

A close-up photograph of a yellow pencil with a black eraser and a sharp lead tip, resting on a sheet of white graph paper. The pencil is positioned diagonally from the top right towards the center. The graph paper has a grid pattern, and several mathematical equations are written in black ink. The most prominent equation is $6(4x - (2 - 5y + 2x) + 9)$, which is partially obscured by the pencil tip. Other visible parts of equations include $(x + 5)$ and $(x + 5)$. The background is slightly blurred, focusing attention on the pencil and the equations.

МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

A decorative graphic element in the bottom left corner of the slide, consisting of several vertical and horizontal blue lines of varying thickness, resembling a circuit board or a stylized logo.

ИВАНОВА ЭЛИНА И ХУСАИНОВА АЛИНА
ДИСЦИПЛИНА «МАТЕМАТИКА» (1 КУРС)



- Основные понятия
- Метод Крамера
- Решение системы методом Крамера

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где x_1, x_2, x_3 - неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$),
 b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной.

Если система трёх линейных уравнений решений не имеет, то она называется несовместной.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют определенной; если решений больше одного, то – неопределенной.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю, то система называется однородной, в противном случае – неоднородной.

МЕТОД КРАМЕРА

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1)$$

в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) $\Delta \neq 0$, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

РЕШИТЕ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot 1 \cdot 0 = -52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 9 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 \cdot 0 - 9 \cdot (-2) \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 0 = 13.$$

РЕШИТЕ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$



3. Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

ОТВЕТ: $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -1.$