m$_2$

$$S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(10-1)0.2 + (10-1)0.15}{10+10-2}} = 0.4183$$

Пара-метр	Предполо-жение относитель-но σ^2	Статистика Z	Распреде-ление Z	Область принятия гипотезы H_0 (двухсторон. критерий)	Область принятия гипотезы H_0 (правосторон. критерий)
$m_1=$ $=m_2$	σ_1^2 и σ_2^2 неизвестны Гипотеза H_0 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ Принимает-ся $\sigma_1^2=S_1^2$ $\sigma_2^2=S_2^2$	$Z=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$; $S=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$	$T(n_1+n_2-2)$	$\dfrac{\lvert\overline{X}_1-\overline{X}_2\rvert}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}<$ $<t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	$\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}<$ $<t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$

1) Двухсторонний критерий. Альтернативная гипотеза $\mathbf{H_1}$ $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$

$$\frac{\lvert\overline{X}_1-\overline{X}_2\rvert}{S\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}=\frac{\lvert 15.3-16.1\rvert}{0.418\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}}=\frac{\lvert -0.8\rvert}{0.418\cdot 0.447}=4.278$$

Критическая область

1.734 ***4.278***

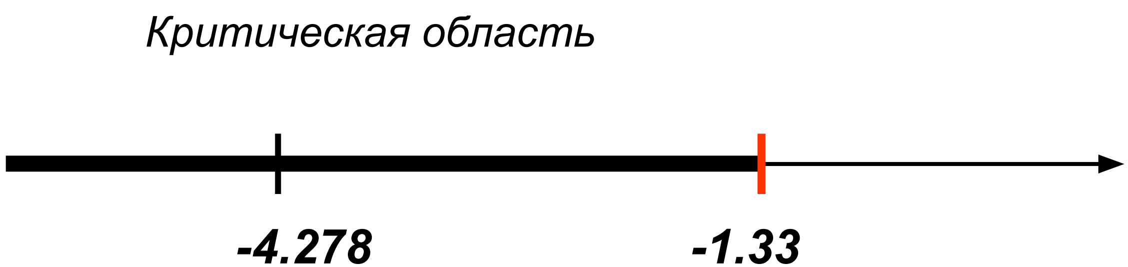
$$t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)=t_{1-0.10/2}(18)=t_{0.95}(18)=1.734$$

4.278>1.734. Гипотеза H_0 $m_1=m_2$ **отклоняется**.

1)Односторонний критерий (левосторонний) . Альтернативная гипотеза **H_1 m_1<m_2**

$$\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{15.3-16.1}{0.418\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}=\frac{-0.8}{0.418\cdot 0.447}=-4.278$$

$$t_\alpha(n_1+n_2-2)=t_{0.10}(10+10-2)=-t_{0.9}(18)=-1.33$$



-4.278<1.33. Гипотеза H_0 $m_1=m_2$ отклоняется.