Элементы теории упругости. Гидродинамика.

План лекции

- Закон Гука. Модуль Юнга, коэффициент Пуассона, предел упругости.
- Всестороннее и одностороннее сжатие. Деформация сдвига. Кручение.
- Энергия упругой деформации.
- Примеры упругих деформаций: энергия изогнутой пластины, давление при замерзании воды, высота гор на Земле и на Марсе.
- Основное уравнение гидродинамики (гидростатики) идеальной жидкости. Жидкость во вращающемся сосуде. Уравнение Бернулли. Формула Торричелли.
- Вязкость. Формула Пуазейля.

Основные определения: Закон Гука. Модуль Юнга

- Закон Гука:
  малые, упругие, обратимые деформации $\varepsilon = \Delta\ell/\ell$
  пропорциональны напряжению $\sigma = F/S$:
  $\varepsilon = \sigma/E$
  E – модуль Юнга
- $[E]$ = Па,
  Сталь: $E = 2*10^{11}$ Па = 2 Мбар
  Медь: $E = 1{,}3*10^{11}$ Па = 1,3 Мбар
  Лёд: $E = 3*10^{10}$ Па = 0,3 Мбар
  Резина: $E \sim 10^{6}$ Па = 10 бар

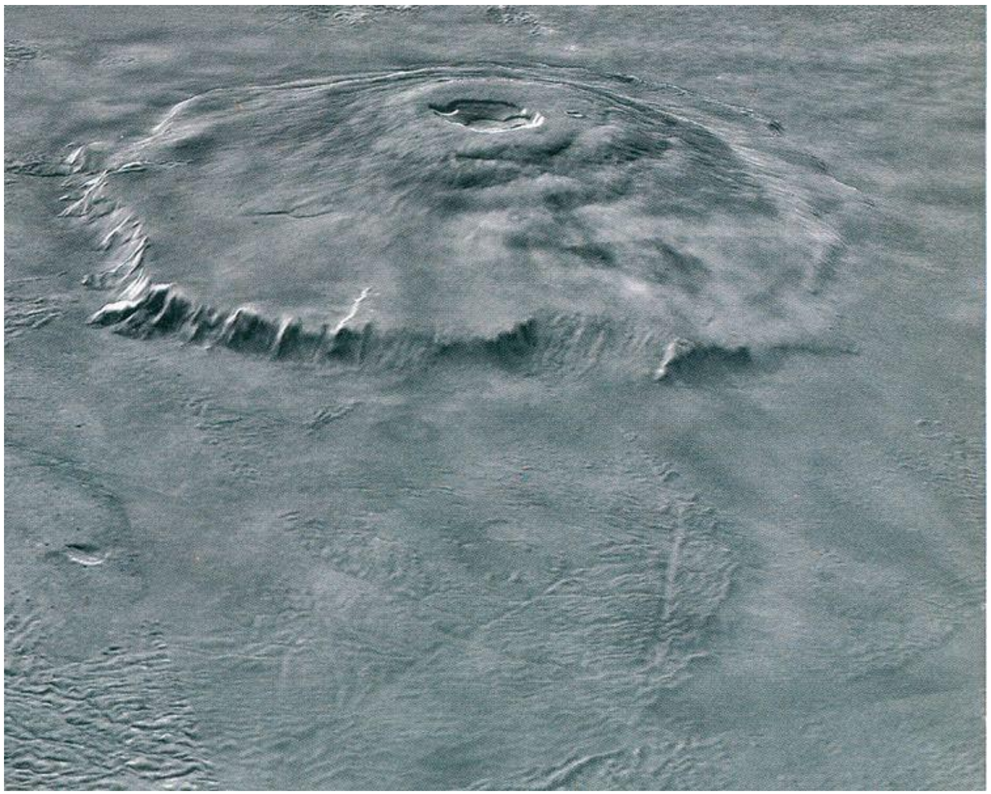
Предел упругости, предел прочности

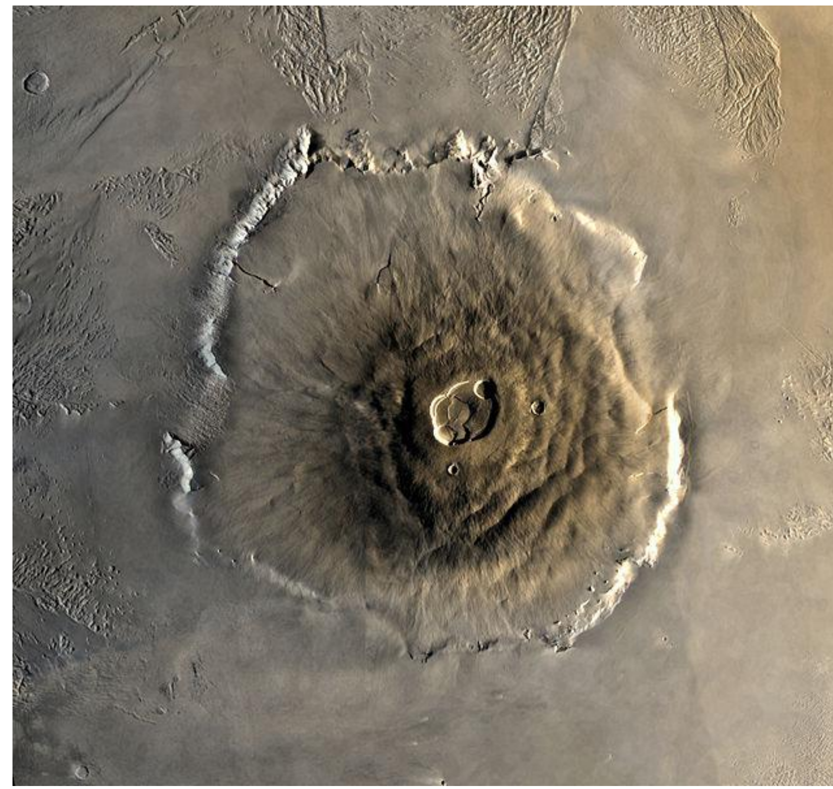
- Предел прочности – нагрузка $\sigma_{пр}$, вызывающая пластическую, неисчезающую после снятия нагрузки, деформацию.
- Сталь $\sigma_{пр} = 2*10^8$ Па $\rightarrow$ $\varepsilon_{пр} = \sigma_{пр}/E = 10^{-3} \rightarrow$ максимально допустимое удлинение метровой проволоки $\Delta\ell = 1$ мм.
- Максимальный груз, который можно подвесить на проволоку $S = 1$ мм^2
  $F_{max} = \sigma_{пр}S = 200$ Н (= 20 кг)

Предел прочности и высота гор на Земле и на Марсе)

- Предел прочности горных пород на сжатие $\sigma_{пр}$ ~ $3*10^8$ Па →
- на Земле:
  $\rho g h_{пр}$ ~ $\sigma_{пр}$ → $h_{пр}$ ~ $\sigma_{пр}/\rho g$ ~ 10 км
  (Эверест $h_з$ ~ 9 км)
- На Марсе:
  $M_М/M_з = 0{,}107$, $R_М/R_з = 0{,}553$.
  $h_М = (R_М/R_з)^2/(M_М/M_з)\ h_з$ ~ 25 км.

гора Олимп на Марсе самая высокая гора-вулкан в Солнечной системе: h ~ 24 км





Упругая энергия растянутого стержня

- $W = \int F d\ell = \int \sigma S \ell d\varepsilon = V \int E\varepsilon d\varepsilon = ½E\varepsilon^2 V = wV$

Объёмная плотность упругой энергии:

$$w = E\varepsilon^2/2 = \sigma^2/2E = \sigma\varepsilon/2$$

Нерадивый студент и стальная линейка.

- Какую работу совершил студент, свернув стальную линейку в замкнутое кольцо?
  Длина линейки $L = 1$ м,
  ширина $b = 6$ см;
  толщина $d = 1$ мм
  модуль Юнга стали $E = 2\ 10^{11}$ Па.
- Решение: $W = \int w dV = \int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dV = \frac{1}{2}\ bL\int E(\xi/R)^2 d\xi = EbLd^3/24R^2 = \pi^2 Ebd^3/6L \approx 20$ Дж (= два кг поднять на высоту ~ 1 м)

Коэффициент Пуассона или почему резиновые пробки - конусные

- При растяжении уменьшаются поперечные размеры цилиндра $\varepsilon_d = \Delta d/d$
  Коэффициент Пуассона равен отношению относительного поперечного сжатия к относительному изменению продольных размеров:
  $\Delta d/d = - \mu \, \Delta\ell/\ell$
  $\mu = - \varepsilon_d/\varepsilon \rightarrow \varepsilon_d = - \mu\sigma/E$
- Сталь $\mu \sim 0{,}3$
- Резина $\mu \sim 0{,}46\text{-}0{,}49 \rightarrow$
  цилиндрическую резиновую пробку невозможно вогнать в пробирку – все резиновые пробки - конусные
- «Пробковая» пробка – цилиндр: $\mu \sim 0$

Е и μ – полная(!) характеристика изотропного материала

- **Принцип суперпозиции (для малых деформаций):** *деформация, вызываемая несколькими усилиями, равна сумме деформаций, вызываемых каждым из усилий*
- **Всестороннее сжатие:**
  $\varepsilon_x = p/E,\ \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu p/E$
  $\varepsilon_y = p/E,\ \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\mu p/E$
  $\varepsilon_y = p/E,\ \varepsilon_x = \varepsilon_z = -\mu p/E \rightarrow$
  $\varepsilon_x = p(1 - 2\mu)/E$
  $\varepsilon_y = p(1 - 2\mu)/E$
  $\varepsilon_z = p(1 - 2\mu)/E \rightarrow$
  $\Delta V/V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3p(1 - 2\mu)/E = p/K$
  $K = E/3(1 - 2\mu)$ – модуль всестороннего сжатия

Давление воды при замерзании.

- Определить максимальное давление, которое может производить вода при замерзании.
- $\rho_л = 0,917$ г/см^3
  $\rho_в = 1$ г/см^3
  Модуль Юнга льда $E = 2,8\ 10^{10}$ Па
  коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$
- Решение:
  модуль всестороннего сжатия льда
  $K = E/3(1 - 2\mu) \approx 2,3\ 10^{10}$ Па
  $P = K\Delta V/V = K\Delta\rho/\rho \approx 2\ 10^9$ Па $= 20$ kбар

Одностороннее сжатие

- $\varepsilon_y = (p_y - \mu(p_x + p_z))/E = [p_y(1 - \mu) - \mu p_x]/E = 0 \rightarrow$
$p_y = p_z = \mu p_x/(1 - \mu) \rightarrow$
$\varepsilon_x = (p_x - \mu(p_y + p_z))/E = (1 - \mu - 2\mu^2)/(1 - \mu)E \rightarrow$
$E_I = E(1 - \mu)/(1 - \mu - 2\mu^2) =$
$E(1 - \mu)/(1 + \mu)(1 - 2\mu)$ – модуль одноосного сжатия

Сдвиг: меняется только форма. Объём не меняется.

- Угол сдвига β пропорционален скалывающему (касательному) напряжению. Модуль сдвига:
  $\beta = \sigma / G$
  $G = E/2(1 + \mu)$
- Кручение: закон Гука для деформации кручения цилиндра:
  $M = f\varphi$
  $f = \pi R^4 G / 2\ell$ - модуль кручения цилиндра.

Плотность упругой энергии

- Простое растяжение:
  $w = \frac{1}{2} E\varepsilon^2$
- Всестороннее сжатие:
  $w = \frac{1}{2} K\varepsilon_V^2$
- Одностороннее сжатие
  $w = \frac{1}{2} E_I\varepsilon^2$
- Сдвиг:
  $w = \frac{1}{2} G\beta^2$

Основное уравнение гидростатики идеальной жидкости

- Объёмная плотность сил давления
  $\mathbf{s} = -\,\mathrm{grad}P = -(\partial P/\partial x;\ \partial P/\partial y;\ \partial P/\partial z)$
- В равновесии $\mathbf{s}$ уравновешивается объёмной плотностью массовых сил $\mathbf{f}$:
  $\mathbf{s} + \mathbf{f} = 0 \rightarrow$
  $\mathbf{f} = \mathrm{grad}P$ – основное уравнение гидростатики.
- Гидростатическое давление (z – направлена вниз):
  $\rho g = \partial P/\partial z \rightarrow p = p_0 + \rho g z$
- Основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости:
  $\rho d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f} - \mathrm{grad}P$

Жидкость во вращающемся сосуде. Задача про чаинки в чае

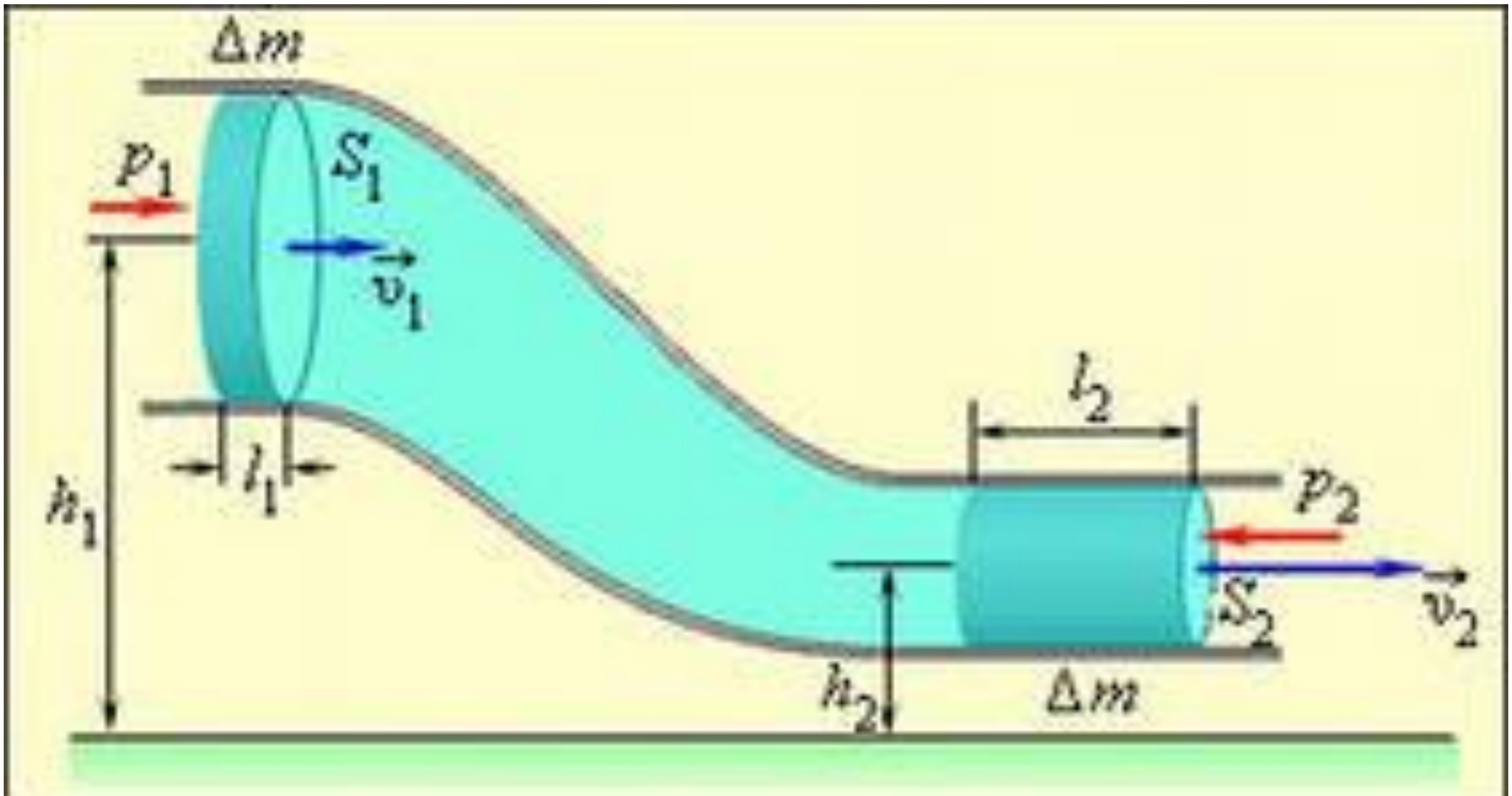
- $\partial P/\partial r = \rho\omega^2 r$; $\partial P/\partial z = -\rho g \rightarrow$
  $p = p_0 + ½\, \rho\omega^2 r^2 - \rho g z$
- Свободная поверхность: $p = p_0 \rightarrow$
  $z = ½\, \omega^2 r^2/g$ – параболоид вращения
- Распределения давления на глубине h
  $(z = -h)$:
  $p = p_0 + ½\, \rho\omega^2 r^2 + \rho g h$
- Самое большое давление на дне у стенок цилиндра – всё что тонет в воде должно оказаться на дне у стенок.
- Почему чаинки собираются в центре стакана?

Чаинки в стакане (ответ на правом рисунке)

Стационарное течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли. Уравнение непрерывности.

- $\rho v S = \text{const}$ – уравнение непрерывности
- Для несжимаемой жидкости
  $vS = \text{const}$
- Поток массы $J = \rho v S$, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ – плотность потока массы.
- $P/\rho + \varepsilon = \text{const}$, где $\varepsilon = v^2/2 + gh + u$ – энергия единицы массы жидкости
- Если ρ, $u = \text{const}$, то:
  $P + \rho v^2/2 + \rho g h = \text{const}$

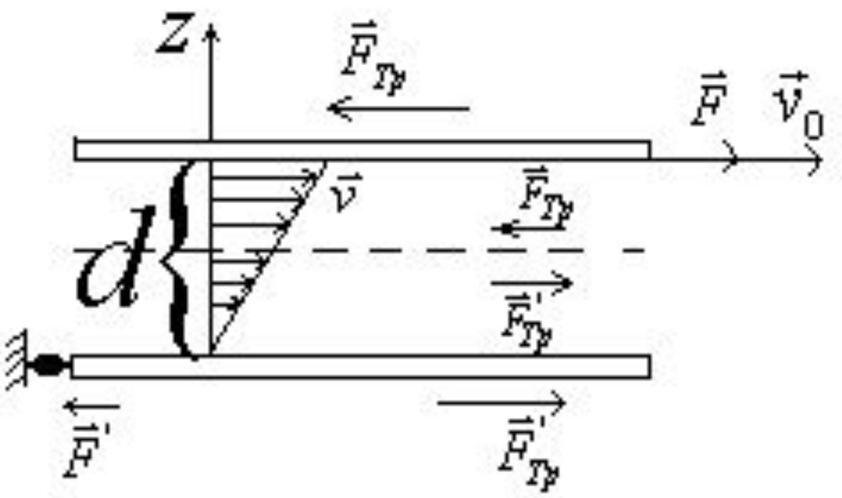
Формула Бернулли



Формула Торричелли

- Скорость истечения идеальной жидкости из сосуда:
  $P_0 + \rho gh = P_0 + \rho v^2/2 \rightarrow v = (2gh)^{1/2}$

Вязкость



- Вязкость – внутреннее касательное трение, возникающее между слоями жидкости, движущимися с разными скоростями.
- Вязкость выравнивает скорости течения.
- Импульс передаётся от быстрых слоёв к медленным:
  $f = - \eta \, \partial v / \partial z$
- η – коэффициент вязкости
- $[\eta]$ = кг/м с

Вязкость жидкостей и газов

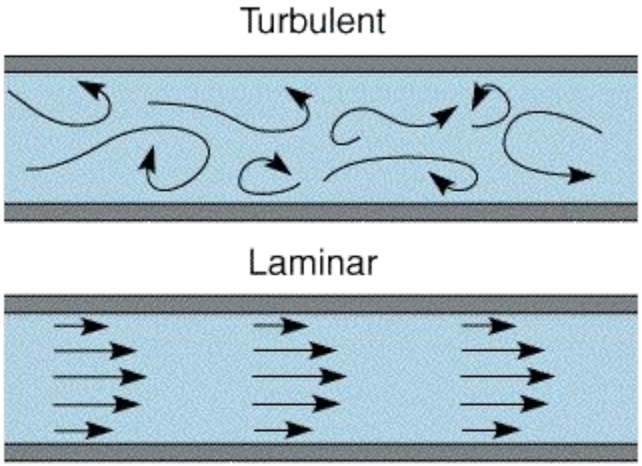
вещество	η, кг/м · сек
воздух	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$
вода	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$
ртуть	$1{,}55 \cdot 10^{-3}$
кровь	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$
глицерин	1,5
мёд	$500 \div 1000$

Вязкость. Течение Пуазейля

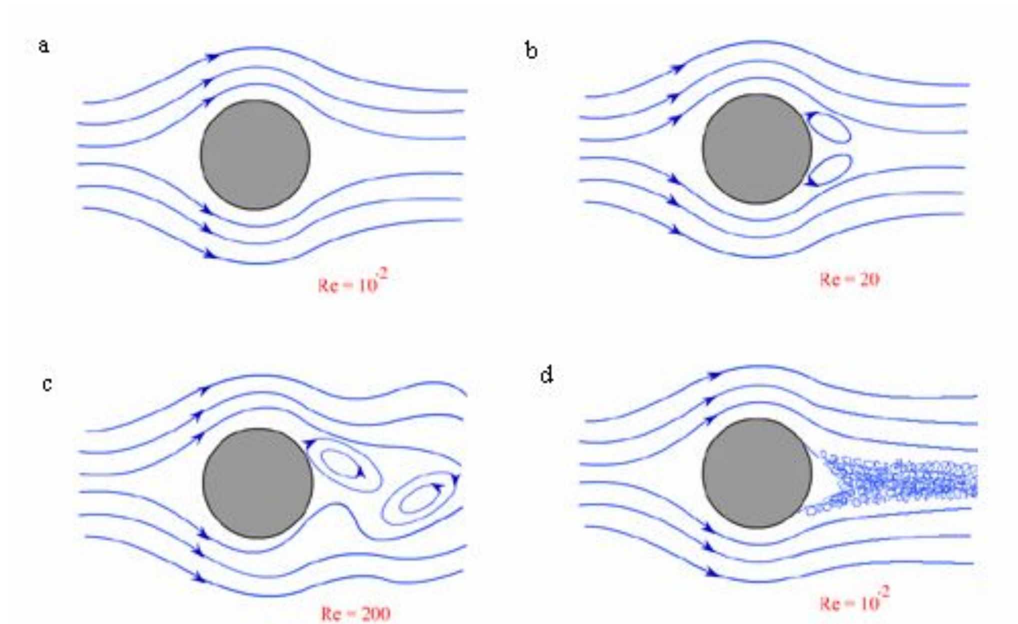
- $f = - \eta\, \partial v/\partial z$
- Вязкая жидкость в трубе:
  $F_{тр} = 2\pi r \ell \eta (dv/dr)$
  $F_{давл} = \pi r^2 \Delta p$
  $\pi r^2 \Delta p = - 2\pi r \ell \eta (dv/dr) \rightarrow$
- $v(r) = \Delta p R^2/4\ell\eta\ (1 - r^2/R^2) = v_{max}(1 - r^2/R^2)$
- Расход жидкости:
  $v_{ср} = ½\ v_{max} = \Delta p R^2/8\ell\eta \rightarrow$

  $Q = Sv_{ср} = \pi \Delta p R^4/8\ell\eta$ – формула Пуазейля

Ламинарное, турбулентное течение
Число Рейнольдса Re



Число Рейнольдса $Re = \rho v \ell / \eta$. Формула Стокса.



- $Re = \rho v \ell / \eta << 1$
  сила вязкого сопротивления
  при движении шара в вязкой жидкости:
  $F = 6\pi\eta r v$

Волновое уравнение. Скорость упругих волн в тонком стержне

- $\partial^2 x/\partial t^2 = v^2\, \partial^2 x/\partial z^2$
  общее решение волнового уравнения:
  $x = x(t - z/v) + x(t + z/v)$
- Относительная деформация $\varepsilon = \partial x/\partial z$
- Закон Гука $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow$
- Закон Ньютона для участка стержня Δz:
  $\Delta m \partial^2 x/\partial t^2 = F \Rightarrow$
  $\rho S \Delta z\, \partial^2 x/\partial t^2 = (\sigma(z + \Delta z) - \sigma(z))S = ES\partial\varepsilon/\partial z \Rightarrow$
- $\partial^2 x/\partial t^2 = (E/\rho)\, \partial^2 x/\partial z^2 \Rightarrow v = (E/\rho)^{1/2}$

Численные примеры (сталь)

- Модуль Юнга: $E_0 = 2\ 10^{11}$ Н/м^2 = 2 Мбар; коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$; плотность $\rho = 7{,}8$ г/см^3
 ⇨ $v = (E_0/\rho)^{1/2} = 5064$ м/с (табл. $v = 5150$ м/с)
- В <u>толстом</u> стержне:
  Модуль одностороннего сжатия
  $E = E_0(1 - \mu)/(1 + \mu)(1 - 2\mu) = 1{,}35E_0$ ⇨
  $v_{II} = (E/\rho)^{1/2} = (1{,}35)^{1/2}v = 5884$ м/с (табл. $v = 5900$ м/с)
- Поперечный звук: $v_\perp = (G/\rho)^{1/2}$,
  $G = E_0/2(1 + \mu) = E_0/2{,}6$ – модуль сдвига ⇨
  $v_\perp = v/(2{,}6)^{1/2} = 3140$ м/с (табл. $v_\perp = 3100$ м/с)

Численные примеры (алюминий)

- Модуль Юнга: $E_0 = 0{,}705\ 10^{11}$ Н/м^2 = 0,705 Мбар;
  коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}345$;
  плотность $\rho = 2{,}7$ г/см^3
- скорость звука в тонком стержне
  $v = (E_0/\rho)^{1/2} = 5110$ м/с (табл. $v = 5240$ м/с (2,5%))
- В <u>толстом</u> стержне:
  Модуль одностороннего сжатия
  $E = E_0(1 - \mu)/(1 + \mu)(1 - 2\mu) = 1{,}57E_0$ ⇨
  $v_{II} = (E/\rho)^{1/2} = (1{,}57)^{1/2}v = 6403$ м/с (табл. $v = 6400$ м/с)
- Поперечный звук: $v_\perp = (G/\rho)^{1/2}$,
  $G = E_0/2(1 + \mu) = E_0/2{,}69$ – модуль сдвига ⇨
  $v_\perp = v/(2{,}69)^{1/2} = 3115$ м/с (табл. $v_\perp = 3100$ м/с)

Скорость звука в жидкостях и газах

- В газе $\Delta z/z = \Delta V/V = \Delta p/E$ ⇨ модуль упругости в жидкости
$E = dp/(dV/V) = dp/(d\rho/\rho)$ коэффициент всестороннего сжатия.
- Скорость звука в жидкости
$v = (dp/d\rho)^{1/2}$
- Избыточное давление
$\Delta p = E\varepsilon = E\varepsilon\rho/\rho = \rho u v$

Численные примеры (вода, воздух)

- $v = (dp/d\rho)^{1/2}$
- Вода:
  $v = (K/\rho)^{1/2}$ $K = Vdp/dV$ - модуль всестороннего сжатия воды:
  $K = dp/(dV/V) = 2{,}14\ 10^4$ Н/м^2
  $v = (K/\rho)^{1/2} = 1463$ м/с (табл. $v = 1484$ м/с (1,3%))
- Воздух:
  изотермический звук:
  $v_T = (dp/d\rho)^{1/2} = (p/\rho)^{1/2} = 280$ м/с
- Адиабатический звук:
  $v = (\gamma p/\rho)^{1/2} = (1{,}4)^{1/2} v_T = 330$ м/с

Скорость волны в гибком шнуре. Струна

- $v = (T/\rho_l)^{1/2}$ – скорость распространения упругих волн небольшой амплитуды в натянутой струне;
  T – натяжение струны
  ρ_l – погонная плотность
- Вывод:
  $\rho_l \Delta z\, \partial^2 x/\partial t^2 = T(\sin\alpha(z+\Delta z) - (\sin\alpha(z)) \Rightarrow$
  $\partial^2 x/\partial t^2 = (T/\rho_l)\partial^2 x/\partial z^2$

Энергия упругой волны. Амплитуда давления в звуковой волне.

- Плотность кинетическая энергии:
  $w_k = \rho u^2/2 = \rho x'^2/2 = ½\, \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$
- Плотность упругой энергии:
  $w_П = E\varepsilon^2/2 = ½\, \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$
- Полная энергия
  $w = w_k + w_П = \rho x'^2/2 + E\varepsilon^2/2 = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kz)$
- Для гармонической волны: $\langle w \rangle = ½\, \rho A^2\omega^2 =$
- Поток энергии, или интенсивность:
  $I = ½\, \rho A^2\omega^2 v$
- $I = 2\langle w_П \rangle v = (E\varepsilon_m{}^2/2)\, v = (\Delta p)^2/2v\rho \Rightarrow$
  $\boldsymbol{\Delta p = (2I\rho v)^{1/2}}$

Порог слышимости. Болевой порог. Кавитация.

- Порог слышимости: $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2
  $\Delta p = (2I_0\rho v)^{1/2} = 3\ 10^{-5}$ Па – избыточное давление на пороге слышимости
- Болевой порог: $I = 10^{12} I_0$ (120 децибелл)
  $\Delta p = (2I\rho v)^{1/2} = 30$ Па = 0,3 г/см^2
- Кавитация:
  ультразвук $f = 5$ Мгц
  $I = 10$ Вт/см^2
  $\Delta p = (2I\rho v)^{1/2} = (2\ 10^5\ 10^3\ 1{,}5\ 10^3)^{1/2} = 6$ атм.
  Градиенты давления: $\Delta p/(\frac{1}{2}\lambda) = 400$ атм/см ($\lambda = 0{,}3$ мм)