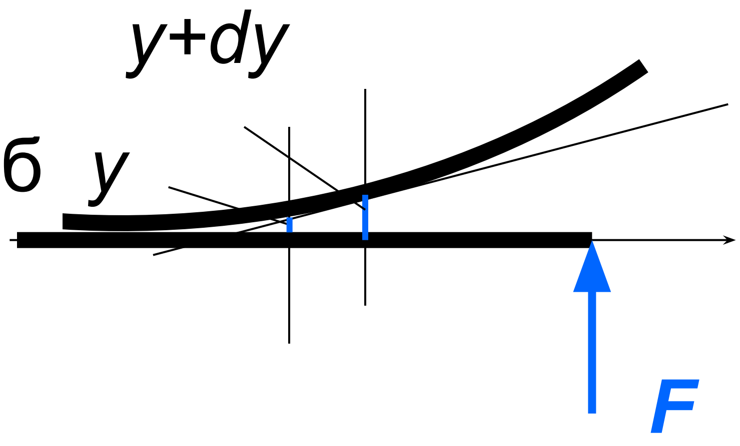
Изгиб
Расчет на жесткость

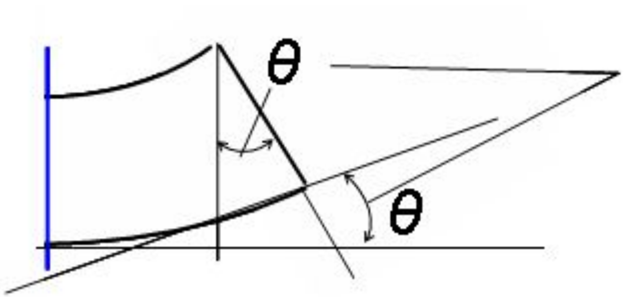
Деформации при изгибе

При изгибе балки в качестве деформаций рассматриваются

прогиб «у» (перемещение сечения вверх или вниз от первоначального положения)



угол поворота сечения «θ»



<u>угол поворота сечения-</u> угол между касательной к изогнутой оси и горизонталью

Деформации при изгибе

Из математики известно уравнение для определения кривизны линии

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$$

В области малых перемещений величиной $(y')^2$ можно пренебречь и тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey} = y''$$ и, учитывая $$\sigma = \frac{M}{I_x} y$$

имеем $$\boxed{EI_x y'' = \pm M}$$

уравнение изогнутой оси балки

Деформации при изгибе

или в виде

$$y'' = \frac{M}{EI_x}$$

Интегрируя уравнение первый раз получают угол поворота сечения, второй раз – прогиб.

Но при интегрировании необходимо определять постоянные интегрирования из граничных условий, которыми являются условия закрепления балки.

Деформации при изгибе

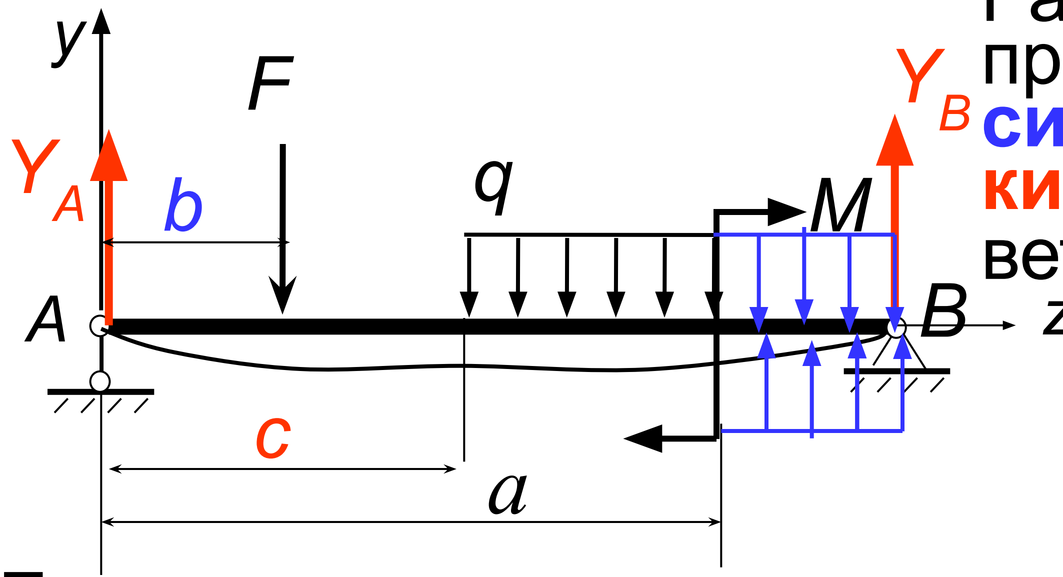
Из этих формул сформулированы различные методы определения деформаций.

Для балок постоянной жесткости наиболее часто используется метод начальных параметров, в которых в качестве постоянных интегрирования используется угол поворота в начале координат θ_0, и прогиб в начале координат y_0.

При этом необходимо выполнять некоторые приемы при решении.

Деформации при изгибе

1. Принимается единое начало координат, помещают его на левом конце балки.



Растояния до точек приложения **момента**, **силы** и начала **нагрузки** обозначаются соответственно: ***a***, **b**, **c**.

Если нагрузка заканчивается не доходя до рассматриваемого сечения, ее продлевают до сечения.

На участке продления добавляют нагрузку противоположного знака.

Деформации при изгибе

Универсальные уравнения для определения углов поворота

$$EI_x\theta = EI_x\theta_0 + \sum\frac{M(z-a)}{1!} + \sum\frac{F(z-b)^2}{2!} + \sum\frac{q(z-c)^3}{3!}$$

прогибов

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x\theta_0 z + \sum\frac{M(z-a)^2}{2!} + \sum\frac{F(z-b)^3}{3!} + \sum\frac{q(z-c)^4}{4!}$$

где θ - угол поворота в исследуемом сечении;

y - прогиб в исследуемом сечении;

y_0 - прогиб в начале координат;

θ_0- угол поворота в начале координат;

z- расстояние от начала координат до сечения, где определяем перемещение;

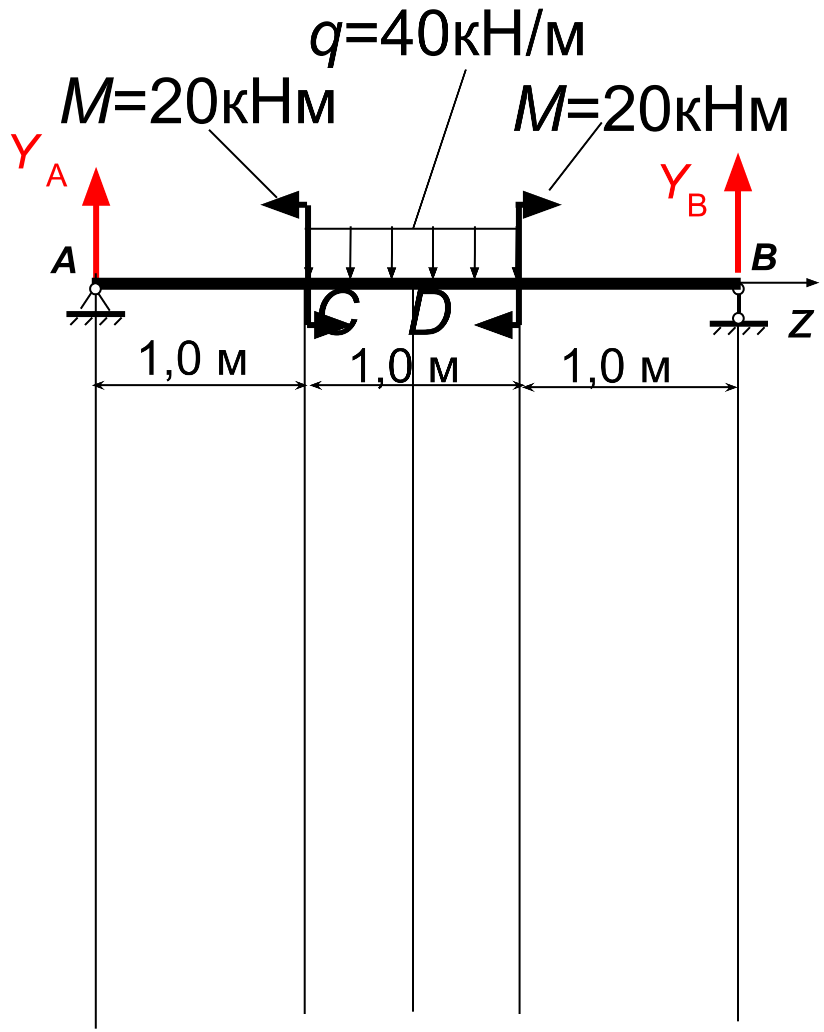
Прямой поперечный изгиб, определение прогибов методом начальных параметров.

Для заданной схемы балки требуется:

1. построить эпюры поперечных сил $\boldsymbol{Q}$ и изгибающих моментов $\boldsymbol{M}$;
2. подобрать балку двутаврового сечения из условия прочности, принимая $\boldsymbol{\sigma}_{adm}$ = 160 МПа;
3. определить жесткость балки, принимая $E = 2 \cdot 10^{11}$Па
4. найти прогиб балки в точке C и D методом начальных параметров.

Пример решения задачи на изгиб

1. Вычерчиваем расчетную схему балки в масштабе с указанием размеров и нагрузок

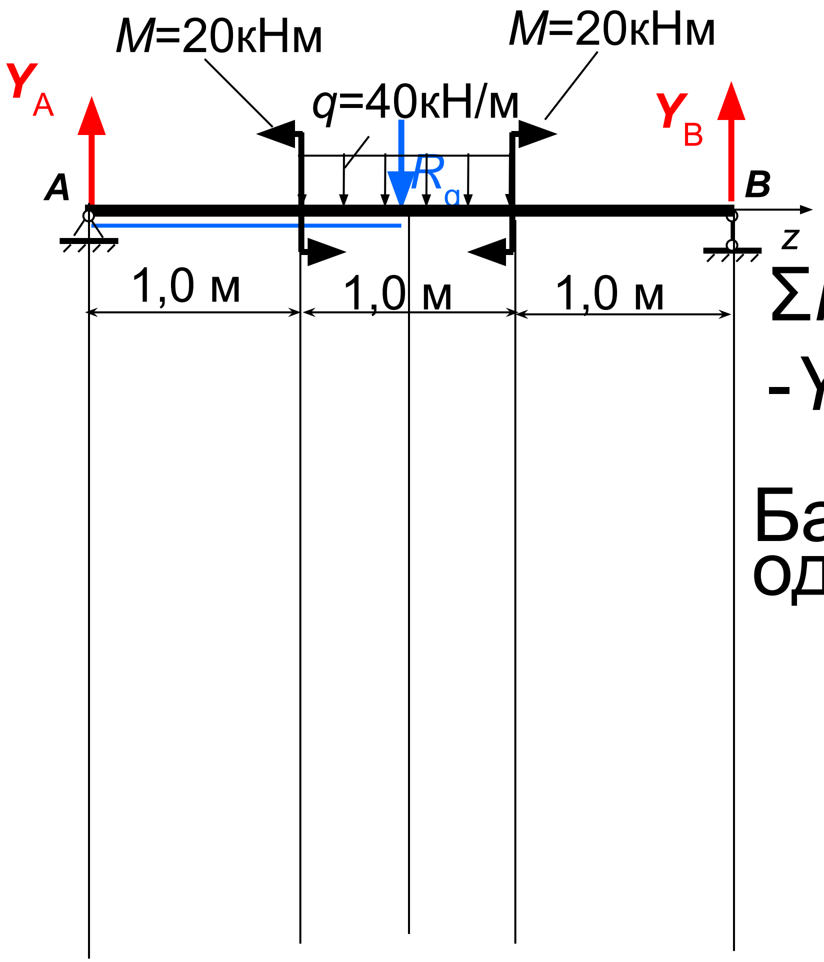


2. Определяем реакции, рассматривая условие равновесия

$$\Sigma M_{(A)} = 0;\ Y_B \cdot 3 + M - M - q \cdot 1 \cdot 1{,}5 = 0$$

$$Y_B = q \cdot 1 \cdot 1{,}5/3 = 40 \cdot 0{,}5 = 20\text{кН}.$$

$$Y_B = 20 \text{ кН}.$$



$$\Sigma M_{(B)} = 0;$$

$$-Y_A \cdot 3 + M - M + q \cdot 1 \cdot 1{,}5 = 0;$$

$$Y_A = 20 \text{ кН}$$

Балка симметричная, реакции одинаковы.

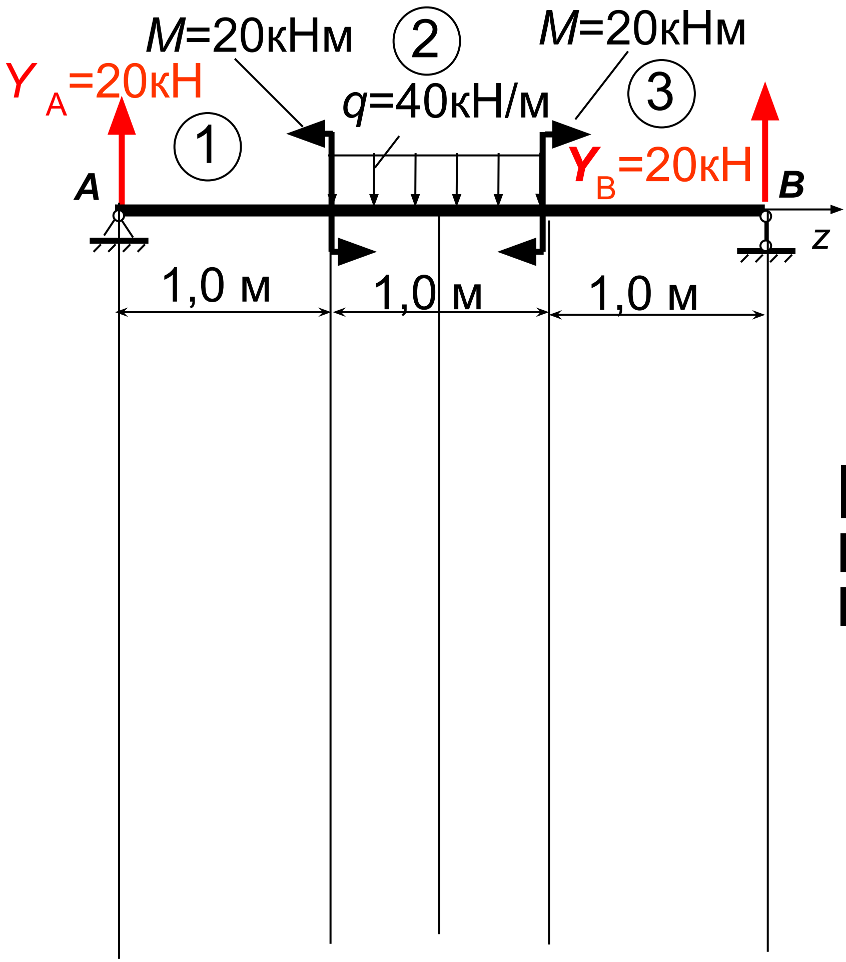
<u>Проверка</u>

$$\Sigma У = 0;\quad Y_A + Y_B - q \cdot 1 = 0;$$

$$20 + 20 - 40 = 0;$$

$$0 = 0.$$

3. Балка разбивается на участки со своим законом изменения нагрузки



Балку разбиваем на 3 участка

1-й участок:

$$0 \le z_1 \le 1\text{м}$$

2-й участок:

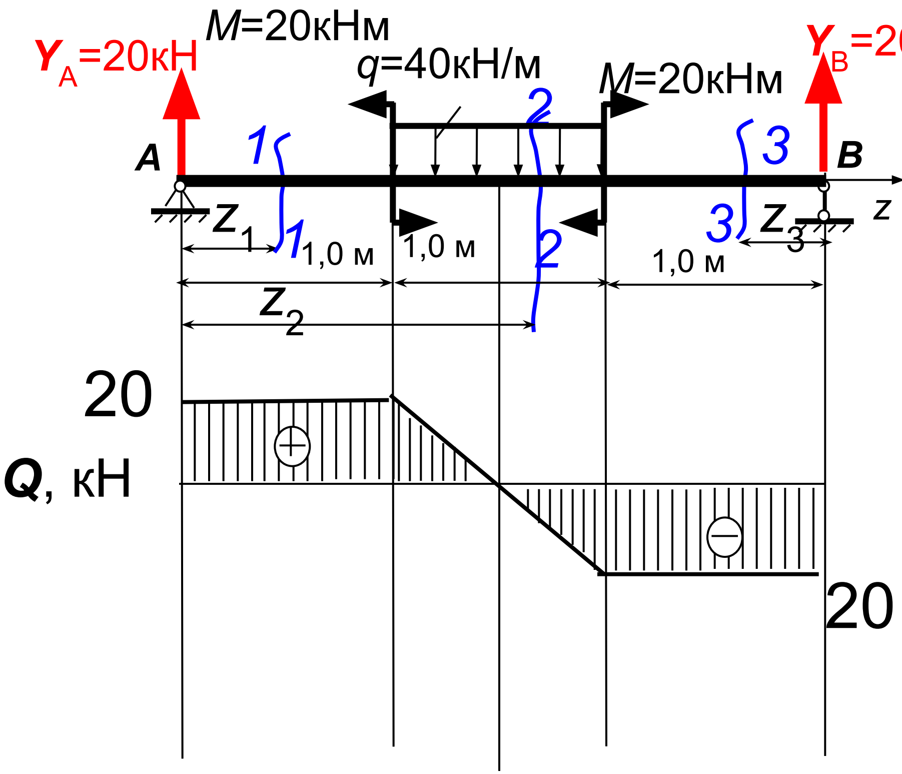
$$1\text{м} \le z_2 \le 2\ \text{м}$$

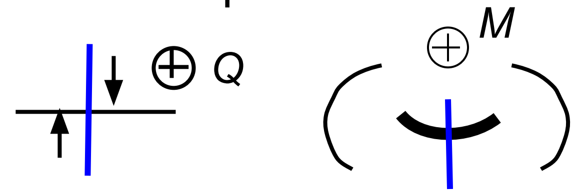
Меняем направление оси z, помещая начало координат в точку B

3-й участок:

$$0 \le z_3 \le 1\ \text{м}$$

4. В пределах каждого участка проводим сечения
Записываем уравнения для определения Q_z и M_z,
учитывая правило знаков





Аналитические выражения для **Q** в каждом сечении и значения для сечений на концах участков :

$Q_{z1} = Y_A$;

$Q_{z1=0}$=20 кН; $Q_{z1=1}$=20 кН.

$Q_{z2} = Y_A - q(z_2-1)$;

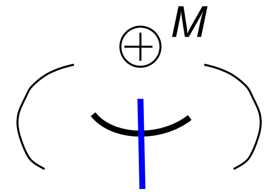
$Q_{z2=1}$=20 кН. $Q_{z2=2}$= -20 кН.

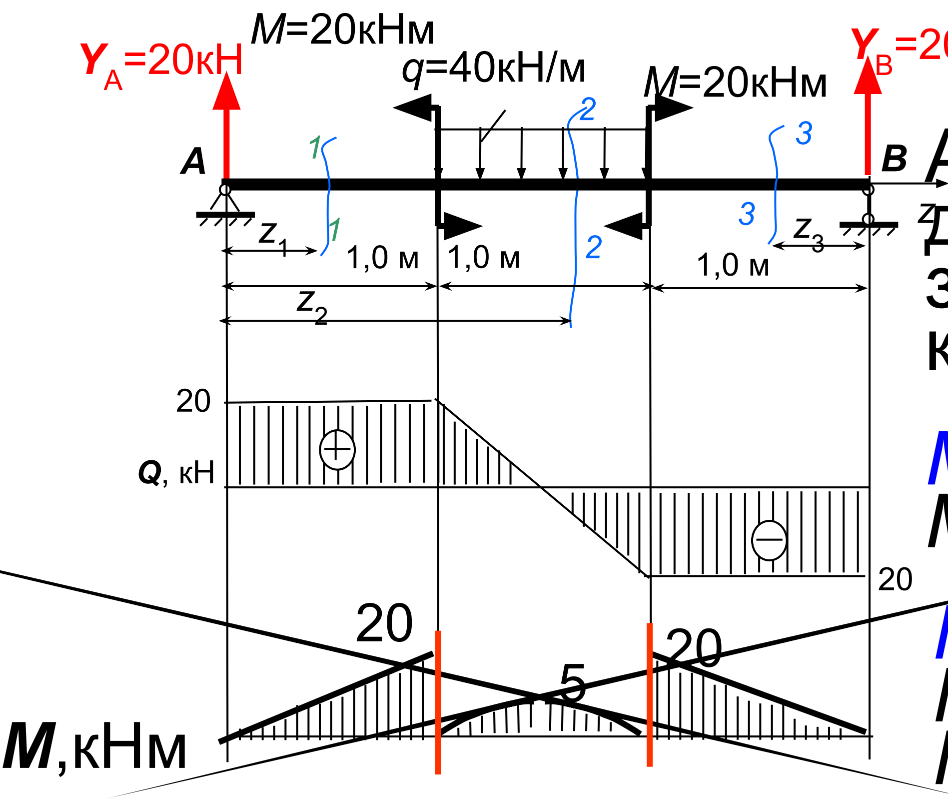
$Q_{z3} = - Y_B$;

$Q_{z3=0}$=-20 кН; $Q_{z3=1}$=-20 кН.

При z_2=1,5 м, Q_{z2}=0.

Строим эпюру поперечных сил Q





Аналитические выражения для $\boldsymbol{M}$ в каждом сечении и значения для сечений на концах участков :

$M_{z1} = Y_A \cdot z_1;$

$M_{z1=0} = 0; \quad M_{z1=1} = 20$ кНм.

$M_{z2} = Y_A \cdot z_2 - q(z_2 - 1)^2/2);$

$M_{z2=1} = 20$ кНм; $\quad M_{z2=1,5} = 5$ кНм;

$M_{z2=2} = 20$ кНм;

$M_{z3} = Y_B z_3;$

$M_{z3=0} = 0; \quad M_{z3=1} = 20$ кНм.

Строим эпюру изгибающих моментов M_z

Опасные сечения - сечения с изгибающим моментом, равным 20 кНм.

Подбор сечения

Подбор сечения выполняем из условия прочности при изгибе

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x}{W_{\text{н.о.}}} \le \sigma_{adm}}$$

откуда

$$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{M_x}{\sigma_{adm}}$$

где $W_{\text{н.о.}}$ – момент сопротивления относительно нейтральной оси, которая в сечении балки совпадает с осью x

$$W_{\text{н.о.}} \ge \frac{20 \cdot 10^{-3}}{160} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}$$ м^3= 125 см^3.

Т

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения, $см^2$	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей					
									X-X				Y-Y	
	h	b	s	t	R	r			I_x, $см^4$	W_x, $см^3$	i_x, см	S_x, $см^3$	I_y, $см^4$	W
					не более									
	мм													
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182

Подбор сечения

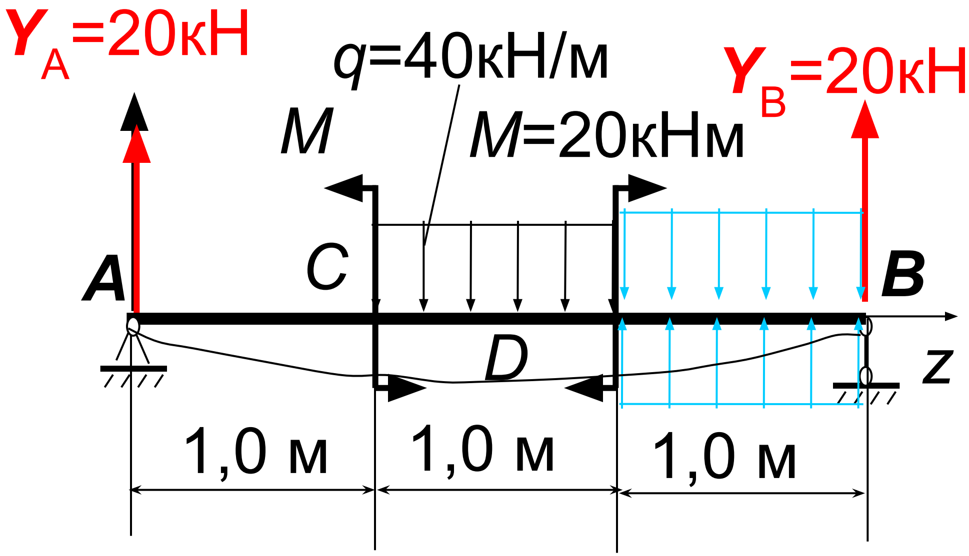
1) Двутавровый профиль, материал Сталь 3

Ближайшее к полученному значению момента сопротивления соответствует двутавру № 18, для которого $W_{н.о.} = 143$ см^3 .

Жесткость балки с сечением двутавра №18

$$EI_x = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8} = 2580 \cdot 10^{3} \text{Нм}^2 = 2580 \text{кНм}^2$$

Пример определения деформаций при изгибе



Начало координат в точке A

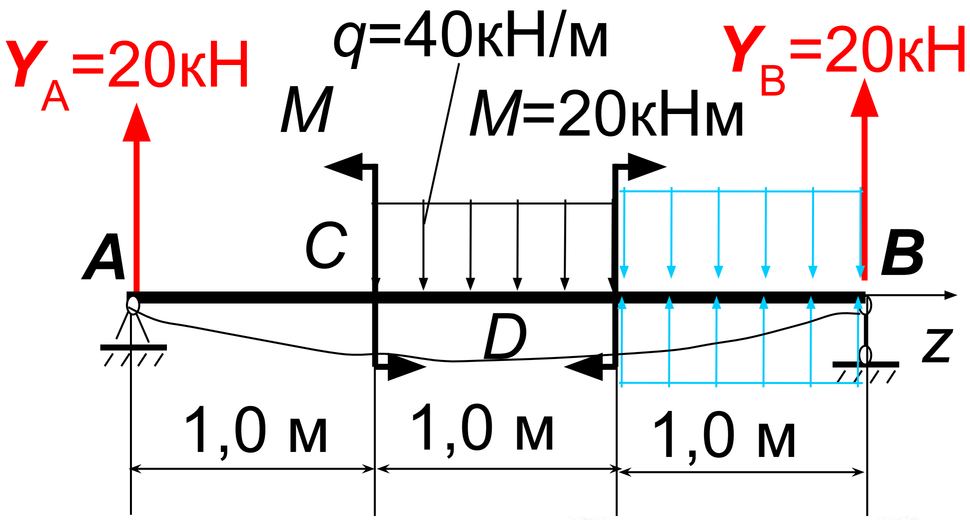
В точке A – опора, поэтому

$$y_A = y_0 = 0$$

Но угол поворота на опоре не равен 0, поэтому, чтобы определить θ_0, используем второе условие закрепления.

$$y_B = 0.$$

Деформации при изгибе



$$EIy_B = EI\theta_0 z_B - \frac{M(z_B-1)^2}{2} + \frac{M(z_B-2)^2}{2} + \frac{Y_A(z_B-0)^3}{6} - \frac{q(z_B-1)^4}{24} + \frac{q(z_B-2)^4}{24} = 0$$

$$EIy_B = EI\theta_0 \cdot 3 - \frac{20(3-1)^2}{2} + \frac{20(3-2)^2}{2} + \frac{20(3-0)^3}{6} - \frac{40(3-1)^4}{24} + \frac{40(3-2)^4}{24} = 0$$

$$EI\theta_0 \cdot 3 + 35 = 0 \qquad EI\theta_0 = -11{,}7 \text{ кНм}^2$$

Деформации при изгибе

$$EI_x y_C = EI_x \theta_0 z_C + \frac{Y_A (z_C - 0)^3}{6}$$

z_C =1м; $EIy_C = -11,7 \cdot 1 + \frac{20(1-0)^3}{6} = -8,4 \text{кНм}^3$

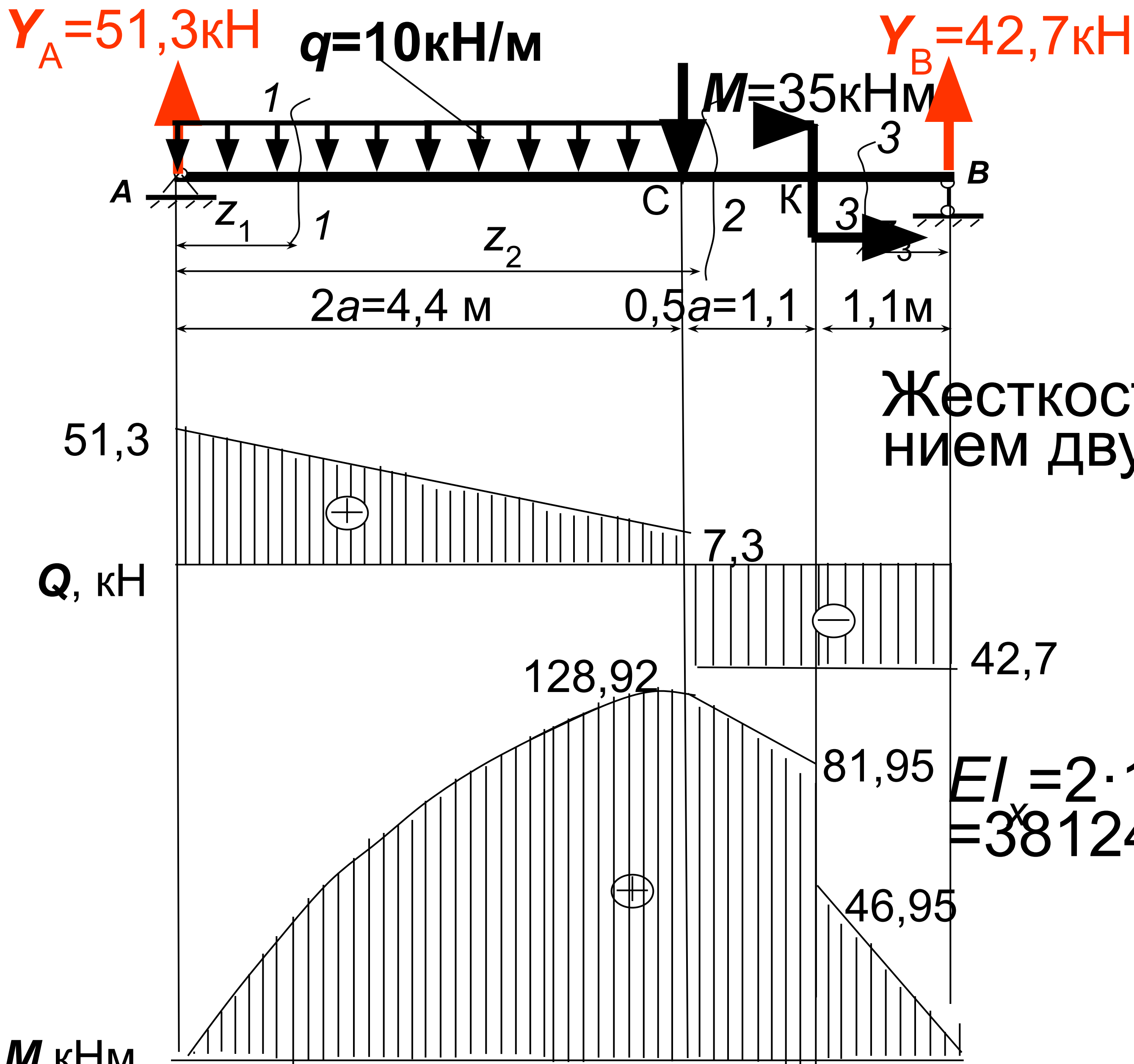
$$y_C = -\frac{8,4}{2580} = -0,003 \text{м} = -3 \text{ мм}$$

$$EI_x y_D = EI_x \theta_0 z_D + \frac{Y_A (z_D - 0)^3}{6} - \frac{M (z_D - 1)^2}{2} - \frac{q (z_D - 1)^4}{24}$$

z_D=1,5м $EIy_D = -11,7 \cdot 1,5 - \frac{20(1,5-1)^2}{2} + \frac{20(1,5-0)^3}{6} - \frac{40(1,5-1)^4}{24} = -8,9 \text{кНм}^3$

$$y_D = -\frac{8,9}{2580} = -0,0034 \text{ м} = -3,4 \text{ мм}$$

ИЗГИБ Расчет на жесткость



Жесткость балки с сечением двутавра№40

$EI_x = 2\cdot 10^{11}\cdot 19062\cdot 10^{-8} = 38124 кНм^2$

Для определения начальных параметров, а именно θ_0 (y_0=0), рассмотрим условие закрепления балки

$$EI_x y_B = \underset{0}{\cancel{EI_x y_0}} + EI_x\theta_0 z + \sum\frac{M(z-a)^2}{2!} + \sum\frac{F(z-b)^3}{3!} + \sum\frac{q(z-c)^4}{4!} = 0$$

z- расстояние от начала координат до сечения, где определяем перемещение

z_B=6,6 м

$$EI_x y_B = EI_x\theta_0 6{,}6 - \frac{M(6{,}6-5{,}5)^2}{2} + \frac{Y_A(6{,}6-0)^3}{6} - \frac{F(6{,}6-4{,}4)^3}{6} - \frac{q(6{,}6-0)^4}{24} + \frac{q(6{,}6-4{,}4)^4}{24} = 0$$

$$EI_x\theta_0 6{,}6 - \frac{35\cdot 1{,}1^2}{2} + \frac{51{,}3\cdot 6{,}6^3}{6} - \frac{50\cdot 2{,}2^3}{6} - \frac{10\cdot 6{,}6^4}{24} + \frac{10\cdot 2{,}2^4}{24} = 0$$

$$EI_x\theta_0 = -237{,}5$$

Для определения прогиба в точке С записываем уравнение прогибов для данного сечения

z_C =4,4м

$$EI_x y_C = EI_x \theta_0 4{,}4 + \frac{51{,}3 \cdot 4{,}4^3}{6} - \frac{10 \cdot 4{,}4^4}{24} =$$

$$= -1045 + 728{,}3 - 156{,}2 = -472{,}9\text{кНм}^3$$

$$y_C = -\frac{472{,}9}{38124} = -0{,}012\text{м} = -12\text{ мм}$$

Определяем угол поворота в точке К z_K =5,5м

$$EI_x\theta_K = EI_x\theta_0 + \sum\frac{M(z-a)}{1!} + \sum\frac{F(z-b)^2}{2!} + \sum\frac{q(z-c)^3}{3!}$$

$$EI_x\theta_B = EI_x\theta_0 - \frac{M(5{,}5-5{,}5)}{1} + \frac{Y_A(5{,}5-0)^2}{2} - \frac{F(5{,}5-4{,}4)^2}{2} - \frac{q(5{,}5-0)^3}{6} + \frac{q(5{,}5-4{,}4)^3}{6}$$

$$EI_x\theta_K = -237{,}5 + 775{,}91 - 30{,}25 - 277{,}29 + 2{,}22 = 233{,}1$$

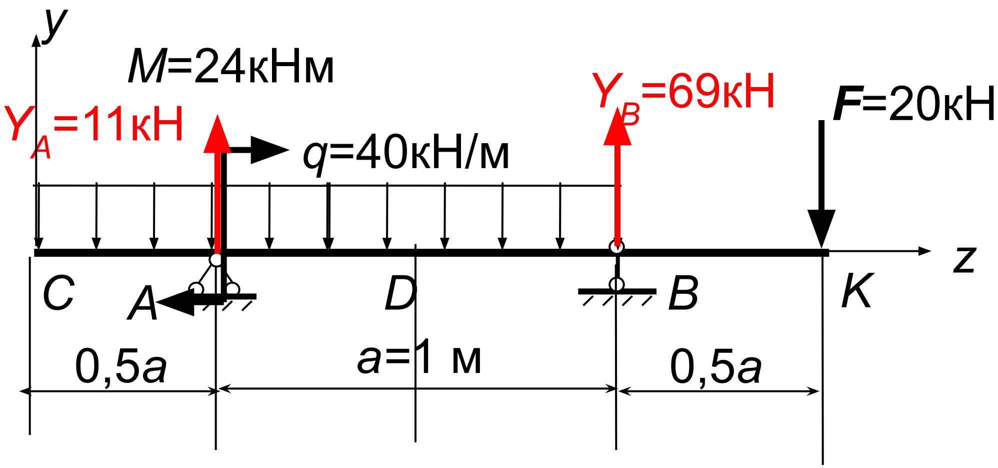
$$EI_x\theta_K = 233{,}1$$

$$\theta_K = \frac{233{,}1}{38124} = 0{,}0061\text{рад} = 0{,}35°$$

Прямой поперечный изгиб, определение прогибов методом начальных параметров.

Для заданной схемы балки требуется:

1. построить эпюры поперечных сил ***Q*** и изгибающих моментов ***M*** ;
2. подобрать балку двутаврового сечения из условия прочности, принимая $\boldsymbol{\sigma}_{adm}$ = 160 МПа;
3. определить жесткость балки, принимая $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;
4. найти прогибы балки в характерных точках методом начальных параметров и построить изогнутую ось балки.



Точки *C,A,D,B* и *K* –характерные, в них определяем прогиб.

Точки *A* и *B* на опорах: прогиб y_A и y_B равны нулю.

Определение реакций

Составляем уравнения равновесия сил, приложенных к балке:

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{(A)}=0; \quad -\boldsymbol{M}+\boldsymbol{q}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25-\boldsymbol{q}\cdot 1\cdot 0{,}5+\boldsymbol{Y}_B\cdot 1-\boldsymbol{F}\cdot 1{,}5=0;$$

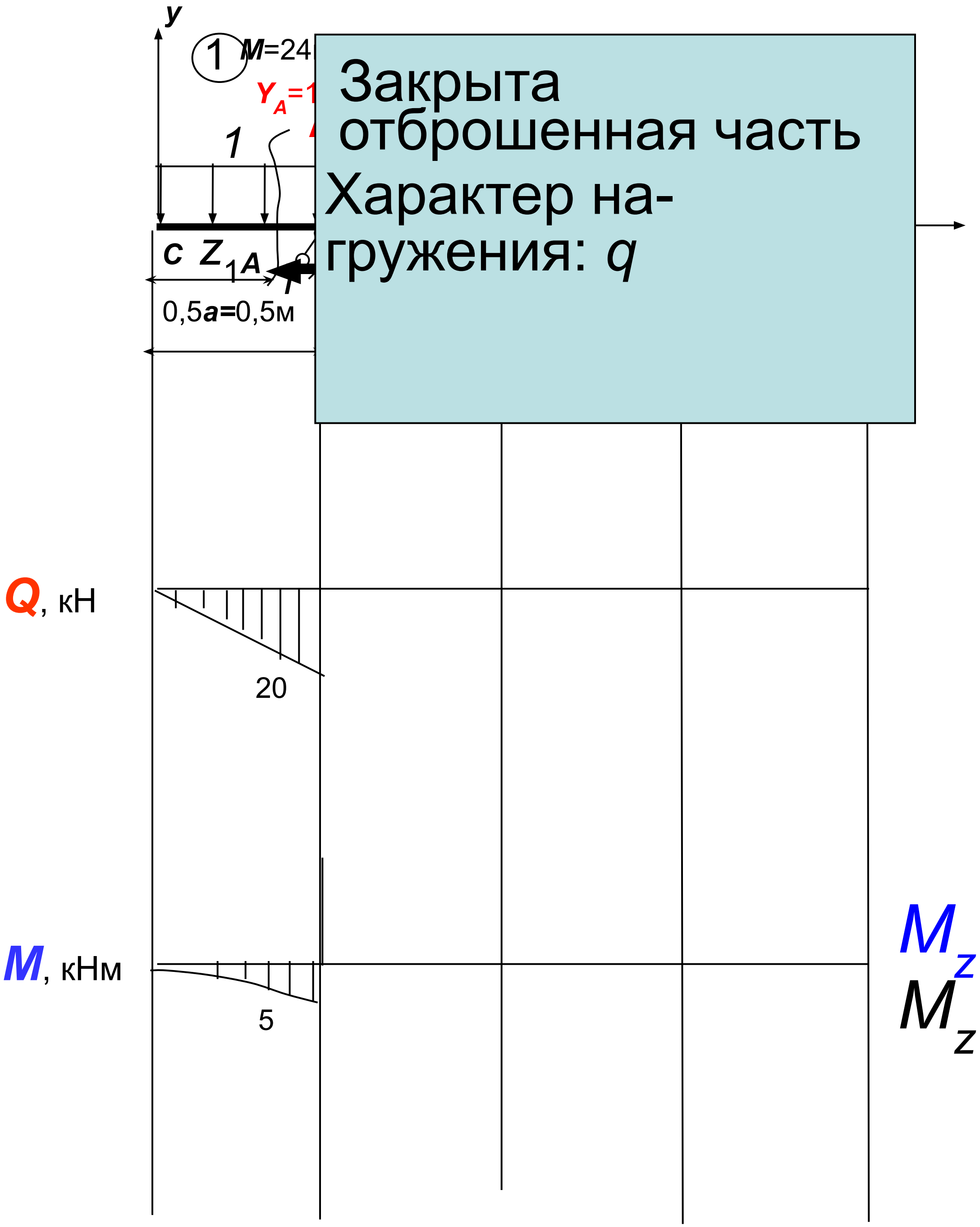
$$\boldsymbol{Y}_B\cdot=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{q}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}75+\boldsymbol{F}\cdot 1{,}5=24+15+30=69\text{кН}$$

$$\Sigma \boldsymbol{M}_{(B)}=0; \quad -\boldsymbol{M}+\boldsymbol{q}\cdot 1{,}5\cdot 0{,}75-\boldsymbol{Y}_A\cdot 1-\boldsymbol{F}\cdot 0{,}5=0;$$

$$\boldsymbol{Y}_A=-\boldsymbol{M}+\boldsymbol{q}\cdot 1{,}5\cdot 0{,}75-\boldsymbol{F}\cdot 0{,}5=-24+45-10=11\text{кН}$$

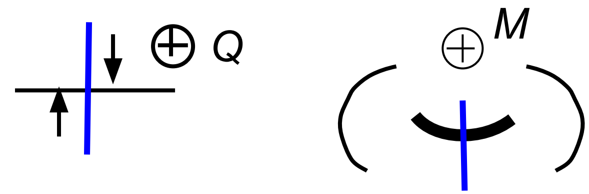
$$\Sigma \boldsymbol{У}=0;\ \boldsymbol{Y}_A+\boldsymbol{Y}_B-\boldsymbol{F}-\boldsymbol{q}\cdot 1{,}5=0;\ 11+69-20-40\cdot 1{,}5=0;$$

$$80-80=0;\ 0=0.$$



Закрыта отброшенная часть

Характер на-гружения: q



① $0 \le z_1 \ge 0{,}5$ м;

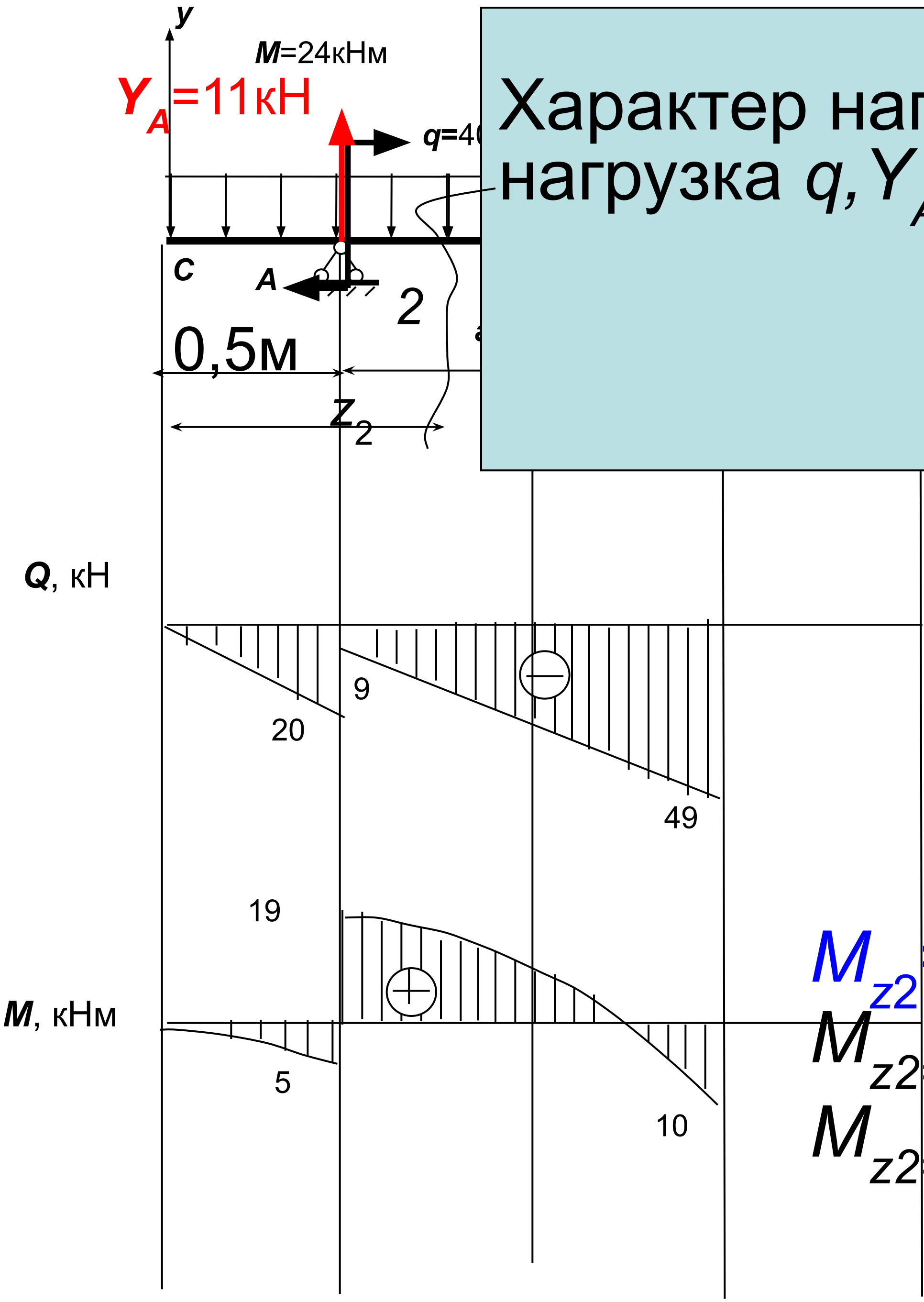
$Q_{z1} = -q \cdot z_1$;

$Q_{z1=0} = 0$;

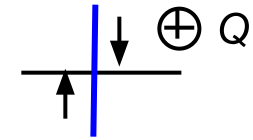
$Q_{z1=0,5} = -20$ кН.

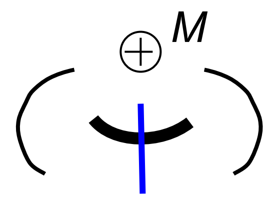
$M_{z1} = -qz_1^2/2$;

$M_{z1=0} = 0$; $M_{z1=0.5} = -5$ кНм.



Характер нагружения:
нагрузка q, Y_A, M





2 $0{,}5 \le z_2 \ge 1{,}5$ м;

$\underline{Q_{z2} = -\,q \cdot z_2 + Y_A}$;

$Q_{z2=0.5} = -40*0{,}5+11=-9;$

$Q_{z2=1{,}5} = -40*1{,}5+11=-49.$

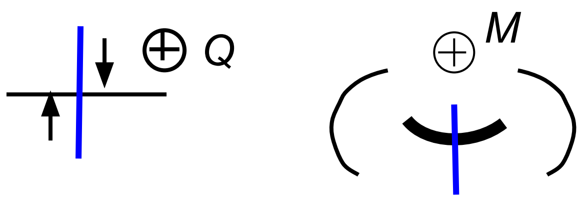
$M_{z2} = -\,q z_1^{\,2}/2 + M + Y_A*(z_2-0{,}5);$

$M_{z2=0{,}5} = -40*0{,}5^2/2 + 24 = 19;$

$M_{z2=1{,}5} = -40*1{,}5^2/2 + 24 + 11 = 10.$

Переносим начало координат на правый конец

Характер нагружения: F



③ $0 \leq z_3 \geq 0{,}5$ м;

$Q_{z3} = F = 20;$

$M_{z3} = -Fz_3;$

$M_{z3=0} = 0;$

$M_{z3=0,5} = -20*0{,}5 = -10.$

Подбор сечения

Подбираем поперечное сечение по изгибающему моменту в опасном сечении $\boldsymbol{M}_{\max}$ =19 кНм из условия прочности

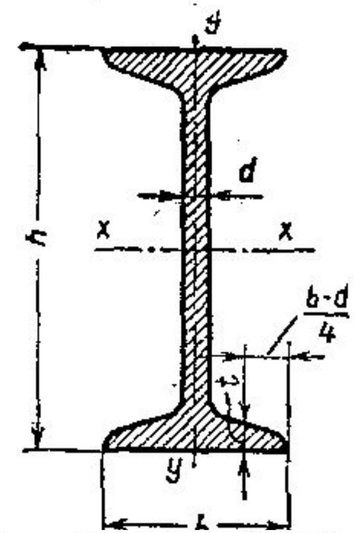
$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \le \sigma_{adm}; \qquad W_x \ge \frac{M_x}{\sigma_{adm}} \qquad W_x = \frac{19 \cdot 10^{-3}}{160} = 119 \cdot 10^{-6}\text{м}^3 = 119\text{см}^3$$

По таблице сортамента: Двутавр №18

Жесткость балки

$\boldsymbol{EI_x}$=$2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}$=$2580 \cdot 10^3$Нм^2=

=2580кНм^2.



№ профилей	Вес 1 пог. м, кг	Размеры, мм				Площадь сечения, см²	Справочные величины для осей						
							x—x				y—y		
		h	b	d	t		I_x, см⁴	W_x, см³	i_x, см	S_x, см³	I_y, см⁴	W_y, см³	i_y, см
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88

Определение перемещений

Для построения изогнутой оси балки необходимо определить прогибы в точках *C,D* и *К*

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \sum \frac{M(z-a)^2}{2} + \sum \frac{F(z-b)^3}{6} + \sum \frac{q(z-c)^4}{24}$$

y - прогиб в исследуемом сечении;

$\boldsymbol{\theta}_0$ - прогиб в начале координат;

$\boldsymbol{y}_0$ - угол поворота в начале координат;

z- расстояние от начала координат до сечения, для которого определяем перемещение

Начало координат - на ***левом*** конце балки, который не закреплен, поэтому найдем начальные параметры из условия закрепления балки: на опорах прогиб равен 0

$$z_A = 0{,}5\text{м}$$

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z_A + \frac{q(z_A - c)^4}{24} = EI_x y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 0{,}5 - \frac{40(0{,}5-0)^4}{24} = 0$$

$$z_B = 1{,}5\text{м}$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z_B + \frac{M(z_B - 0{,}5)^2}{2} + \frac{Y_A(z_B - 0{,}5)^3}{6} - \frac{q(z_B - 0)^4}{24} =$$

$$= EI_x y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 1{,}5 + \frac{24(1{,}5-0{,}5)^2}{2} + \frac{11(1{,}5-0{,}5)^3}{6} - \frac{40(1{,}5-0)^4}{24} = 0$$

$$\begin{cases} EI_x y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 0{,}5 - 0{,}104 = 0 \\ EI_x y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 1{,}5 + 12 + 1{,}83 - 8{,}44 = 0 \end{cases}$$

$$EI_x \theta_0 = EI_x \theta_C = -5{,}494\text{кНм}^2$$

$$EI_x y_0 = EI_x y_C = -2{,}851\text{кНм}^3$$

$$y_C = -\frac{2,851}{2580} = -0,0011\text{м} = -1,1\text{мм}$$

Определим прогибы в т. *D* (в середине пролета балки между опорами) и в точке *K* на конце правой консоли

<u>z_D =1,0м</u>

$$EI_x y_D = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z_D + \frac{M(z_D - 0,5)^2}{2} + \frac{V_A(z_D - 0,5)^3}{6} - \frac{q(z_D - 0)^4}{24} =$$

$$= EI_x y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 1,0 + \frac{24(1,0 - 0,5)^2}{2} + \frac{11(1,0 - 0,5)^3}{6} - \frac{40(1,0 - 0)^4}{24} =$$

$$== -2,851 - 5,494 + 3 + 0,229 - 1,667 = -6,783\ \text{кНм}^3$$

$$y_D = -\frac{6,783}{2580} = -0,0026\text{м} = -2,6\text{мм}$$

z_K=2,0м

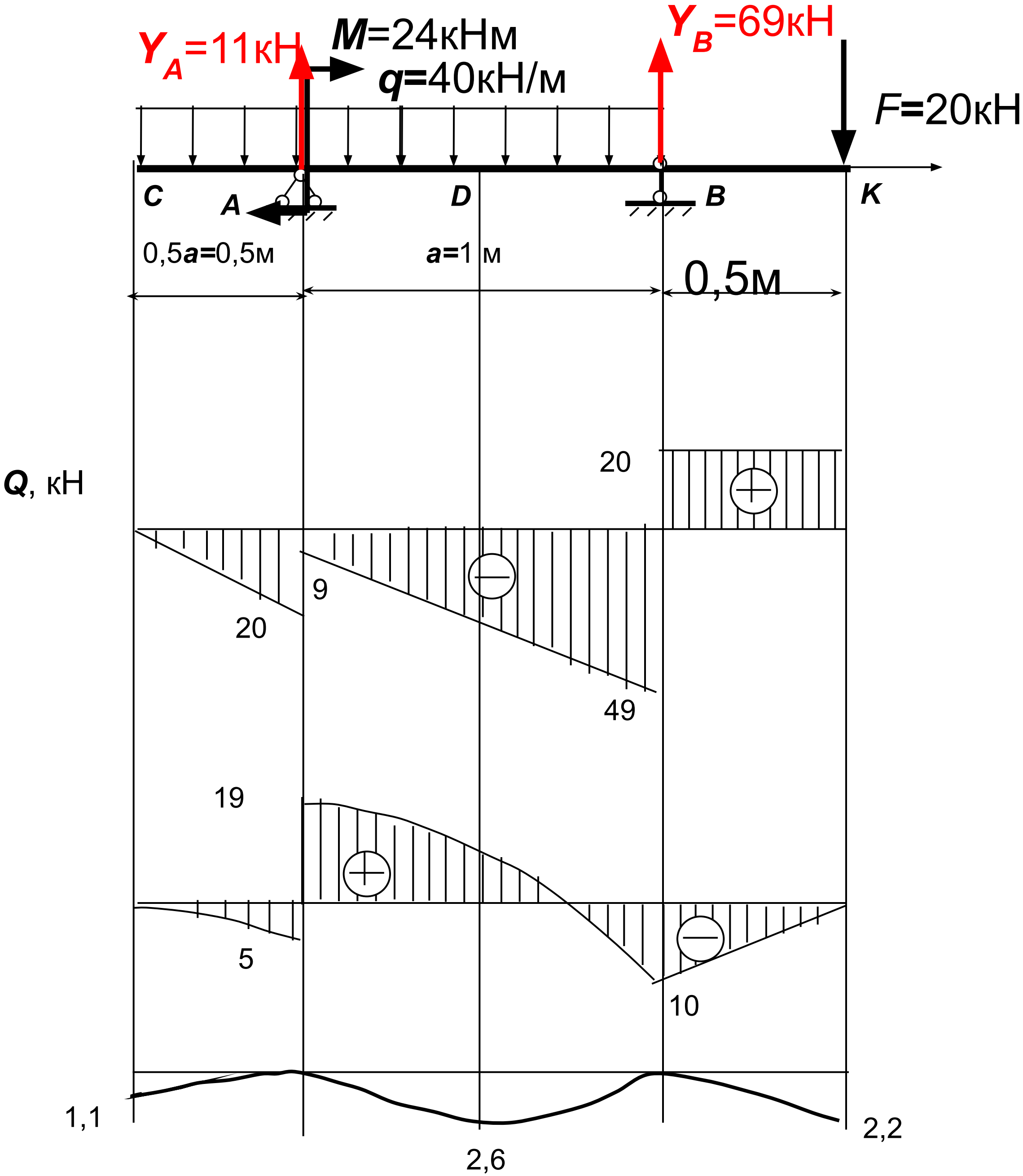
$$EI_x y_K = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z_K + \frac{M(z_K - 0{,}5)^2}{2} + \frac{V_A(z_K - 0{,}5)^3}{6} + \frac{V_B(z_K - 1{,}5)^3}{6} -$$

$$- \frac{q(z_K - 0)^4}{24} + \frac{q(z_K - 1{,}5)^4}{24} = EI_x y_0 + EI_x \cdot \theta_0 \cdot 2 + \frac{24(2 - 0{,}5)^2}{2} + \frac{11(2 - 0{,}5)^3}{6} + \frac{69(2 - 1{,}5)^3}{6} -$$

$$- \frac{40(2 - 0)^4}{24} + \frac{40(2 - 1{,}5)^4}{24} = -2{,}851 - 5{,}494 \cdot 2 + 27 + 6{,}187 + 1{,}438 - 26{,}667 + 0{,}104 = -5{,}777$$

$$y_K = -\frac{5{,}777}{2580} = -0{,}0022\text{м} = -2{,}2\text{мм}$$

Принимая величину допустимого прогиба, равной 0,01l , имеем $\boldsymbol{y}_{adm}$=0,01·1000=10мм. Следовательно, условие жесткости балки выполняется.



YA=11кН
M=24кНм
q=40кН/м
YB=69кН
F=20кН
C
A
D
B
K
0,5a=0,5м
a=1 м
0,5м
Q, кН
20
20
9
49
19
5
10
1,1
2,6
2,2