

ЕГЭ 2012

Математика

C1

C2

C3

C4

C5

C6

Р. К. Гордин

Задача C4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

§ 5. Как находить высоты и биссектрисы треугольника?

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

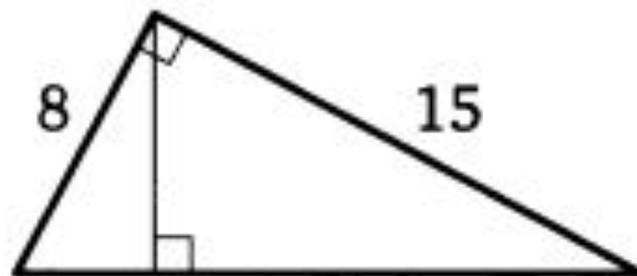
Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

ПРИМЕР 1.

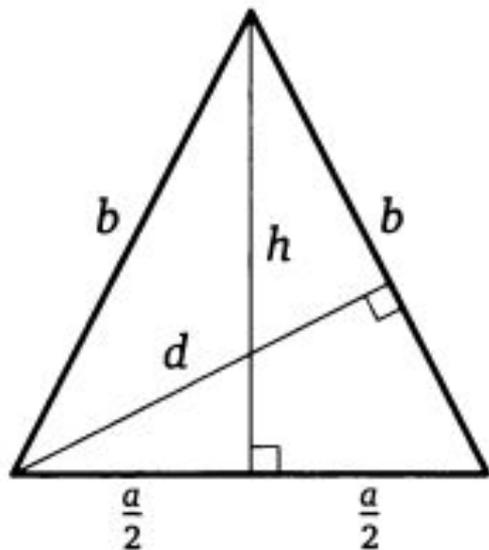
Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.

Ответ: $\frac{120}{17}$.



ПРИМЕР 2.

Дан треугольник со сторонами a , b и b . Найдите высоту, опущенную на сторону, равную b .



Ответ: $\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$.

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

1

«площадной» способ

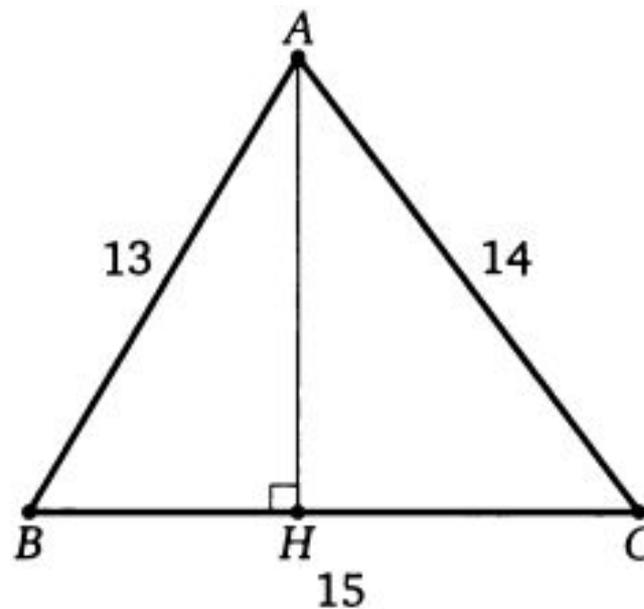
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = \frac{1}{2} ah$$

Ответ: $\frac{56}{5}$.

ПРИМЕР 3.

Дан треугольник со сторонами 13,14,15.
Найдите высоту, проведённую к
большей стороне.



ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

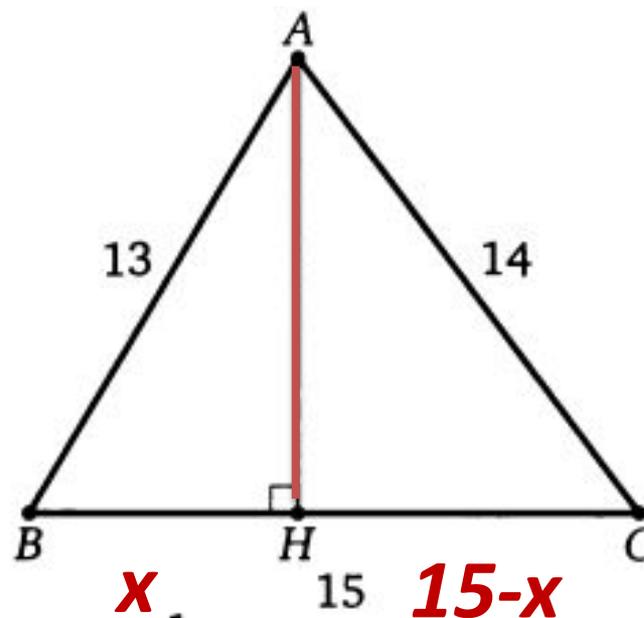
Разработано МИОО

2

Уравнение на **словах**
теоремы Пифагора

ПРИМЕР 3.

Дан треугольник со сторонами 13,14,15.
Найдите высоту, проведённую к
большей стороне.



Ответ: $\frac{56}{5}$.

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

ПРИМЕР 3.

Дан треугольник со сторонами 13,14,15.
Найдите высоту, проведённую к
большей стороне.

3

способ

По теореме косинусов

+ основное тригонометрическое

тождество

+ формула площади по двум сторонам и

углу между ними

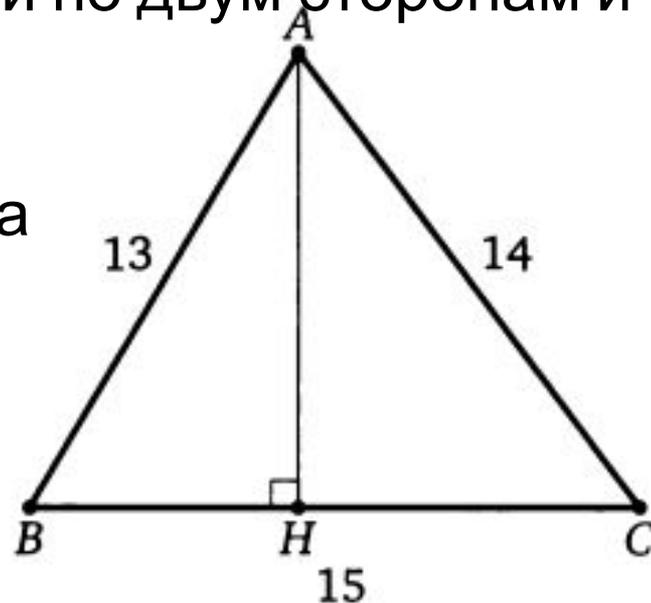
4

способ

По теореме косинусов

+ решение прямоугольного треугольника

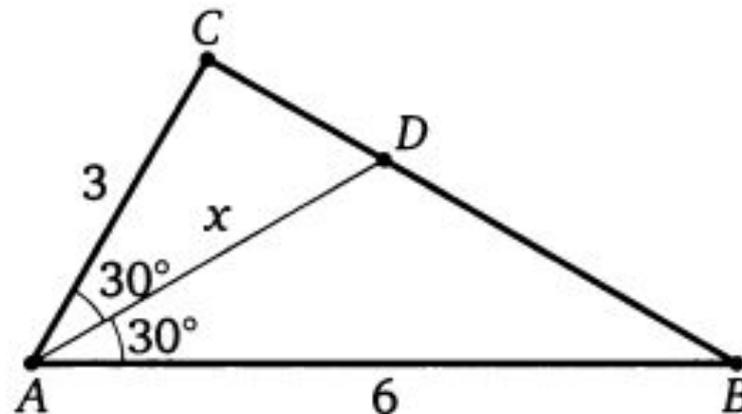
ABH



Ответ: $\frac{56}{5}$.

Задача 5 из диагностической работы

Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60° . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.



1 способ «площадной» подход

$$S = \frac{absin\alpha}{2}$$

$$S_{ACD} + S_{ABD} = S_{ACB}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

С1

С2

С3

С4

С5

С6

Задача 5 из диагностической работы

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

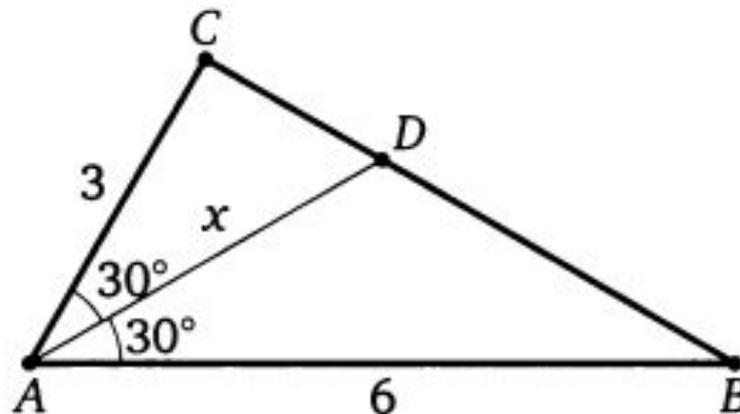
Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60° . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла



2 способ

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$\triangle ABC$ - прямоугольный $\Rightarrow \triangle ADC$ -
прямоугольный

Ответ: $2\sqrt{3}$.

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

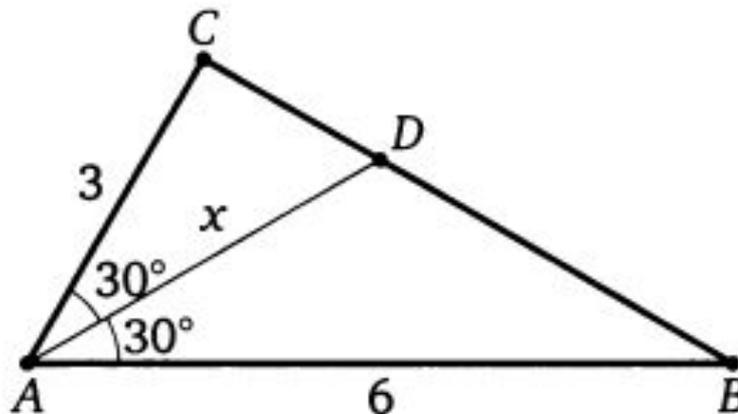
Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

Задача 5 из диагностической работы

Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60° . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла



3 способ

$CD:DB=AC:AB$ - свойство биссектрисы треугольника

+ теорема косинусов $CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

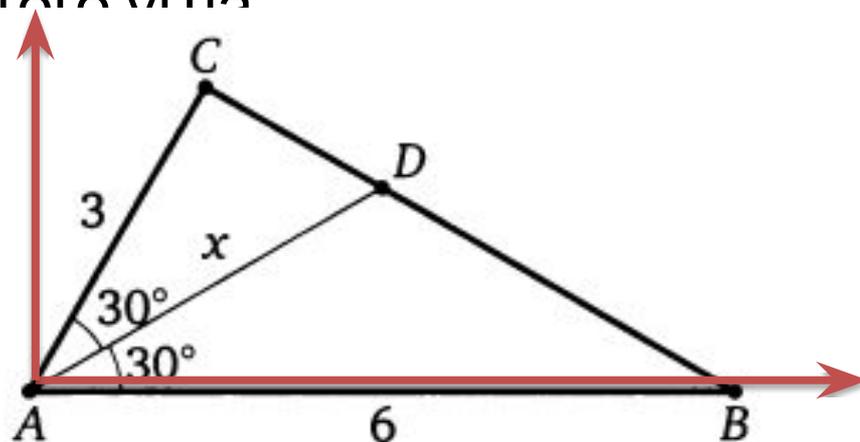
Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

Задача 5 из диагностической работы

Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60° . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла



4 способ

Метод координат + уравнение

$$C(3\cos 60^\circ; 3\sin 60^\circ)$$

$$D(x\cos 30^\circ; x\sin 30^\circ)$$

$$D \in BC$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

5 способ

$$D = BC \cap AD$$

Уравнение прямой BC по координатам двух точек
Уравнение прямой AD по началу координат и угловому коэффициенту

$$AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

Задача 5 из диагностической работы

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

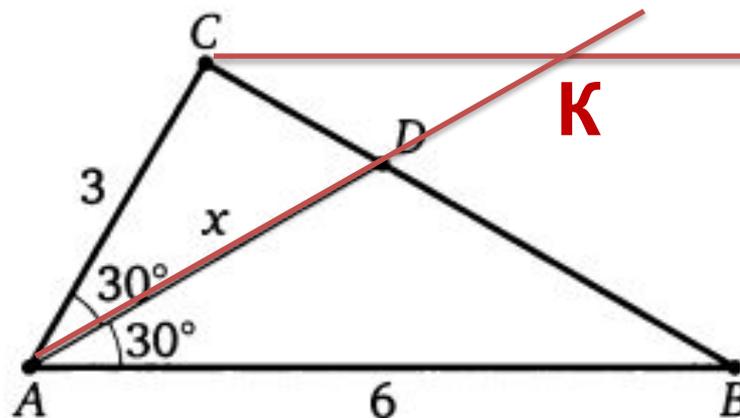
Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

Две стороны треугольника равны 3 и 6, а угол между ними равен 60° . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.



6 способ

дополнительные построения + подобие треугольников

1. $\triangle ACK$ - равнобедренный $\Rightarrow AK$
2. $\triangle CDK \sim \triangle ADB$, $k=0,5 \Rightarrow AD$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

ПРИМЕР 4.

Стороны треугольника равны a и b , а угол между ними равен γ . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины этого угла.

Решение. Пусть S — площадь данного треугольника, S_1 и S_2 — площади треугольников, на которые указанная биссектриса, равная l , разбивает данный треугольник.

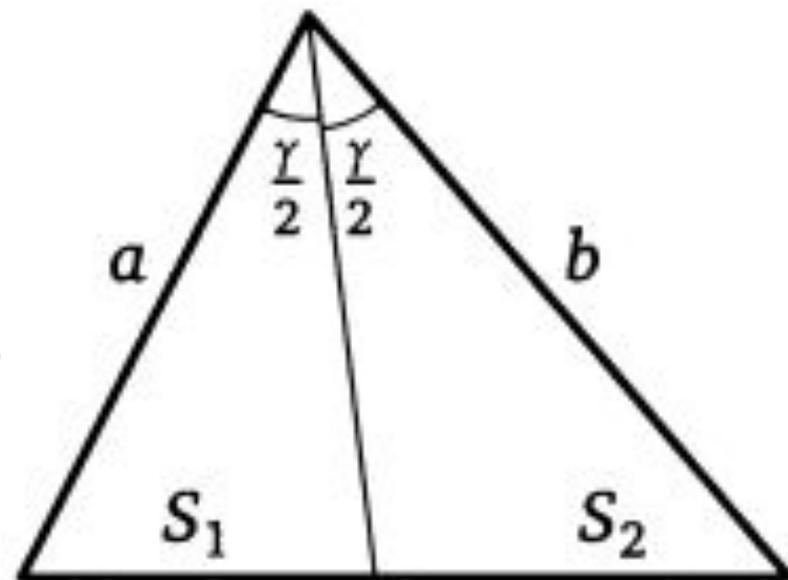
Тогда $S = S_1 + S_2$, или

$$\frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}al \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}bl \sin \frac{\gamma}{2},$$

$$\text{или } ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(a+b)l \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Поскольку $\sin \frac{\gamma}{2}$ отличен от нуля, $l = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Ответ: $\frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}$.



ПРИМЕР 5.

Вычислите биссектрису треугольника ABC , проведённую из вершины A , если $BC = 18$, $AC = 15$, $AB = 12$.

Свойство биссектрисы + теорема косинусов

$$\frac{CK}{BK} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

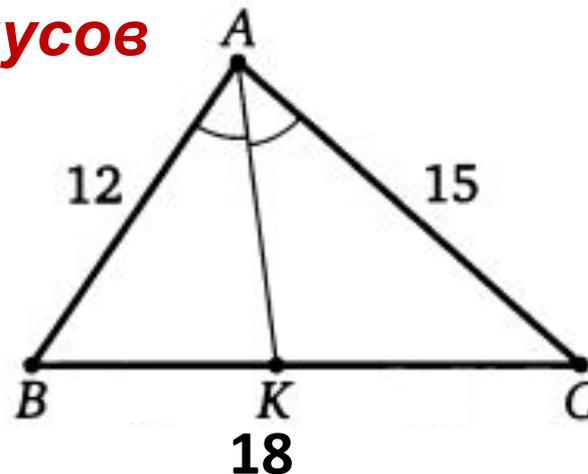
Поэтому $BK = \frac{4}{9}BC = \frac{4}{9} \cdot 18 = 8$.

По теореме косинусов из треугольника ABC находим, что

$$\cos \angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{144 + 324 - 225}{2 \cdot 12 \cdot 18} = \frac{9}{16}.$$

Следовательно,

$$AK^2 = AB^2 + BK^2 - 2AB \cdot BK \cos \angle B = 144 + 64 - 108 = 100, \quad AK = 10.$$



Отве 10

т:

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

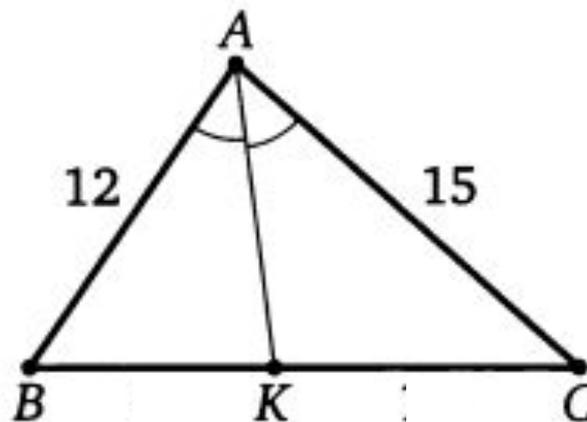
Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

ПРИМЕР 5.

Вычислите биссектрису треугольника ABC , проведённую из вершины A , если $BC = 18$, $AC = 15$, $AB = 12$.



18

2 способ

по формуле для квадрата биссектрисы.

Утверждение. Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

Ответ: 10

Т:

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Утверждение. Квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

Доказательство. Пусть M — точка пересечения продолжения биссектрисы AK треугольника ABC с описанной около этого треугольника окружностью. Тогда треугольник ACK подобен треугольнику AMB по двум углам. Поэтому

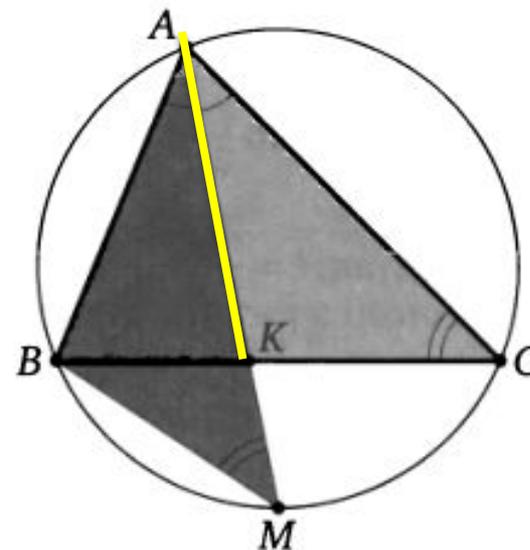
$$\frac{AK}{AB} = \frac{AC}{AM}, \quad \text{или} \quad AK(AK + KM) = AB \cdot AC,$$

$$AK^2 + AK \cdot KM = AB \cdot AC.$$

Следовательно,

$$AK^2 = AB \cdot AC - AK \cdot KM = AB \cdot AC - BK \cdot KC$$

($AK \cdot KM = BK \cdot KC$ по теореме о произведениях отрезков пересекающихся хорд). Что и требовалось доказать.



ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

2
способ

$BK = 12/27$ от 18; $BK = 8$.

$CK = BC - BK = 18 - 8 = 10$.

По формуле для квадрата биссектрисы треугольника находим, что

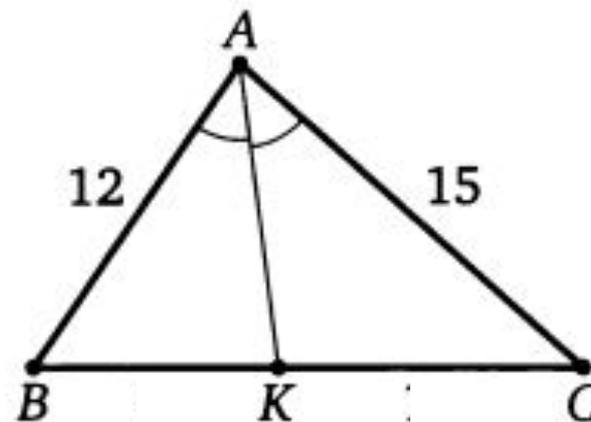
$$AK^2 = AB \cdot AC - BK \cdot CK = 12 \cdot 15 - 8 \cdot 10 = 180 - 80 = 100.$$

Отве 10

т:

ПРИМЕР 5.

Вычислите биссектрису треугольника ABC , проведённую из вершины A , если $BC = 18$, $AC = 15$, $AB = 12$.



18

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

задач

5.1. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника равны 12 и 20 соответственно. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.

5.2. Найдите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, если известно, что основание этой высоты делит гипотенузу на отрезки, равные 1 и 4.

5.3. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, разбивает её на отрезки, равные 2 и 1, считая от вершины треугольника. Найдите эту высоту.

5.1. 9,6. 5.2. 2. 5.3. $\sqrt{5}$.

8 ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ задач

ЕГЭ 2012
Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

5.4. Стороны треугольника равны 10, 17 и 21. Найдите высоту треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.

5.5. В треугольнике ABC известно, что $AB = a$, $AC = b$, $\angle BAC = 120^\circ$. Найдите биссектрису AM.

5.6. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины прямого угла.

5.4. 8. 5.5. $\frac{ab}{a+b}$. 5.6. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

ЕГЭ 2012

Математика

Р. К. Гордин

Задача С4

Геометрия
Планиметрия

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Яценко

Разработано МИОО

8 ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ задач

5.7. В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM.

5.8. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

5.7. $\frac{24\sqrt{3}}{7}$. 5.8. 4,8.