КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

ЛЕКЦИЯ 8

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Формальная классификация моделей

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств.

Детерминированные ↔ стохастические

Сосредоточенные ↔ распределённые системы

Дискретные ↔ непрерывные

Статические ↔ динамические

Линейные ↔ нелинейные модели

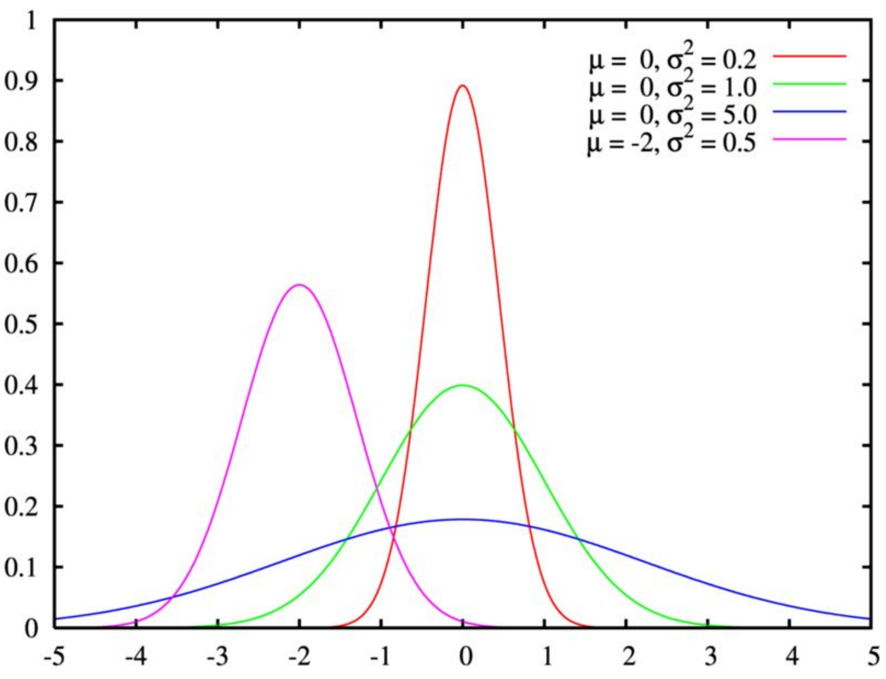
КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

- При построении параметрической модели распределение случайных величин аппроксимируется известным вероятными законами распределения (чаще всего нормальным законом), которые описываются определёнными характеристиками - параметрами, называемыми моментами

- *Пример:* когда в справочнике указано, что у здорового человека в состоянии покоя объем вдыхаемого воздуха составляет 400-800 мл, это значит, что распределение величины объема моделируются равномерным законом.

- Измеренный пульс – это Математическое ожидание распределения кардиоинтервалов

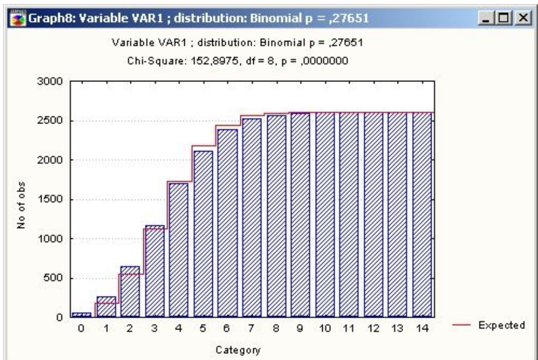


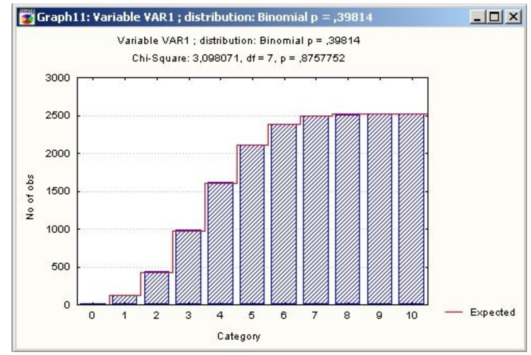
моменты

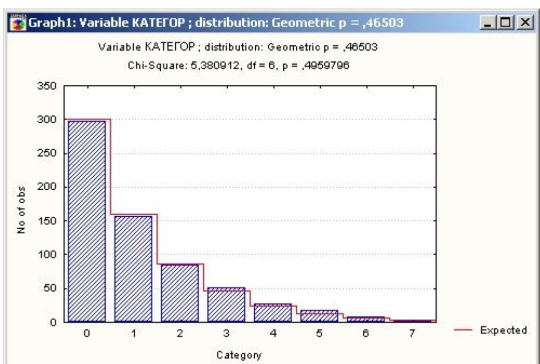
μ - коэффициент сдвига (вещественное число)
σ > 0 - коэффициент масштаба (вещественный, строго положительный)
Носитель
Плотность вероятности
Функция распределения
Математическое ожидание
Медиана
Мода
Дисперсия
Коэффициент асимметрии
Коэффициент эксцесса
Информационная энтропия
Производящая функция моментов
Характеристическая функция

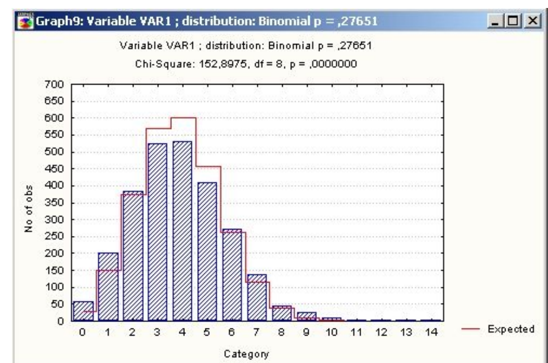
СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

- Непараметрическими моделями называются те, у которых закон распределения случайных величин неизвестен







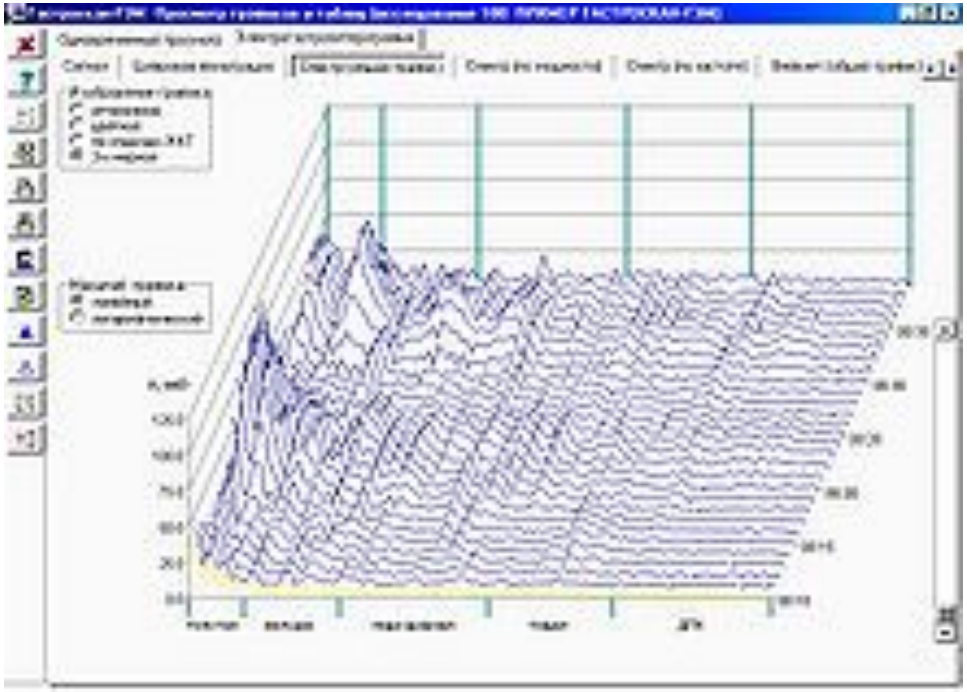


__Пример:__ Результаты социологического опроса населения по поводу необходимости повышения цен на алкоголь

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Многомерные вероятностные модели

- Представляют собой многомерные описания состояния биотехнических систем и процессов в них протекающих, к признакам этих систем относят существенные параметры, характеризующие определенные единицы наблюдения.
- Двухмерное пространство признаков, образованное двумя переменными, содержит скопление точек на плоскости.



<u>Пример:</u> трёхмерной электрогастроэнтерограммы человека

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Многомерные вероятностные модели

Факторный анализ

(от лат. factor — действующий, производящий и греч. analysis — разложение, расчленение) — совокупность методов, которые на основе объективно существующих корреляционных взаимосвязей признаков (или объектов) позволяют выявлять латентные (или скрытые) обобщающие характеристики структуры изучаемых объектов и их свойств.

Что он даёт исследователю?

Когда количество контролируемых переменных на входе в систему велико и влияющих на них факторов очень велико, либо нет необходимости изучать воздействие каждого фактора в отдельности, можно воспользоваться методами снижения размерности многомерных данных. Эти методы позволяют выявить взаимосвязанные факторы и сформировать на их основе объединенный показатель, учитывающий эту взаимосвязь. В результате число анализируемых параметров снижается, а процедура анализа ускоряется и упрощается.

Основное предположение Ф. а. заключается в том, что корреляционные связи между большим числом наблюдаемых переменных определяются существованием меньшего числа гипотетических ненаблюдаемых переменных или факторов. В терминах случайных величин – результатов наблюдений $X_1,..., X_n$ общей моделью Ф. а. служит следующая линейная модель:

$$X_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} f_j + b_i U_i + \varepsilon_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

где случайные величины f_j суть общие факторы, случайные величины U_i суть факторы, специфические для величин X_i и не коррелированные с f_j, а ε_i- суть случайные ошибки.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Факторный анализ

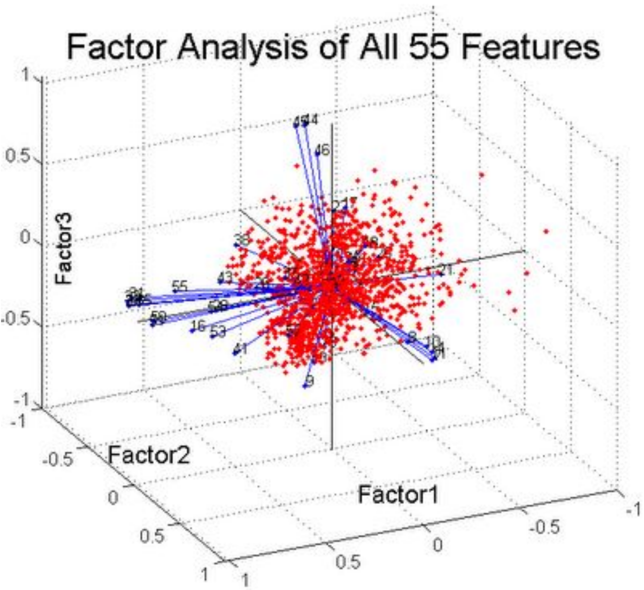
Многомерные вероятностные модели

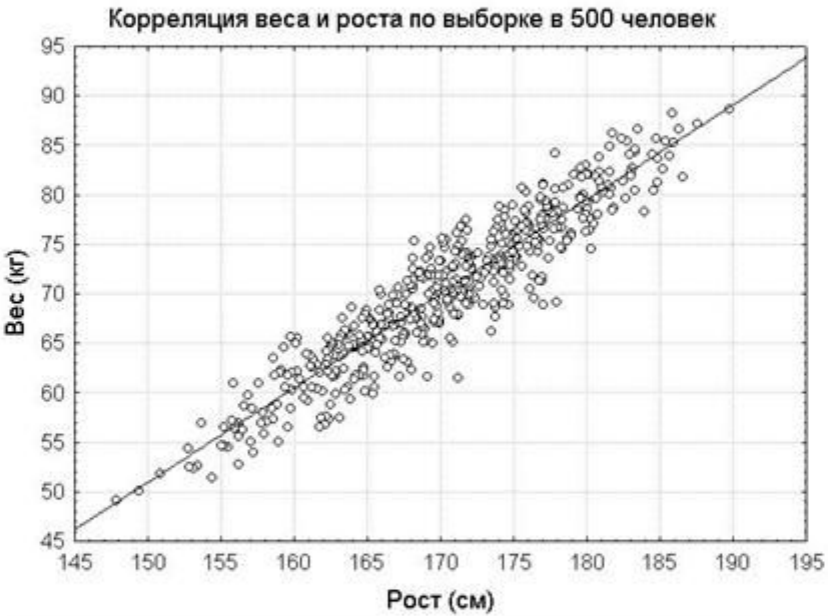
2 цели Факторного анализа:

1. определение взаимосвязей между переменными, их классификация, т. е. «объективная R-классификация»[1][2];
2. сокращение числа переменных.

- Трехмерное пространство, образованное тремя переменными содержит облака точек - наблюдений.

✔ *<u>Пример:</u> геометрические размеры и биохимические характеристики клетки, интервалы между зубцами ЭКГ и т. д.*





СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Факторный анализ

Многомерные вероятностные модели

Ковариация $\mathrm{cov}_{XY} = \mathbf{M}[(X - \mathbf{M}(X))(Y - \mathbf{M}(Y))] = \mathbf{M}(XY) - \mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y)$

где $\mathbf{M}$ — математическое ожидание.

Линейный коэффициент корреляции ((или коэффициент корреляции Пирсона))

$$\mathbf{r}_{XY} = \frac{\mathbf{cov}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \sum(Y - \bar{Y})^2}}.$$

Коэффициент ранговой корреляции Кендалла Применяется для выявления взаимосвязи между количественными или качественными показателями, если их можно ранжировать.

$$\tau = \frac{2S}{n(n-1)}$$

Коэффициент ранговой корреляции Спирмена, где каждому показателю X и Y присваивается ранг. На основе полученных рангов рассчитываются их разности d и вычисляется коэффициент корреляции по формуле:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Многомерные вероятностные модели

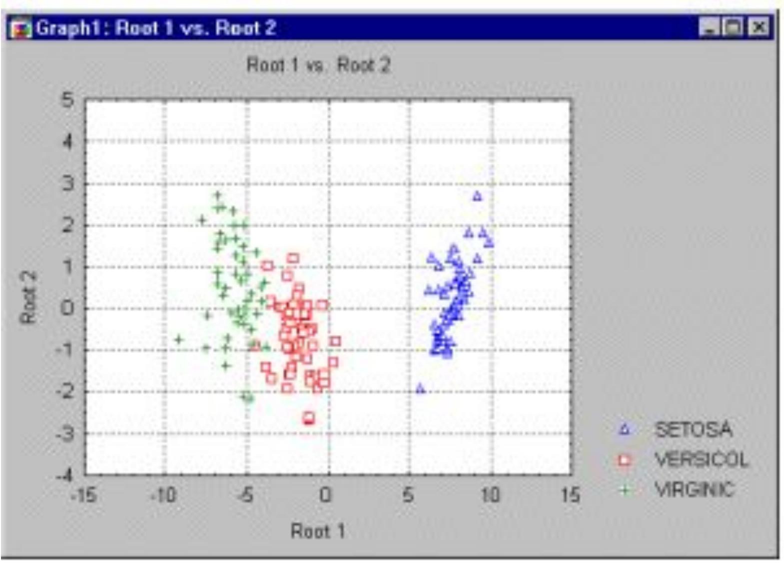
Дискриминантный анализ

раздел вычислительной математики, представляющий основное средство решения задач Распознавания образов, инструмент статистики.

Цель: принятия решения о том, какие переменные разделяют (т.е. «дискриминируют») возникающие наборы данных (так называемые «группы»)

Задачи .

1. Определение дискриминанты* функций (discriminant functions) или линейных комбинаций независимых переменных, которые наилучшим образом различают (дискриминируют) категории (группы) зависимой переменной.
2. Проверка существования между группами значимых различий с точки зрения независимых переменных.
3. Определение предикторов, вносящих наибольший вклад в межгрупповые различия,
4. Отнесение случаев к одной из групп (классификация), исходя из значений предикторов.
5. Оценка точности классификации данных на группы.



Канонической дискриминантной функцией называется линейная функция:

$$d_{km} = \beta_0 + \beta_1 * x_{1km} + \ldots + \beta_p * x_{pkm}$$

d_{km} - значение канонической дискриминантной функции для m-го объекта в группе k (m = 1, ..., n, k = 1, ..., g);

x_{pkm} - значение дискриминантной переменной Xi для m-го объекта в группе k;

$\beta_0, \ldots, \beta_p$ - коэффициенты дискриминантной функции.

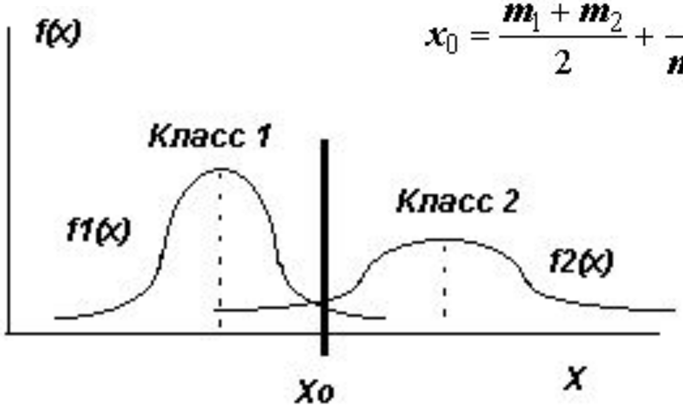
СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

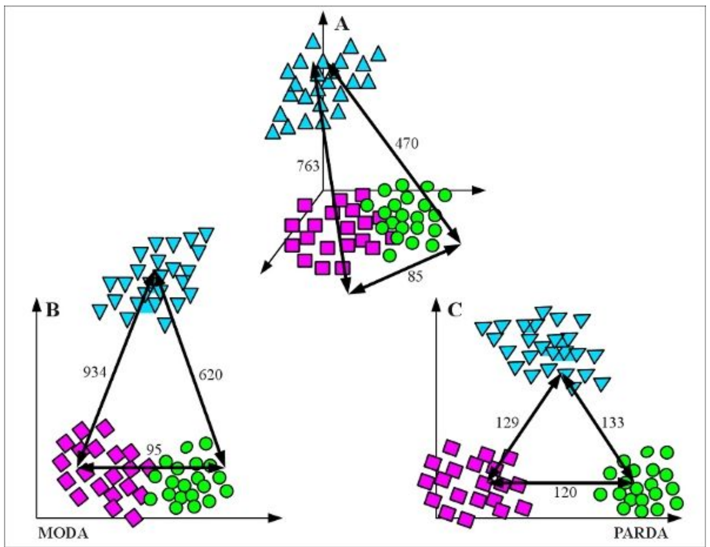
Многомерные вероятностные модели

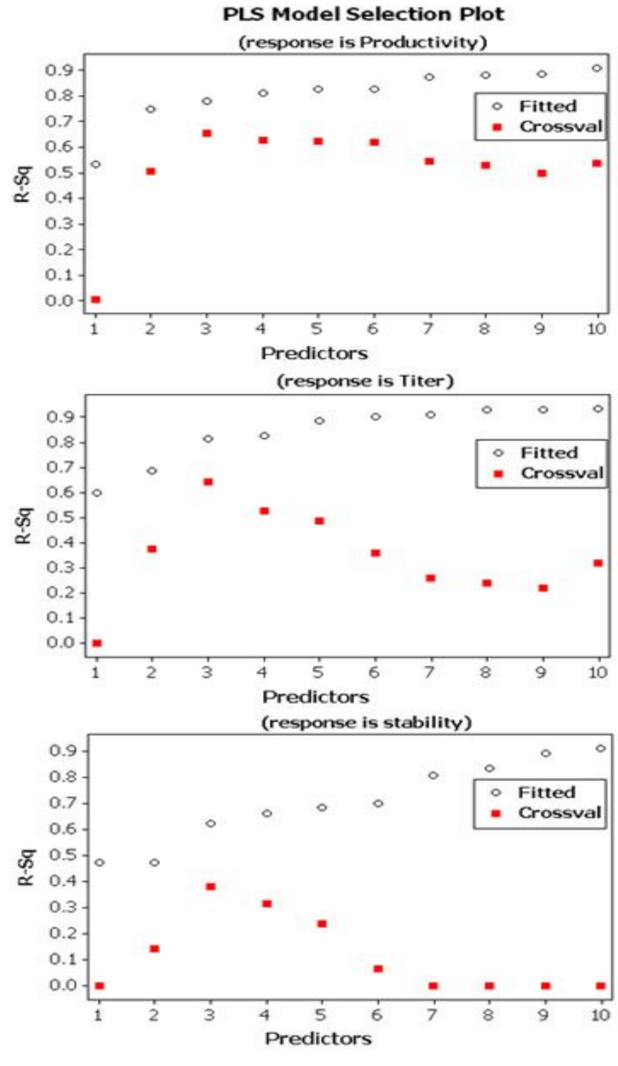
Дискриминантный анализ

Основная идея дискриминантного анализа заключается в том, чтобы определить, отличаются ли совокупности по среднему какой-либо переменной (или линейной комбинации переменных), и затем использовать эту переменную, чтобы предсказать для новых членов их принадлежность к то

$$x_0 = \frac{m_1 + m_2}{2} + \frac{\sigma^2}{m_2 - m_1}\ln\lambda_0$$







СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Многомерные вероятностные модели

Кластерный анализ

- это совокупность методов, позволяющих классифицировать многомерные наблюдения, каждое из которых описывается набором признаков

Цель: образование групп схожих между собой объектов, которые называются кластерами

Задачи:

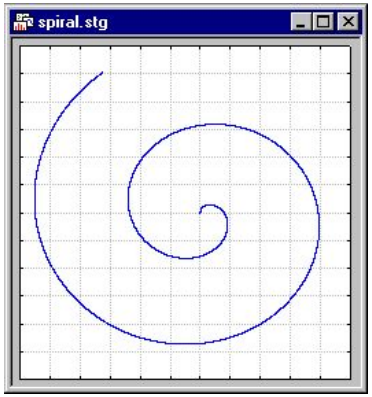
1. проведение классификации объектов с учетом признаков, отражающих сущность, природу объектов;
2. проверка выдвигаемых предположений о наличии некоторой структурной связи совокупности изучаемых объектов;
3. построение новых классификаций для слабоизученных объектов.

Пусть X — множество объектов, Y— множество номеров (имён, меток) кластеров. Задана функция расстояния между объектами $\rho(x,x')$. Имеется конечная обучающая выборка объектов $X^m = \{x_1 \ldots x_m\} \subset X$. Требуется разбить выборку на непересекающиеся подмножества, (кластеры), так, чтобы каждый кластер состоял из объектов, близких по метрике ρ, а объекты разных кластеров существенно отличались. При этом каждому объекту $x_i \in X$ приписывается номер кластера y_i.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Параметрическое представление — используемая в математическом анализе разновидность представления переменных, когда их зависимость выражается через дополнительную величину — параметр

Предположим, что функциональная зависимость y от x не задана непосредственно y = f(x), а через промежуточную величину — t.



Тогда формулы $x = \varphi(t)\ ;\ y = \psi(t)$

задают параметрическое представление функции одной переменной

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x)$$

__Пример__: уравнение спирали:

*y(t) = t*cos(t)*   *x(t) = t*sin(t)*

Уравнение гиперболы: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Уравнение тора:

$$\begin{cases} x(\varphi,\psi) = & (R + r\cos\varphi)\cos\psi \\ y(\varphi,\psi) = & (R + r\cos\varphi)\sin\psi \\ z(\varphi,\psi) = & r\sin\varphi \end{cases} \qquad \varphi,\psi \in [0, 2\pi)$$

Непараметрическое представление — используемая в математическо анализе разновидность представления переменных, когда их зависимс выражается прямой функциональной зависимостью

Уравнение тора:

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 - 4R^2\left(x^2 + y^2\right) = 0$$

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

- а) С непрерывным пространством и временем представляют собой функциональные или аналитические зависимости. Эти модели чаще всего отображают процессы, а не состояния.

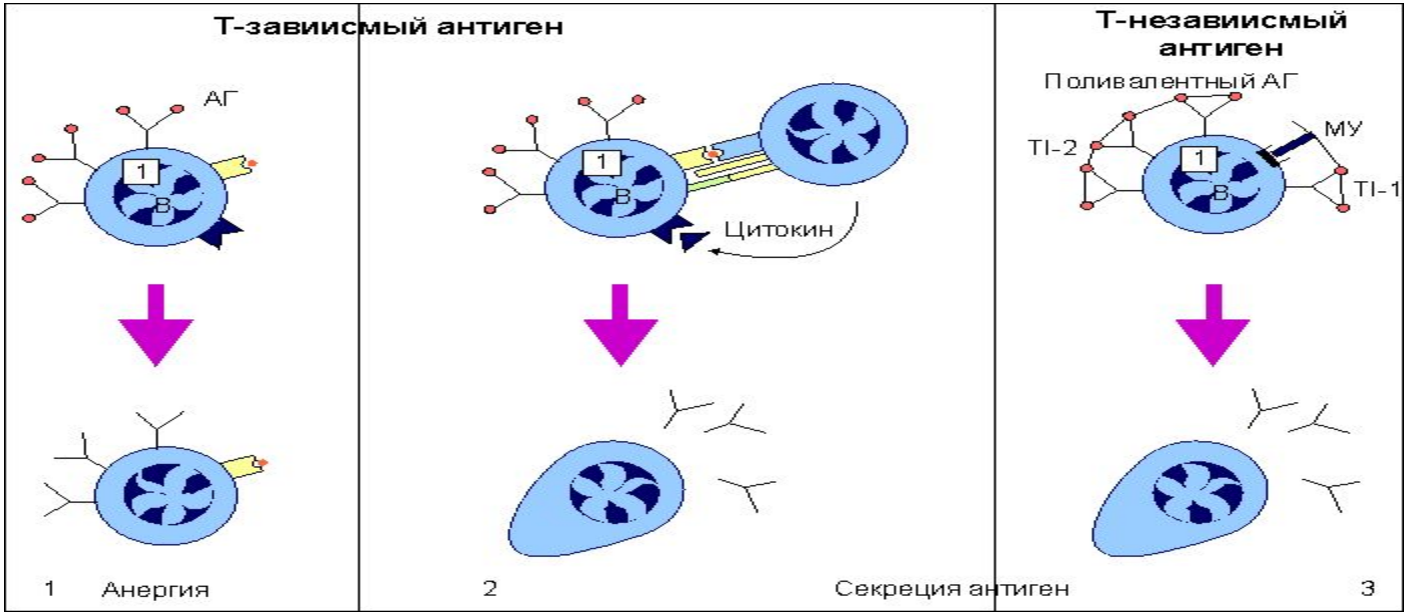
- ✔ *Пример:* в фармакологии при описании зависимости "доза-эффект" при описании физиологических процессов: обмена веществ, роста и развития и т. п.
- ✔ *Пример:* индекс напряженности функциональных систем. Р. М. Баевского

$$ИН = \frac{AMo}{2Mo \times \Delta X}$$

- б) С дискретным пространством и временем (так называется логические). Используются при решении ряда комбинаторных задач

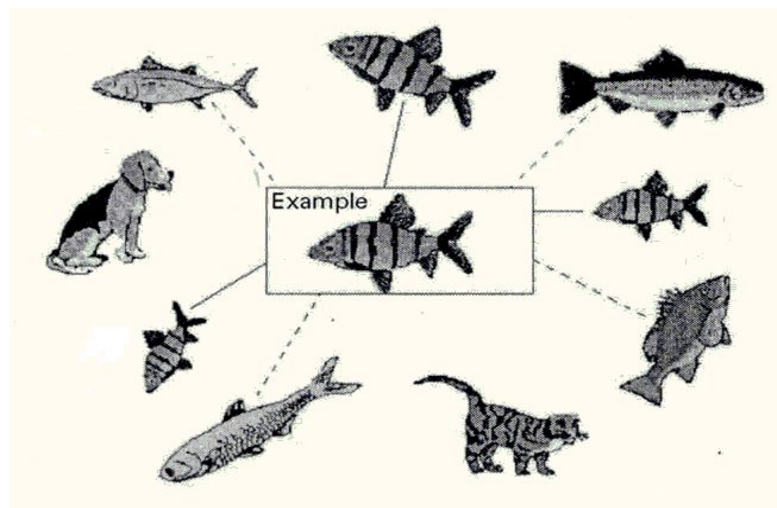
Вам надо решить задачу о наследственности. Вы, используя знания из области комбинаторики , можете просчитать различные варианты распределения хромосом, количество таких вариантов и другую нужную Вам информацию. Если, например, Вам необходимо сделать программу, которая в полуавтоматическом режиме, исходя из симптомов болезни, помогает выбрать подходящий способ лечения

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ



__Пример:__ задача многомерного параметрического распознавания биологического вида:

Физ.пар-р	М.пар.	Знач.
Длина к Ширина	P=L/W	2.42
Радиус жабер. контура без шир.глаза	S=r-d	20.5
Кол-во точек перегиба контура больше заданного	$\sum N(x)$ $\forall x<30°$	17



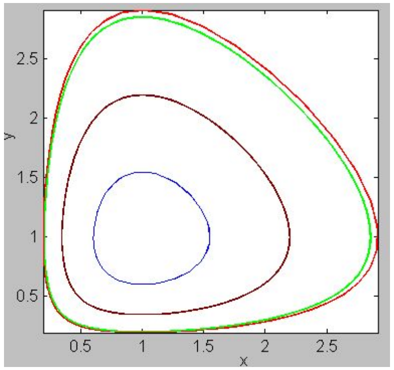
КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

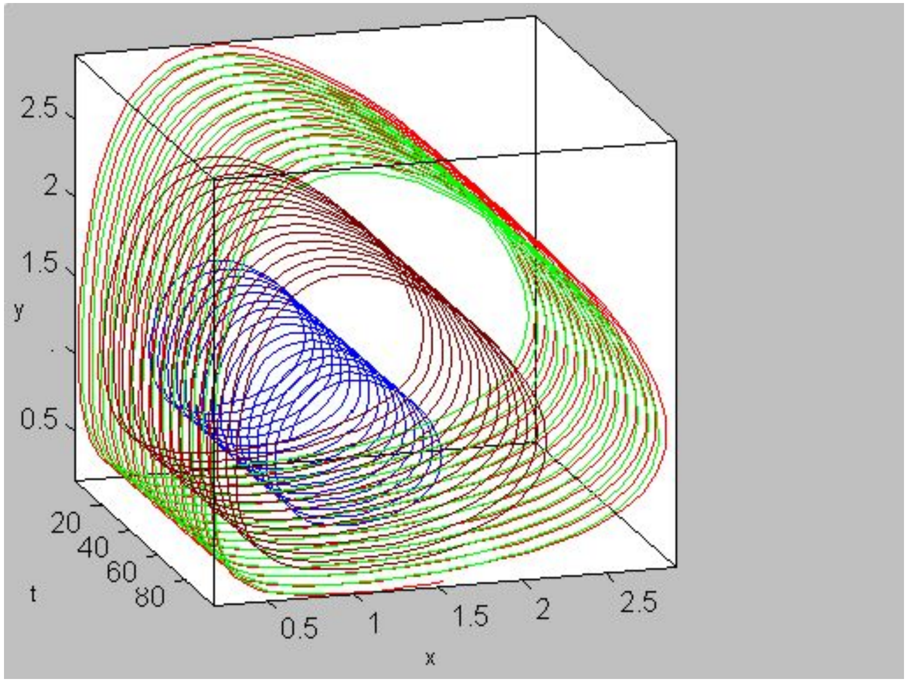
Линейная модель — математическая модель системы, оператор которой обладает свойством линейности
Свойства и характеристики линейных систем не зависят от их состояния.

Пример: модель совместного существования двух биологических видов (популяций) типа "хищник - жертва", называемую моделью Вольтерра - Лотки

dx/dt = a1 x - b1 yx

dy/dt = - a2 y + b2 yx





КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Нелинейная модель — это модель динамической системы, в которой протекают процессы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. Свойства и характеристики нелинейных систем зависят от их состояния.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x),$$

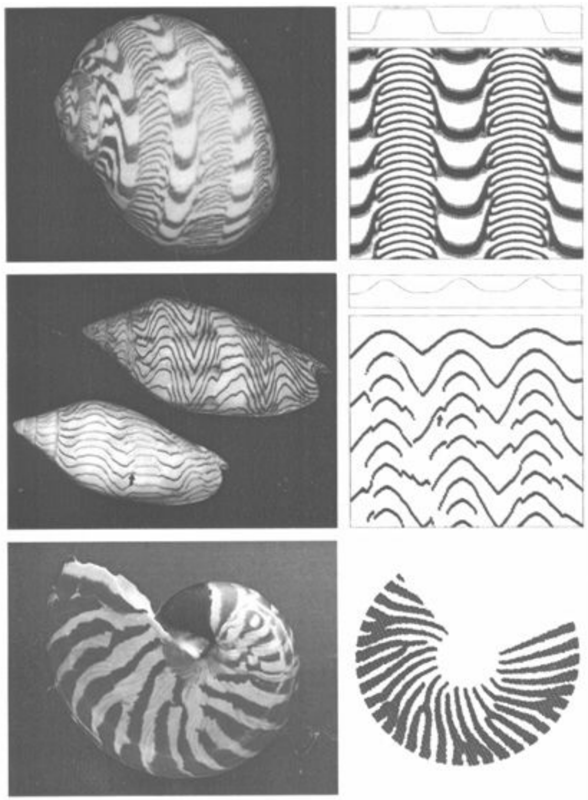


Рис. 36. Имитационные модели Х. Майнхардта (справа),

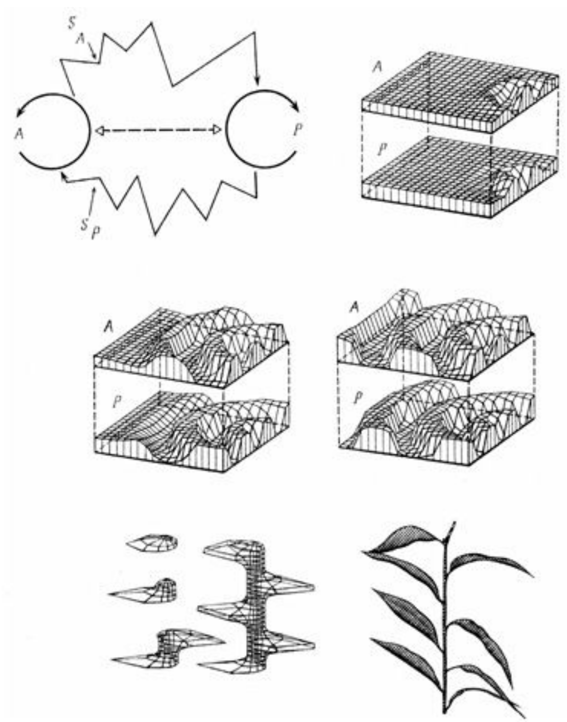


Рис. 35. Компьютерные модели Х. Майнхардта

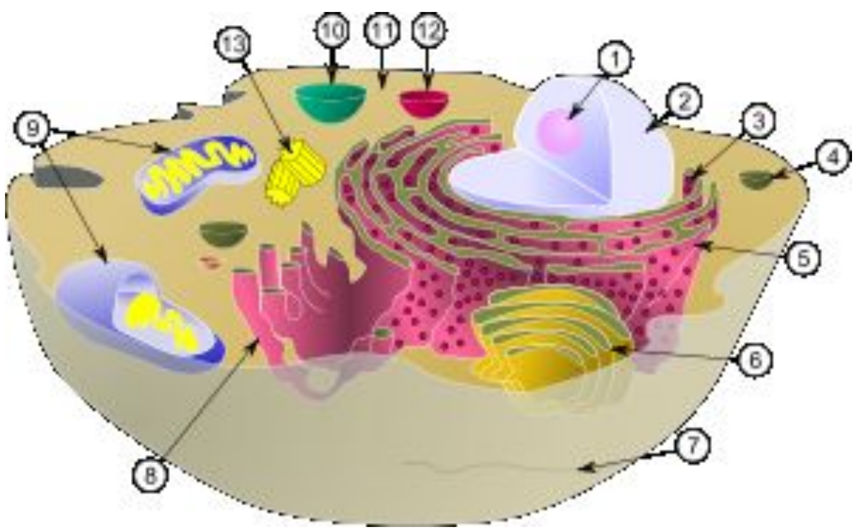
(Meinhardt, 1984; по: Исаева, Преснов, 1990)

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Классификация по способу представления объекта

Структурные и функциональные модели

Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования. *Функциональные модели* не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «чёрного ящика»
Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».



цитоплазма вместе с её компонентами (органеллами), в типичной животной клетке:
(1) Ядрышко
(2) Ядро
(3) Рибосома (маленькие точки)
(4) Везикула
(5) Шероховатый эндоплазматический ретикулум (ER)
(6) Аппарат Гольджи
(7) Цитоскелет
(8) Гладкий эндоплазматический ретикулум
(9) Митохондрия
(10) Вакуоль
(11) Цитоплазма
(12) Лизосома
(13) Центриоль и Центросома

КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Классификация по способу представления объекта

Содержательные и формальные модели

Гипотеза (такое могло бы быть) - пробное описание явления, причем автор либо верит в его возможность, либо считает даже его истинным

Пример: Происхождение человека от обезьяны.
Пример: Перцептрон МакКалока-Питса

Эвристическая модель (количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела) - сохраняет лишь качественное подобие реальности и даёт предсказания только «по порядку величины».

Пример: Формула Перепада давления на газообменной части каналов мембраны клетки

$$\Delta p = \xi \rho v^2 \frac{1}{2D_e}, \quad \xi = \frac{0{,}316}{\mathrm{Re}^{0{,}25}}.$$