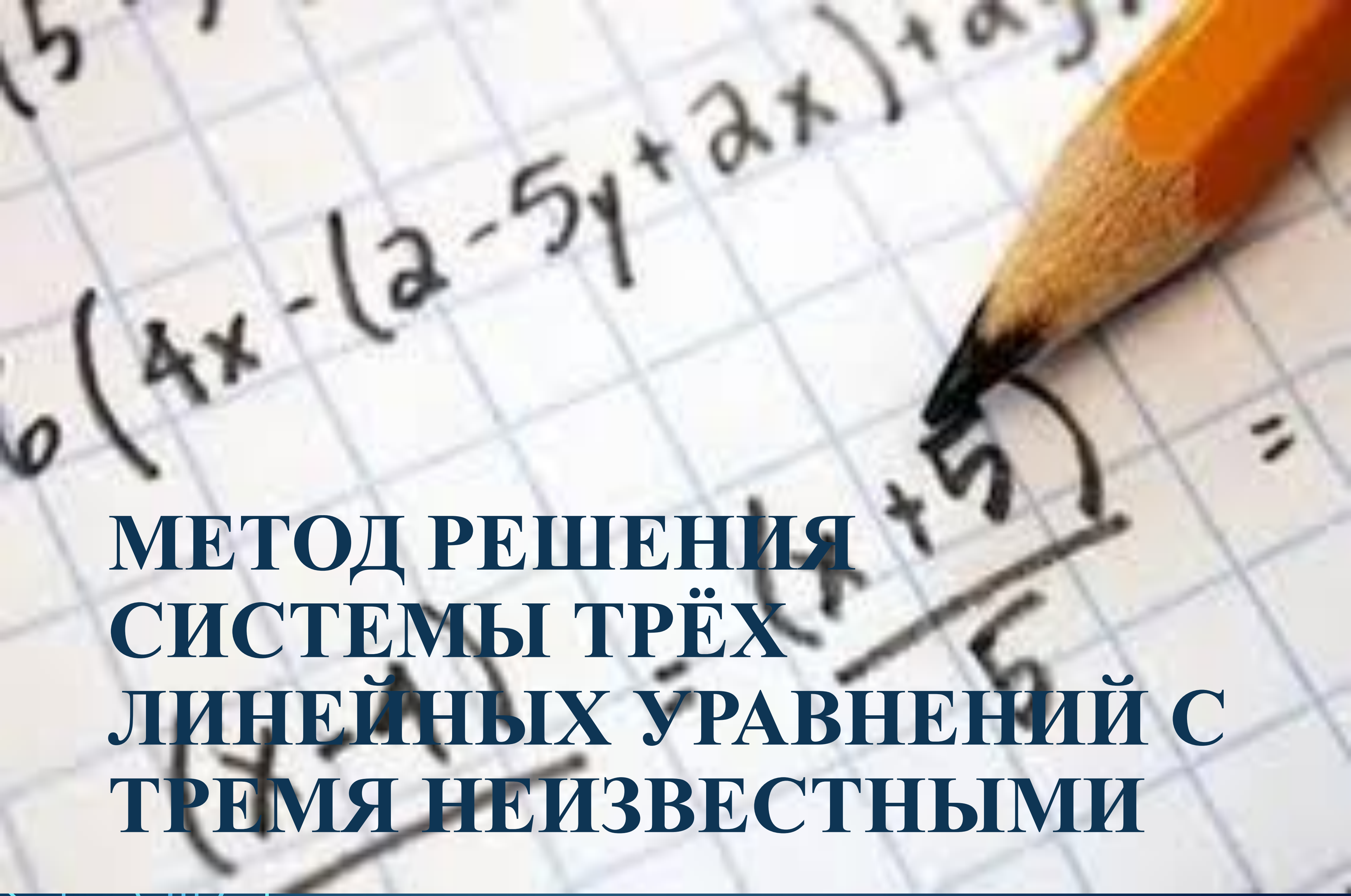

МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

ИВАНОВА ЭЛИНА И ХУСАИНОВА АЛИНА
ДИСЦИПЛИНА «МАТЕМАТИКА» (1 КУРС)

- Основные понятия
- Метод Крамера
- Решение системы методом Крамера

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где - x_1, x_2, x_3 неизвестные, a_{ij} - коэффициенты ($i = 1,2,3;\ j = 1,2,3$),

b_1, b_2, b_3 - свободные члены.

Тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется решением системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными, если при подстановке их в уравнения системы вместо x_1, x_2, x_3 получают верные числовые равенства.

Если система трёх линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**.

Если система трёх линейных уравнений решений не имеет, то она называется **несовместной**.

Если система трёх линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют **определенной**; если решений больше одного, то – **неопределенной**.

Если свободные члены всех уравнений системы равны нулю , то система называется **однородной**, в противном случае – **неоднородной**.

Метод Крамера

Пусть нам требуется решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \qquad (1)$$

в которой определитель системы (он составлен из коэффициентов при неизвестных) $\Delta \neq 0$, а определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ получаются из определителя системы Δ посредством замены свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{32} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило Крамера). Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система (1) имеет одно и только одно решение, причём

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Решите систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 0 = -13.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено методом Крамера.

2. Составим и вычислим необходимые определители :

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 9\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 2 + (-1)\cdot 3\cdot 0 - (-1)\cdot(-2)\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 2 - 9\cdot 1\cdot 0 = -52,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2 + 9\cdot 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 2 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - 9\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 2 = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1 + 9\cdot 1\cdot 0 - 9\cdot(-2)\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 0 = 13.$$

РЕШИТЕ СИСТЕМУ МЕТОДОМ КРАМЕРА:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

3. Находим неизвестные по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-52}{-13} = 4,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{0}{-13} = 0,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Ответ: $x_1 = 4, \; x_2 = 0, \; x_3 = -1.$