

Вероятностно-статистические ОСНОВЫ ЭКОНОМЕТРИКИ

Вероятностный эксперимент (испытание) — эксперимент, результат которого не предсказуем заранее, так как он является случайным в силу сложного сочетания естественных причин.

Любое действие в экономике по своей сути является вероятностным экспериментом. Например, строительство автомобильного завода в контексте получения прибыли является вероятностным экспериментом.

Событие — это любой исход или совокупность исходов какого-либо вероятностного эксперимента. Получение прибыли можно рассматривать как результат строительства завода.

Событие, которое может произойти или не произойти в условиях данного эксперимента, называется *случайным* (прибыль может быть, а может и не быть).

Если событие происходит всегда в условиях данного эксперимента, то оно называется *достоверным* (спрос на автомобили упадет при резком снижении доходов населения).

Событие называется *невозможным*, если оно не происходит никогда в условиях данного эксперимента (при прочих равных условиях рост спроса на автомобили приводит к снижению их цены).

События, которые не могут происходить одновременно, называются *несовместимыми* (увеличение налогов — рост располагаемого дохода). В противном случае они называются *совместимыми* (увеличение объема продаж — увеличение прибыли).

Два события называются *противоположными*, если одно из них происходит тогда и только тогда, когда не происходит другое (товар реализован — товар не реализован).

Событие, которое нельзя разбить на более простые, называется *элементарным* (продажа автомобиля).

Событие, представимое в виде совокупности (суммы) нескольких элементарных событий, называется *составным* (предприятие не потерпело убытки — прибыль может быть положительной либо равной нулю).

Вероятность события — это количественная мера, которая вводится для сравнения событий по степени возможности их появления.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A , обозначается $P(A)$, называется отношение m числа элементарных событий (исходов), благоприятствующих появлению события A , к числу n всех элементарных событий в условиях данного вероятностного эксперимента:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Из определения вытекают следующие *свойства вероятности*:

1. Значение вероятности события находится в пределах от нуля до единицы

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

2. Вероятность достоверного события равна 1: .
3. Вероятность невозможного события равна 0: .
4. Если события A и B несовместимы, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$
5. Если A и \bar{A} есть противоположные события, то $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

При *статистическом определении вероятности* события A под n понимается количество наблюдений результатов эксперимента, в которых событие A встретилось ровно m раз. В этом случае отношение называется *относительной частотой* события A .

События, которые не могут происходить одновременно, называются *несовместимыми* (увеличение налогов — рост располагаемого дохода). В противном случае они называются *совместимыми* (увеличение объема продаж — увеличение прибыли).

Два события называются *противоположными*, если одно из них происходит тогда и только тогда, когда не происходит другое (товар реализован — товар не реализован).

Событие, которое нельзя разбить на более простые, называется *элементарным* (продажа автомобиля).

Событие, представимое в виде совокупности (суммы) нескольких элементарных событий, называется *составным* (предприятие не потерпело убытки — прибыль может быть положительной либо равной нулю).

Вероятность события — это количественная мера, которая вводится для сравнения событий по степени возможности их появления.

При *статистическом определении вероятности* события A под n понимается количество наблюдений результатов эксперимента, в которых событие A встретилось ровно m раз. В этом случае отношение называется *относительной частотой* события A .

Случайной величиной (СВ) называют величину, которая в результате наблюдения принимает то или иное значение, заранее не известное и зависящее от случайных обстоятельств. Например, объем ВВП, количество реализованной продукции, прибыль фирмы, размер чистого экспорта за год и т.д. являются случайными величинами.

Различают дискретные и непрерывные СВ.

Дискретной называют такую СВ, которая принимает отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями (такая СВ имеет счетное количество значений). Например, можно считать, что число покупателей в магазине, побывавших там в течение дня, число автомобилей, ремонтируемых еженедельно в данной мастерской, число находящихся в аэропорту самолетов являются дискретными СВ.

Однако большинство СВ, рассматриваемых в экономике, имеют настолько большое число возможных значений, что их удобнее представлять в виде непрерывных СВ.

Непрерывной называют такую СВ, которая может принимать любое значение из некоторого конечного или бесконечного числового промежутка (т.е. количество возможных значений непрерывной СВ не счетно). Например, курсы валют, доход, объемы ВВП, ВВП и т.п. обычно рассматриваются как непрерывные СВ.

Соответствие между всеми возможными значениями СВ и их вероятностями. называется *законом распределения дискретной СВ*, или *функцией распределения*.

Табличное задание закона распределения дискретной СВ принимающей значения x_1, x_2, \dots, x_n с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n соответственно имеет вид:

X	x_1	x_2	\dots	x_n
p_i	p_1	p_2	\dots	p_n

причем, $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Пример На станции технического обслуживания, на основании данных, полученных по 100 автомобилям, выяснилось, что для 25 из них требуется 1 ч для проведения профилактических работ. Мелкий ремонт требуется для 40 автомобилей, что занимает 2 ч. Для 20 автомобилей требуется ремонт с заменой отдельных узлов, что занимает в среднем 5 ч. 10 автомобилей могут быть отремонтированы за 10 ч. Для 5 автомобилей необходимое время ремонта составляет 20 ч. Построить закон распределения СВ X — времени обслуживания случайно выбранного автомобиля.

X	1	2	5	10	20
p_i	0,25	0,40	0,20	0,10	0,05

Функцией распределения СВ X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что СВ X принимает значение меньше, чем x , т.е.

$$F(x) = P(X < x)$$

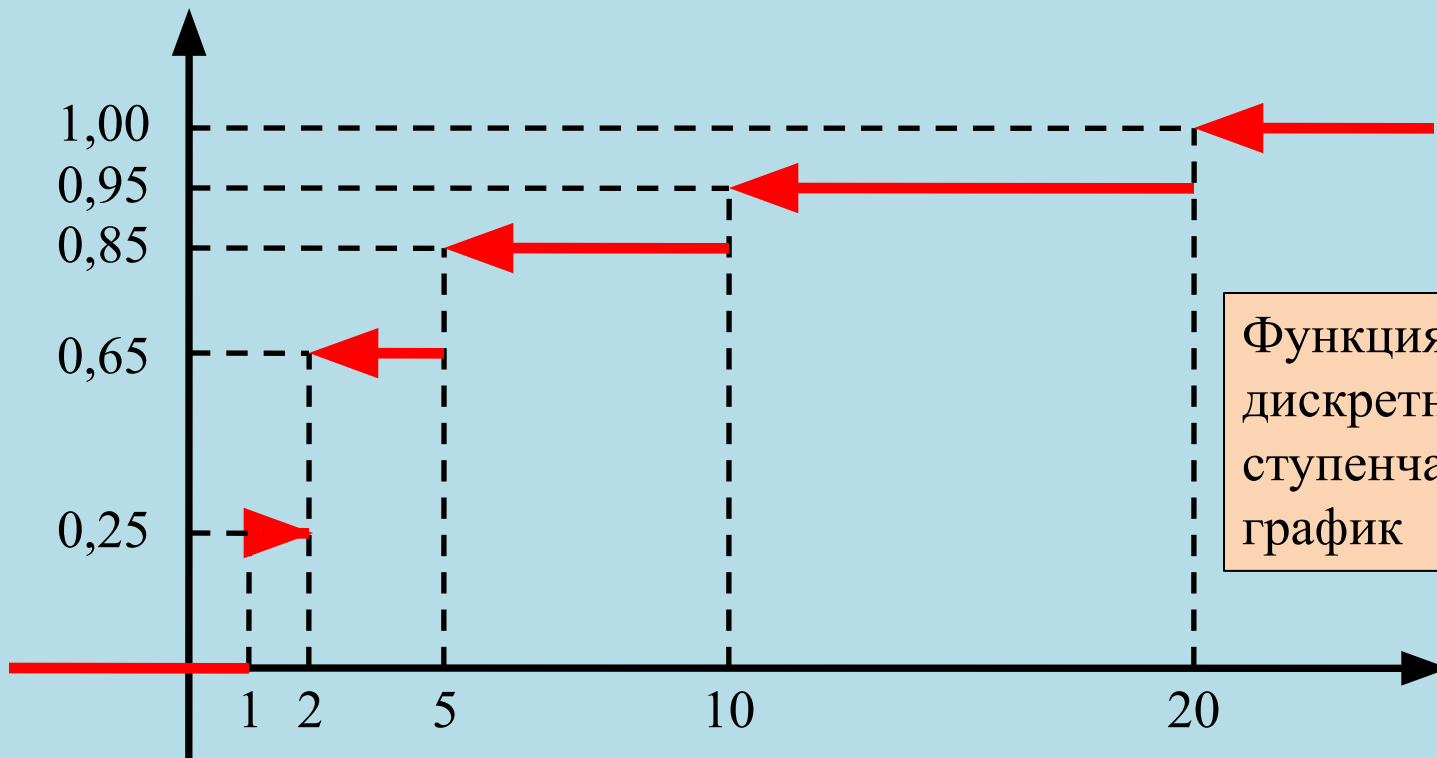
Иногда эту функцию называют *функцией накопленной вероятности* или *кумулятивной функцией распределения*.

Из определения вытекают *свойства функции распределения*:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
4. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$
5. $P(X \geq x) = 1 - F(x)$
6. $X \in [a, b] \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1, & x > b \end{cases}$

X	1	2	5	10	20
p_i	0,25	0,40	0,20	0,10	0,05

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 0,25 & 1 < x \leq 2 \\ 0,65 & 2 < x \leq 5, \\ 0,85 & 5 < x \leq 10, \\ 0,95 & 10 < x \leq 20, \\ 1 & x > 20 \end{cases}$$



Функция распределения дискретной СВ имеет ступенчато образный график

Плотностью вероятности (плотностью распределения вероятностей) непрерывной СВ X называют функцию:

$$f(x) = \frac{P(x \leq X < x + \Delta x)}{\Delta x}$$

или:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

плотность вероятности равна производной от функции распределения (поэтому иногда её называют дифференциальной функцией распределения).

Свойства функции плотности распределения СВ:

1. $f(x) \geq 0$

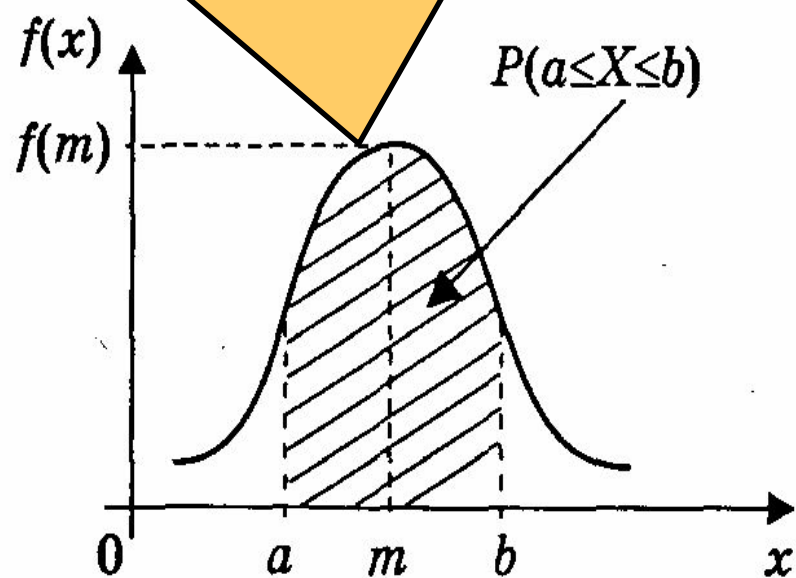
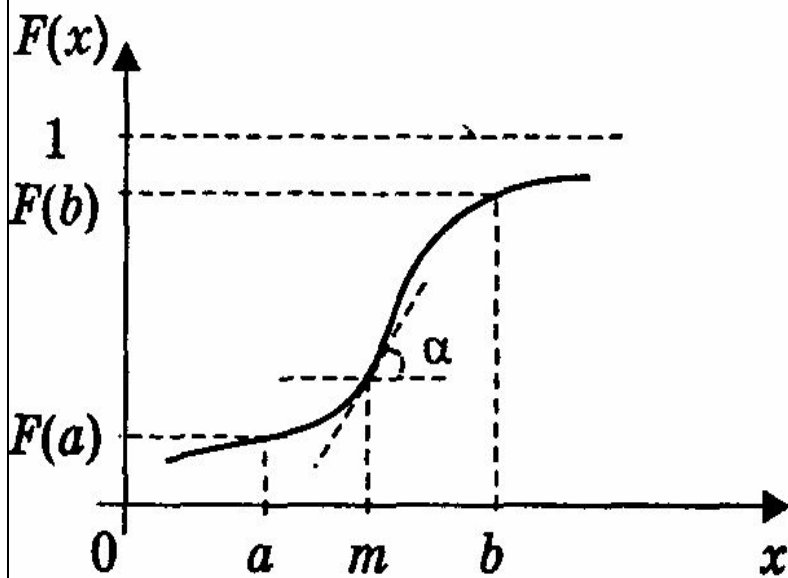
2. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

3. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Условие
нормировки

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b)$$



Характерные графики функции распределения и плотности распределения непрерывной СВ

Вероятность попадания значений СВ в «хвосты» распределения, т.е. в интервалы $(-\infty, a)$ и $(b, +\infty)$ равна $1 - P(a \leq X \leq b)$

Математическое ожидание $M(X)$ определяется для дискретной СВ:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k = \sum_{i=1}^k x_i p_i$$

где k — число всех возможных значений СВ X , для непрерывной СВ:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение СВ, и приближенно равно её среднему значению.

Свойства математического ожидания:

1. $M(\square) = \square$, где \square константа.
2. $M(\square X) = \square M(X)$.
3. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
4. $M(aX + b) = aM(X) + b$, где a и b константы.
5. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, где X и Y независимые СВ.

X	1	2	5	10	20
p_i	0,25	0,40	0,20	0,10	0,05

$$M(X) = 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,40 + 5 \cdot 0,20 + 10 \cdot 0,10 + 20 \cdot 0,05 = 4,05$$

Дисперсией $D(X)$ СВ называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания,

$$D(X) = M \left[(X - M(X))^2 \right] = M(X^2) - (M(X))^2$$

для дискретной СВ:

$$D(X) = \sum_{i=1}^k (x_i - M(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^k x_i^2 p_i - (M(X))^2$$

где k — число всех возможных значений СВ,
для непрерывной СВ:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

Дисперсия характеризует разброс возможных значений СВ относительно её среднего значения (математического ожидания).

Свойства дисперсии:

1. $D(\boxtimes) = 0$, где \boxtimes константа.
2. $D(\boxtimes X) = \boxtimes^2 D(X)$.
3. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.
4. $D(aX + b) = a^2 D(X)$, где a и b константы.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ СВ называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

X	1	2	5	10	20
P_i	0,25	0,40	0,20	0,10	0,05

$$M(X) = 4,05$$

$$\begin{aligned} D(X) &= (1 - 4,05)^2 \cdot 0,25 + \\ &\quad (2 - 4,05)^2 \cdot 0,40 + \\ &\quad (5 - 4,05)^2 \cdot 0,20 + \\ &\quad (10 - 4,05)^2 \cdot 0,10 + \\ &\quad (20 - 4,05)^2 \cdot 0,05 = 20,4475 \end{aligned}$$

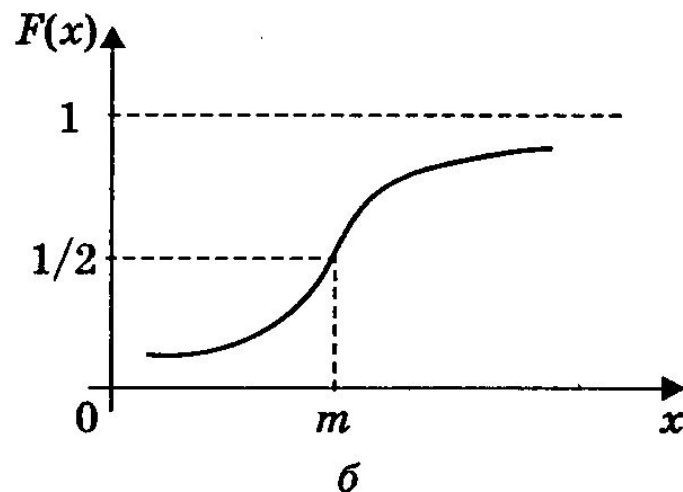
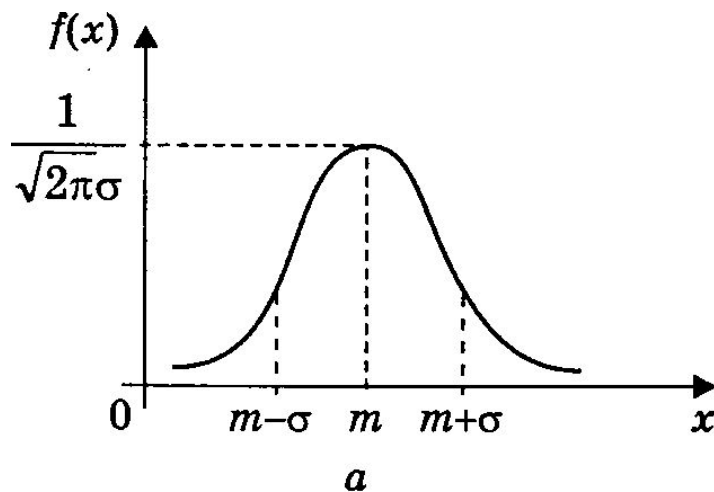
$$\sigma(X) = \sqrt{20,4475} = 4,522$$

Нормальное распределение

СВ X имеет *нормальное распределение*, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$



При этом математическое ожидание $M(X) = m$, дисперсия $D(X) = \sigma^2$

Если СВ X имеет нормальное распределение с параметрами математического ожидания $M(X) = m$ и дисперсией $D(X) = \sigma^2$ то $X \boxtimes N(m, \sigma^2)$

СВ $X \boxtimes N(0,1)$ называется **стандартизированной**

СВ $X \boxtimes N(0,1)$ обозначим через U , т.е. $U \boxtimes N(0,1)$

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}; \quad F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Если СВ $X \boxtimes N(m, \sigma^2)$ то $U = \frac{X - m}{\sigma} \boxtimes N(0,1)$

Функция Лапласа:
$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(u) - 0,5.$$

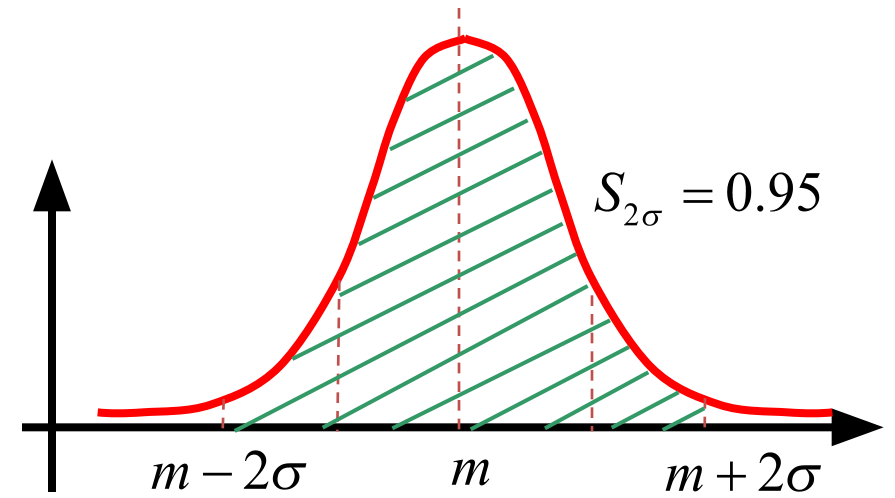
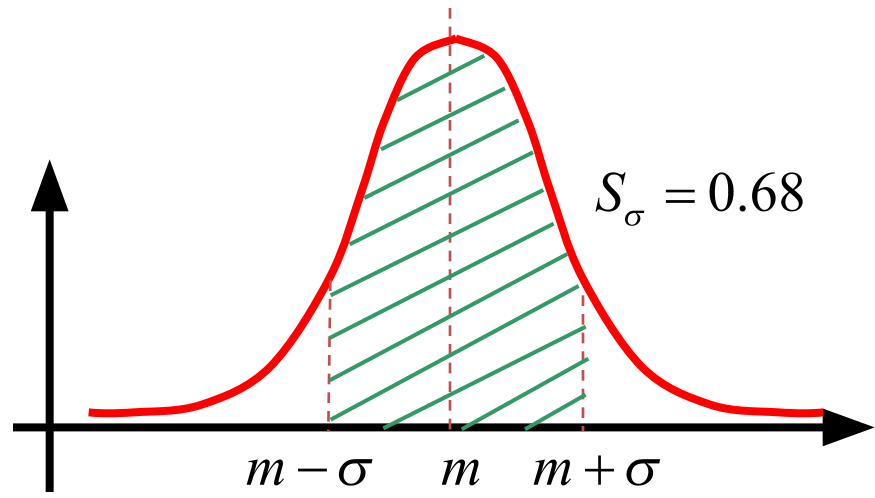
Вероятность того, что СВ $X \boxtimes N(m, \sigma^2)$ будет принимать значения между a и b исчисляется

$$P(a \leq X \leq b) = F\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right).$$

Закон 3σ (трех сигм)

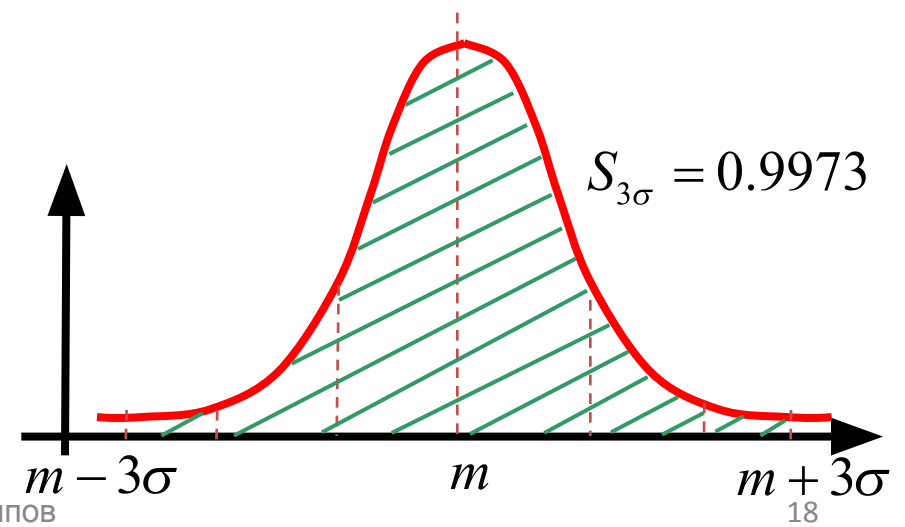
Справедливо $X \sim N(m, \sigma^2)$:

$$\begin{cases} P(|X - m| < \sigma) = 0.68 \\ P(|X - m| < 2\sigma) = 0.95 \\ P(|X - m| < 3\sigma) = 0.9973 \end{cases}$$



Площадь под кривой функции нормального распределения полностью (99,73%) определяется интервалом $(m \pm 3\sigma)$

Значения СВ $X \sim N(m, \sigma^2)$ на 99,73% сосредоточены в интервале $[m - \sigma; m + \sigma]$



Линейная комбинация нормальных СВ имеет нормальное распределение

$$\left. \begin{array}{l} X \boxtimes N(m_x, \sigma_x^2) \\ Y \boxtimes N(m_y, \sigma_y^2) \end{array} \right\} \Rightarrow Z = aX + bY \boxtimes N(m_z, \sigma_z^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} m_z = am_x + bm_y \\ \sigma_z^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 \end{array} \right.$$

Многие экономические показатели имеют нормальный или близкий к нормальному закон распределения. Например, доход населения, прибыль фирм в отрасли, объем потребления и т.д. имеют близкое к нормальному распределение.

Нормальное распределение используется при проверке различных гипотез в статистике (о величине математического ожидания при известной дисперсии, о равенстве математических ожиданий и т.д.).

При моделировании экономических процессов приходится рассматривать СВ, которые представляют собой алгебраическую комбинацию нескольких СВ. При этом желательно иметь возможность прогнозирования поведения таких СВ.

Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Пусть СВ $U_i \boxtimes N(0,1)$, тогда СВ $\sum_{i=1}^n U_i^2$ имеет *хи-квадрат распределение с n степенями свободы*,

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2 = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2$$

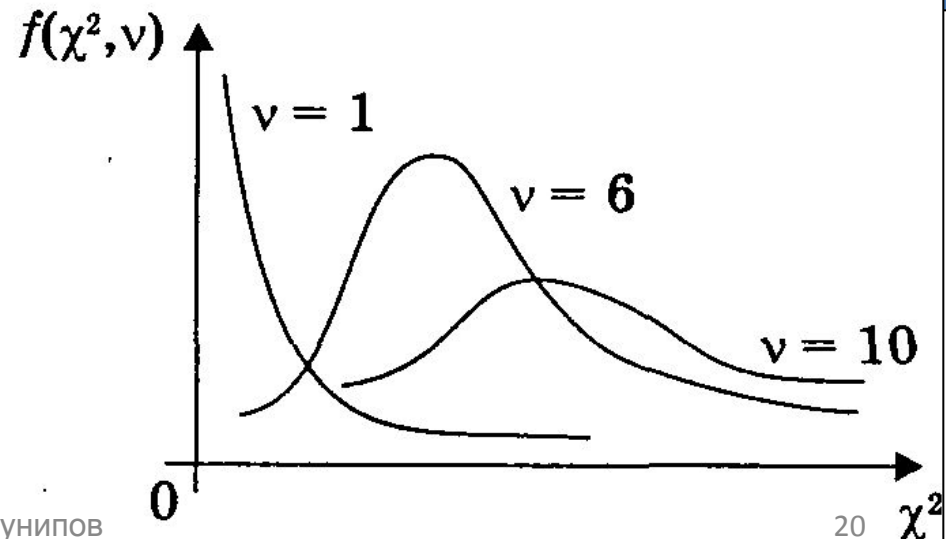
Число степеней свободы ν исследуемой СВ определяется количеством n СВ, ее составляющих, уменьшенным на число линейных связей между ними. Например, число степеней свободы СВ, являющейся композицией случайных величин, которые в свою очередь связаны m линейными уравнениями, определяется числом $\nu = n - m$

Очевидно, $U^2 = \chi_1^2$

С увеличением числа степеней свободы χ^2 распределение приближается к нормальному

$$M(\chi^2) = \nu$$

$$D(\chi^2) = 2\nu$$



$$\left. \begin{array}{l} X \sim \chi_n^2 \\ Y \sim \chi_m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow Z = X + Y \sim \chi_{n+m}^2$$

Если СВ $X \sim \chi_n^2$ и $Y \sim \chi_m^2$ имеют распределение хи-квадрат с n и m степенями свободы, то их сумма также имеет распределение хи-квадрат с степенями свободы $n + m$

Распределение хи-квадрат применяется для нахождения интервальных оценок и проверки статистических гипотез

Распределение Стьюдента

Пусть СВ $U \sim N(0,1)$, СВ V — независимая от U величина, распределённая по закону χ^2 с n степенями свободы. Тогда величина СВ

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}}$$

имеет *распределение Стьюдента (t-распределение) с n степенями свободы*

$$T \sim T_n$$



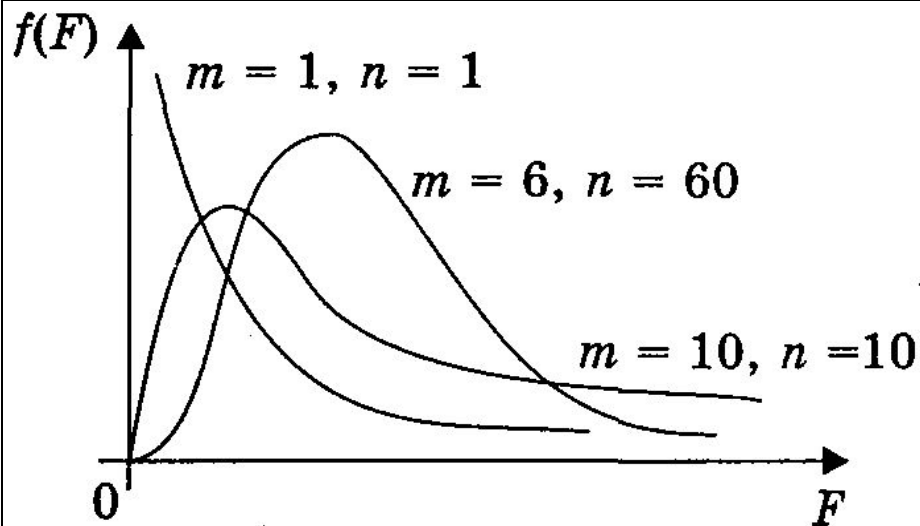
С увеличением числа степеней свободы n распределение Стьюдента приближается к стандартизированному нормальному распределению, причем при $n > 30$ распределение Стьюдента практически можно заменить нормальным распределением.

Распределение Фишера

Пусть V и W — независимые СВ, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы m и n соответственно, тогда величина

$$F = \frac{V/m}{W/n}$$

имеет *распределение Фишера со степенями свободы n, m* ($F \boxtimes F_{m,n}$)



$$M(F) = \frac{n}{n-2}$$

$$D(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4).$$

С увеличением числа степеней свободы распределение Фишера приближается к нормальному распределению. Причем

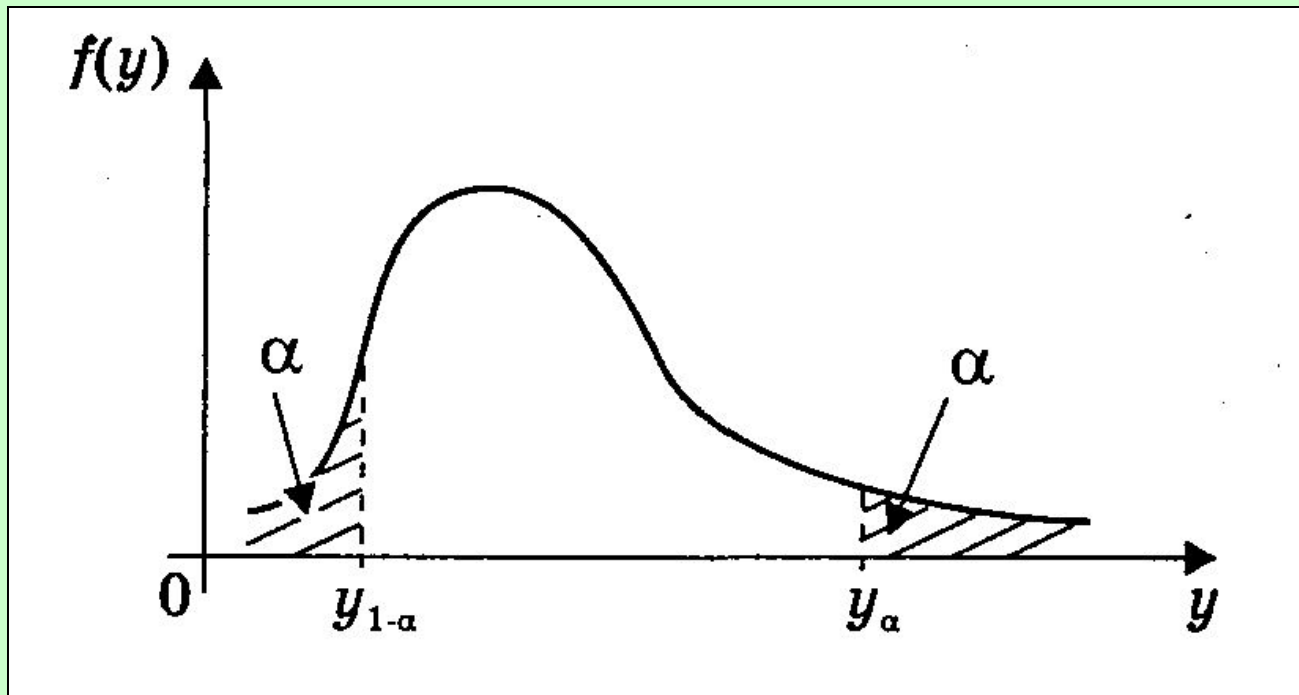
$$T_n^2 = F_{1,n}$$

α - квантилем (критической точкой уровня α) называется значение y_α СВ Y такое, что

$$P(Y > y_\alpha) = \int_{y_\alpha}^{+\infty} f(y)dy = \alpha$$

Квантили y_α и $y_{1-\alpha}$ называются симметричными. Если распределение симметрично относительно оси ординат, то $y_\alpha = y_{1-\alpha}$

Нахождение квантиля геометрически заключается в таком выборе значения, y_α при котором площадь заштрихованной криволинейной трапеции под кривой плотности распределения была бы равна α



Многие экономические показатели определяются несколькими числами, являясь по сути многомерными СВ. Например, издержки предприятия включают в себя фиксированную и переменную составляющие; уровень жизни населения подразумевает использование большого числа показателей: ВВП на душу населения, распределение доходов, наличие товаров и услуг, продолжительность жизни и т.д.

Значения ряда экономических показателей предопределяют величины других показателей. Поэтому одна из центральных задач эконометрического анализа — выявить наличие и определить силу взаимосвязи между различными экономическими показателями (фактически между СВ). Например, между доходом и потреблением; между спросом на товар и его ценой; между уровнем инфляции и уровнем безработицы; между ВВП и уровнем жизни. Вследствие этого при проведении эконометрического анализа одно из главных мест занимает исследование взаимосвязей СВ, при которых реализация одной из СВ влияет на вероятность определенной реализации других СВ.

Для описания совокупности n СВ (n -мерной СВ) вводятся следующие понятия:

совместная вероятность

$$P_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

совместная функция распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

совместная плотность вероятностей

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

В частности, для установления зависимостей между двумя СВ рассматривают двумерные вероятности, функции распределения и плотности вероятностей:

$$P_{X_1 X_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Если для означенных выше функций рассматриваются их значениями при фиксированных величинах одной или нескольких СВ, то эти функции обычно усредняются (суммируются или интегрируются) по другим переменным. В результате получаются так называемые *маргинальные (предельные) вероятности, функции распределения и плотности вероятности*, например:

$$P_1(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} P_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$F_1(x_1) = F(x_1, \infty, \dots, \infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(t, x_2, \dots, x_n) dt dx_2 \dots dx_n$$

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n$$

Эти условия обычно называют условиями согласованности.

Для n -мерных СВ могут быть определены *условные вероятности*. Например, вероятность того, что значения СВ X_1, X_2, \dots, X_{n-1} будут равны x_1, x_2, \dots, x_{n-1} соответственно при условии, что $X_n = x_n$, определяется по формуле

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1} | X_n = x_n) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)}{P(X_n = x_n)}$$

Для двух СВ X и Y *условная вероятностью (условной плотностью вероятностей)* СВ X при условии, что СВ Y примет значение y ($Y = y$), называется величина

$$P(x|y) = \frac{P(x, y)}{P(y)}, \quad f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$$

Совместная вероятность (совместная плотность вероятности) СВ

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x),$$

$$f(x, y) = f(x|y)f(y) = f(y|x)f(x)$$

Для двух независимых СВ X и Y справедливо

$$P(x, y) = P(x)P(y)$$

$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

$$F(x, y) = F(x)F(y)$$

Совместная вероятность, совместная функция распределения, совместная плотность вероятности не дают ясного представления о поведении каждой из компонент рассматриваемой СВ и их взаимосвязи друг с другом. В этом случае могут быть построены законы распределений каждой из составляющих многомерной СВ. Причем любая из них принимает те же значения, но с соответствующими маргинальными вероятностями, либо маргинальными функциями распределения

Двумерная дискретная СВ (X, Y) может быть задана в табличной форме.

	Y						
X			\dots	y_j	\dots	y_n	$P(X = x_i)$
$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$	y_1	y_2	\dots	y_j	\dots	y_n	
$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^n p_{ij} (i = \overline{1, m})$	y_1	y_2	\dots	p_{1j}	\dots	p_{1n}	$P(X = x_1)$
x_2	p_{21}	p_{22}	\dots	p_{2j}	\dots	p_{2n}	$P(X = x_2)$
$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m p_{ij} (j = \overline{1, n})$	y_1	y_2	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_i	p_{i1}	p_{i2}	\dots	p_{ij}	\dots	p_{in}	$P(X = x_i)$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_m	p_{m1}	p_{m2}	\dots	p_{mj}	\dots	p_{mn}	$P(X = x_m)$
$P(Y = y_j)$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	\dots	$P(Y = y_j)$	\dots	$P(Y = y_n)$	

Построение закона распределения многомерной СВ является задачей достаточно громоздкой и в ряде случаев излишней. Информация о каждой из составляющих СВ и о их взаимосвязи в этом случае не является очевидной. Для анализа степени взаимосвязи СВ используют числовые характеристики: смешанные моменты распределения, ковариацию и коэффициент корреляции.

Смешанным моментом порядка k, l называется величина

$$m_{k,l} = \begin{cases} \sum_x \sum_y x^k y^l P(x, y) & \text{- для дискретных СВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^l f(x, y) dx dy & \text{- для непрерывных СВ} \end{cases}$$

В частности $M(X) = m_{1,0}$, $M(Y) = m_{0,1}$

Центральны моментом порядка k, l называется величина

$$\mu_{k,l} = M \left[(X - M(X))^k (Y - M(Y))^l \right]$$

В частности $D(X) = \mu_{2,0}$, $D(Y) = \mu_{0,2}$

Для описания связи между СВ X и Y применяют центральный момент порядка 1,1 ($\mu_{1,1}$), который называется *ковариацией СВ*

$$\sigma_{xy} = \text{cov}(X, Y) = M \left[(X - M(X))(Y - M(Y)) \right] = M(XY) - M(X)M(Y)$$

Ковариация является абсолютной (зависящей от размерностей) мерой взаимосвязи (*co-vary* — «совместное изменение») переменных

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} \sum_x \sum_y x_i y_j P(x_i, y_j) - M(X)M(Y) & \text{- для дискретных СВ} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy - M(X)M(Y) & \text{- для непрерывных СВ} \end{cases}$$

Свойства ковариации:

1. $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$
2. $\sigma_{xx} = D(X) = \sigma_x^2$
3. $\sigma_{xy} = 0$ если СВ независимые
4. $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$
5. $\text{cov}(aX + b, cY + d) = bd \text{cov}(X, Y)$ где a, b, c, d константы

Ковариация может служить индикатором наличия положительной (переменные изменяются в одном направлении) либо отрицательной (переменные изменяются в разных направлениях) связи между СВ — ковариация в этом случае положительна либо отрицательна. Однако существенным недостатком ковариации является её зависимость от размерностей рассматриваемых СВ. Поэтому при различных единицах измерения СВ одна и та же зависимость может выражаться различными значениями ковариации. Кроме того, ковариация не позволяет определить силу (строгости) зависимости между рассматриваемыми СВ. Для устранения данных недостатков вводится относительная мера взаимосвязи (безразмерная величина) — коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции СВ X и Y называют величину

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Зависимость между СВ X и Y , характеризуемая коэффициентом корреляции, называется *корреляцией*. СВ X и Y называются *некоррелированными*, если $\rho_{xy} = 0$, что равносильно равенству $\text{cov}(X, Y) = 0$. Если же $\rho_{xy} \neq 0$, то СВ X и Y называют *коррелированными*.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $\rho_{xx} = 1$
2. $\rho_{xy} = \rho_{yx}$
3. $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$
4. $\rho_{xy} = 0$ если СВ независимые
5. $\rho_{xy} = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$ т.е. между СВ X и Y существует линейная функциональная зависимость

Если X и Y независимые СВ, то X и Y — некоррелированные СВ. Обратное утверждение неверно.

В случае, когда СВ не являются независимыми, а коррелируют друг друга, формулы расчета дисперсии их суммы либо разности имеют вид:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2 \text{cov}(X, Y)$$

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y$$

При исследовании реальных экономических процессов приходится обрабатывать большие объемы статистических данных по самым разнообразным показателям, которые по своей сути являются СВ. Часто возникает необходимость оценивания числовых значений различных параметров, неоднократно приходится выдвигать и проверять различные предположения, устанавливать наличие и силу зависимости между разнообразными факторами. На практике сталкиваются с конкретными реализациями рассматриваемых СВ. Количество таких реализаций ограничено, что не позволяет применять напрямую теоретические методы анализа. Поэтому в первую очередь используются методы и модели математической статистики (в частности, выборочный метод), позволяющие получать необходимые знания об исследуемом объекте, осуществлять направленный анализ и делать обоснованные выводы.

Одной из центральных задач математической статистики является выявление закономерностей в статистических данных, на базе которых можно строить соответствующие модели и принимать обдуманное решения. Под статистическими данными подразумеваются данные наблюдений за значениями некоторой СВ или совокупности СВ, характеризующих изучаемый процесс.

Первая задача математической статистики — указать способы сбора и группировки статистических данных, полученных в результате наблюдений или испытаний.

Вторая задача математической статистики — разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

Элементами такого анализа являются:

1. оценки неизвестной вероятности события, неизвестной функции распределения, неизвестных параметров известного распределения, зависимости двух или нескольких случайных величин и т. п.;
2. проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения; о величинах параметров известного распределения; о виде и силе зависимости между рассматриваемыми случайными величинами.

Таким образом, основная задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Знание методов математической статистики и умение ими оперировать являются необходимой предпосылкой для успешного эконометрического анализа.

Пусть изучается совокупность однородных объектов относительно некоторого количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, доход населения, количество покупателей в магазине в течение дня, количество качественных товаров в исследуемой партии и т. д.

Генеральной совокупностью называется множество всех возможных значений или реализаций исследуемой СВ X при данном реальном комплексе условий.

Выборкой (выборочной совокупностью) называют часть генеральной совокупности, отобранную для изучения.

Число элементов рассматриваемой совокупности называется ее *объемом*.

Изучение всей генеральной совокупности во многих случаях либо невозможно, либо нецелесообразно в силу больших материальных затрат, уничтожения или порчи исследуемых объектов. Например, анализ среднего дохода населения формально предполагает наличие достоверной информации о каждом жителе города в конкретный момент времени. Получение такой информации практически невозможно

На практике вся генеральная совокупность поэлементно никогда не анализируется. Для осуществления выводов о генеральной совокупности чаще всего используется выборка ограниченного объема. В силу этого задача математической статистики состоит в исследовании свойств выборки и обобщении этих свойств на генеральную совокупность. Полученный при этом вывод называется *статистическим*.

Информация о генеральной совокупности, полученная на основании выборочного наблюдения, обычно обладает некоторой погрешностью, так как она основывается на изучении только части элементов выборки. Это определяет две проблемы, составляющие содержание математической теории выборки:

- ✓ как организовать выборочное наблюдение, чтобы полученная информация достаточно полно отражала генеральную совокупность (*проблема репрезентативности выборки*);
- ✓ как использовать результаты выборки для суждения по ним с наибольшей надежностью о свойствах и параметрах генеральной совокупности (*проблема оценки*).

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если отбор будет носить случайный характер.

Различают *повторную* и *бесповторную выборки*. В первом случае отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. Во втором — отобранный в выборку объект не возвращается в генеральную совокупность. Если выборка составляет незначительную часть генеральной совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается.

Случайный отбор может проводиться с помощью датчика таблицы случайных чисел либо обычной жеребьевкой. Однако строгое соблюдение правил случайного отбора не всегда осуществимо, так как оно требует четко ограниченной базы статистического анализа, каковой является генеральная совокупность. Прибегают к различным приемам *неслучайного* отбора, стремясь, однако, приблизиться к условиям случайного.

К приемам извлечения выборки из генеральной совокупности относится *механический* отбор, при котором элементы генеральной совокупности, предварительно упорядоченные, отбираются по заранее установленному правилу, не связанному с вариацией исследуемого признака. Например, можно фиксировать доход каждого сотого, входящего в метро.

Серийным называют отбор, при котором объекты выбираются из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию. Например, о продукции предприятия можно судить по продукции, выпущенной в какие-то конкретные дни месяца.

При *типическом* отборе объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой её «типической» части. Например, население города можно предварительно классифицировать по социальному статусу (бизнесмены, чиновники, служащие, рабочие и т.д.). Нередко на практике применяется комбинированный отбор, при котором сочетаются описанные выше способы.

Во многих случаях для анализа экономических процессов важен порядок получения статистических данных. Но при рассмотрении так называемых перекрестных данных порядок их получения не играет существенной роли. Кроме того, результаты выборочных значений количественного признака X генеральной совокупности, записанные в порядке их регистрации, обычно труднообозримы и неудобны для дальнейшего анализа. Задачей статистического описания выборки является получение такого её представления, которое позволит наглядно выявить вероятностные характеристики. Для этого применяются различные формы упорядочения данных в выборке — по возрастанию, по совпадающим значениям, по интервалам и т.п.

При анализе какого-то конкретного показателя X наблюдаемые значения обычно упорядочивают по неубыванию: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Разность между максимальным и минимальным значениями СВ X называется *размахом выборки*

$$R(X) = \max_{x_i \in X}(x_i) - \min_{x_i \in X}(x_i)$$

Пусть количество различных значений в выборке равно k ($k \leq n$). И пусть значения в выборке упорядочены по возрастанию $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Значения $\{x_i\}_{i=1, \overline{k}}$ называются *вариантами выборки*.

Если значение x_i встретилось в выборке n_i раз, то число n_i называется частотой значения x_i , а величина $\omega_i = n_i/n$ — *относительной частотой* этого значения.

Наблюдаемые значения можно сгруппировать в *статистический ряд*

X	x_1	x_2	...	x_k	$\sum_{j=1}^k n_j = n$ $\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} = 1$
n_i	n_1	n_2	...	n_k	
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$...	$\frac{n_k}{n}$	

По статистическому ряду можно построить эмпирическую функцию распределения :

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

где n_x — число значений случайной величины X , меньших, чем x ;
 n — объем выборки.

Эмпирическая функция распределения обладает свойствами:

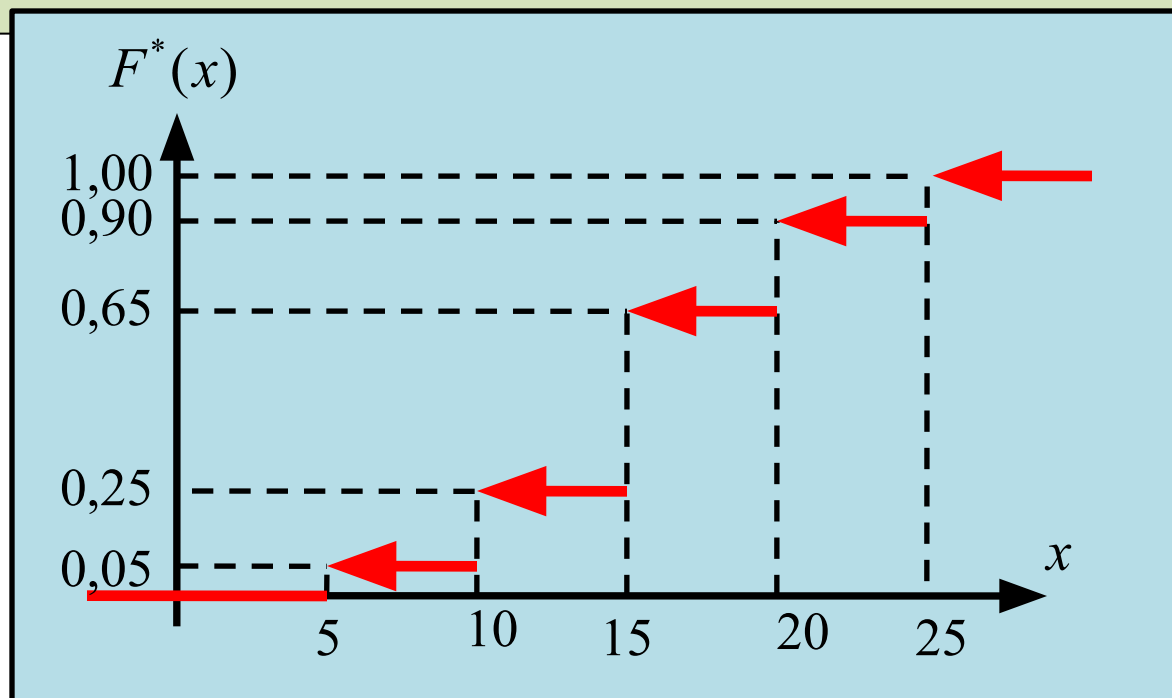
1. $0 \leq F^*(x) \leq 1$
2. $\forall x_1 < x_2: F^*(x_1) \leq F^*(x_2)$
3. $F^*(x) \leq 0$ ($x < x_1$), $F^*(x) > 1$ ($x > x_k$)

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является оценкой функции распределения $F(x) = P(X < x)$, которая в этом случае называется теоретической функцией распределения.

Пример Анализируется прибыль $X(\%)$ предприятий отрасли. Обследованы 100 предприятий, данные по которым занесены в следующий статистический ряд:

X	5	10	15	20	25
n_i	5	20	40	25	10
$\frac{n_i}{n}$	0,05	0,20	0,40	0,25	0,10

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 5, \\ 0,05 & 5 < x \leq 10, \\ 0,25 & 10 < x \leq 15, \\ 0,65 & 15 < x \leq 20, \\ 0,9 & 20 < x \leq 25, \\ 1 & x > 25 \end{cases}$$



При большом объеме выборки ее элементы могут быть сгруппированы в *интервальный статистический ряд*. Для этого все n наблюдаемых значений выборки x_1, x_2, \dots, x_n разбивают по k непересекающимся подинтервалам равной длины h (h — шаг разбиения). Пусть n_i — количество наблюдаемых значений СВ X , попадающих в i -й подинтервал; $\omega_i = n_i/n$ — относительная частота попадания СВ X в i -й подинтервал. Тогда интервальный статистический ряд имеет вид

$[x_{i-1}, x_i)$	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$...	$[x_{k-1}, x_k)$
n_i	n_1	n_2	...	n_k
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$...	$\frac{n_k}{n}$

Для любой СВ X кроме определения ее функции распределения желательно указать числовые характеристики, важнейшими из которых являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Пусть объем генеральной совокупности равен N . Тогда математическим ожиданием СВ X является *генеральное среднее*:

$$\bar{x}_{\tilde{A}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Дисперсией СВ X является *генеральная дисперсия*:

$$D_{\tilde{A}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_{\tilde{A}})^2$$

Корень квадратный из генеральной дисперсии называется *генеральным средним квадратическим отклонением*:

$$\sigma_{\tilde{A}} = \sqrt{D_{\tilde{A}}}$$

Для нахождения генеральных числовых характеристик необходим анализ всей генеральной совокупности. В силу того что в реальности чаще всего работают с выборками, приходится находить оценки указанных выше генеральных характеристик — выборочные числовые характеристики: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение.

Выборочное среднее — это среднее арифметическое наблюдаемых значений выборки,

$$\bar{x}_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

При задании выборки в виде статистического ряда выборочная средняя рассчитывается по следующей формуле:

$$\bar{x}_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

для упрощения будем обозначать $\bar{x}_{\hat{A}}$ через \bar{x}

Оценкой генеральной дисперсии является *выборочная дисперсия*:

$$D_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\hat{A}})^2$$

Причём,
$$D_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \bar{x}_{\hat{A}}^2 - 2x_i \bar{x}_{\hat{A}}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

При задании выборки в виде статистического ряда имеем:

$$D_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

Корень квадратный из выборочной дисперсии называется *выборочным средним квадратическим отклонением*:

$$\sigma_{\hat{A}} = \sqrt{D_{\hat{A}}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}$$

При задании выборки в виде интервального статистического ряда в формулах вместо x_i рассматривается среднее значение i -го подинтервала:

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

Характеристиками связи двух СВ являются меры их линейной связи — ковариация и коэффициент корреляции. Их оценками являются *выборочная ковариация* S_{xy} и *выборочный коэффициент корреляции* r_{xy} :

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sigma_{\hat{A}}(X)\sigma_{\hat{A}}(Y)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}}$$

где

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Выборочные ковариация и коэффициент корреляции обладают теми же свойствами, что и их теоретические прототипы.

Статистические выводы — это заключения о генеральной совокупности (т.е. о законе распределения исследуемой СВ и его параметрах либо о наличии и силе связи между исследуемыми переменными) на основе выборки, случайно отобранной из генеральной совокупности. Суть статистических выводов в обобщение результатов, полученных по выборке, на генеральную совокупность.

При исследовании различных параметров генеральной совокупности на основе выборки возможно лишь получение оценок этих параметров. Эти оценки строятся на основе ограниченного набора данных, что влечет за собой вероятность погрешности. Значения оценок могут изменяться от выборки к выборке. Процесс нахождения оценок по определенному правилу (формуле) называется оцениванием. Цель любого оценивания — получение наиболее точного значения оцениваемой характеристики.

Выделяют два типа оценивания: оценивание вида распределения и оценивание параметров распределения, и различают два вида оценок — точечные и интервальные.

Пусть оценивается некоторый параметр θ наблюдаемой СВ X генеральной совокупности. Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n , из которой может быть найдена оценка параметра θ^* . Например, для нормального закона распределения с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

параметрами являются математическое ожидание m и среднее квадратическое отклонение σ .

Точечной оценкой θ^ параметра θ называется числовое значение этого параметра, полученное по выборке объема n .*

Например, оценками m и σ для СВ X распределённой по нормальному закону могут быть

$$m^* = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

и

$$\sigma^* = \sigma_{\hat{A}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Очевидно, оценка θ^* является функцией от выборки, т.е. $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Так как выборка носит случайный характер, то оценка θ^* является СВ, принимающей различные значения для различных выборок. Любую оценку называют *статистикой* или *статистической оценкой* параметра θ . Положительное число δ такое, что δ называется точностью оценки. Естественно стремление получить по возможности наиболее точную оценку при данном объеме выборки.

Определим требования, выполнимость которых желательно для того, чтобы оценка была признана удовлетворительной.

В силу случайности точечной оценки θ^* она может рассматриваться как СВ со своими числовыми характеристиками — математическим ожиданием $M(\theta^*)$ дисперсией $D(\theta^*)$. Чем ближе $M(\theta^*)$ к истинному значению θ и чем меньше $D(\theta^*)$, тем лучше будет оценка θ^* (при прочих равных условиях). Качество оценки характеризуется: несмещённостью, эффективностью и состоятельностью.

Оценка θ^* называется *несмещенной оценкой* параметра θ , если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру: $M(\theta^*) = \theta$. Отдельная оценка лишь в редких случаях совпадает с соответствующей характеристикой генеральной совокупности. При «аккуратном» оценивании, т. е. многократное осуществление выборок одного объема обеспечивает совпадение среднего значения оценки по всем выборкам с истинным средним значением генеральной совокупности. Разность $M(\theta^*) - \theta$ называется *смещением* или *систематической ошибкой* оценивания. Для несмещенных оценок систематическая ошибка равна нулю

Свойство несмещенности оценки является важнейшим, но не единственным. Существует несколько возможных оценок одного и того же параметра. Какая из них лучше? Очевидно, выбор будет сделан в пользу той из них, вероятность совпадения которой с истинным значением оцениваемого параметра выше. Оценка должна иметь такую плотность вероятности, которая наиболее «сжата» вокруг истинного значения оцениваемого параметра. И в этом случае она будет иметь наименьшую среди других оценок дисперсию.

Оценка θ^* называется *эффективной оценкой* параметра θ , если ее дисперсия $D(\theta^*)$ меньше дисперсии любой другой альтернативной оценки при одном и том же объеме выборки.

Оценка θ^* называется *асимптотически эффективной*, если с увеличением объема выборки ее дисперсия стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\theta_n^*) = 0$$

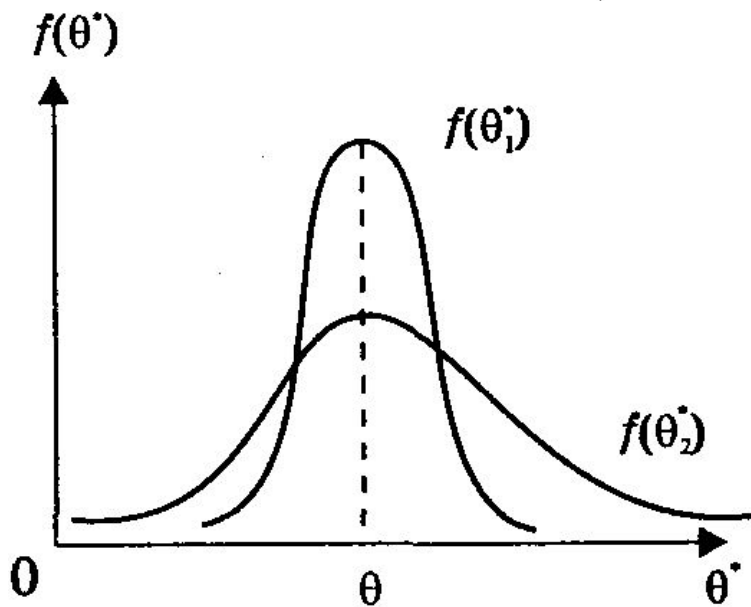
Оценка θ^* называется *состоятельной оценкой* параметра θ , если θ_n^* сходится по вероятности к θ при $n \rightarrow \infty$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

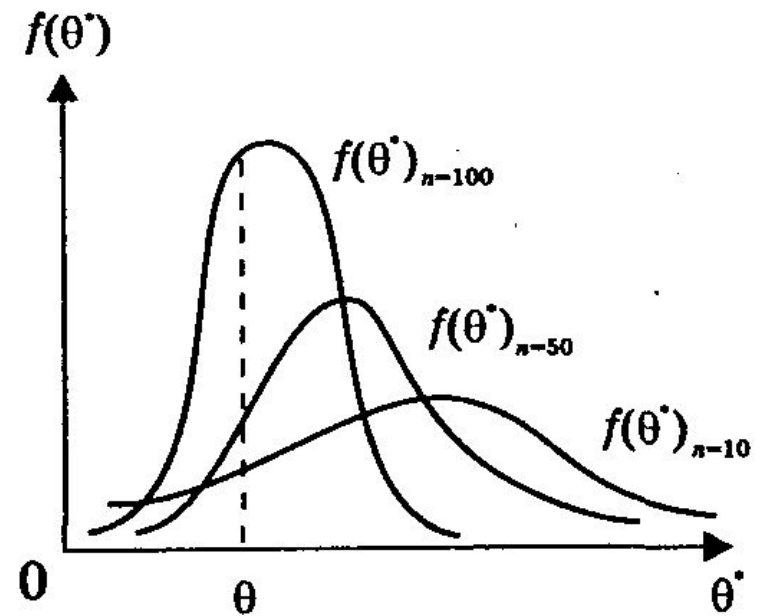
Состоятельной называется такая оценка, которая дает истинное значение при достаточно большом объеме выборки вне зависимости от значений входящих в нее конкретных наблюдений.

Справедливо:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} M(\theta_n^*) = \theta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} D(\theta_n^*) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^* \text{ состоятельная оценка параметра } \theta$$



Оценка θ_1^* эффективнее оценки θ_2^* , т.к. $D(\theta_1^*) < D(\theta_2^*)$ е. кривая плотности ближе к оцениваемой величине .



Оценка θ^* состоятельная, т.к. с увеличением числа элементов её математическое ожидание приближается к оцениваемой величине.

Можно показать, что выборочное среднее $\bar{x}_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия $D_{\hat{A}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\hat{A}})^2$ является смещенной оценкой дисперсии СВ X генеральной совокупности, $D(X) = \sigma^2$

так как $D_{\hat{A}} = \sigma^2 \frac{n-1}{n}$. Иначе, выборочная дисперсия оценивает генеральную дисперсию с недостатком. Вместе с тем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$, тогда оценка D_B

является асимптотически несмещенной. В качестве оценки дисперсии $D(X)$ рассматривают *исправленную дисперсию*:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\hat{A}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{\hat{A}})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_{\hat{A}})^2$$

Исправленная дисперсия S^2 является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $D(X)$ СВ X .

Аналогично вводится *исправленное среднее квадратическое отклонение (эмпирический стандарт S)*:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_A)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_A)^2}$$

При $n > 30$ различие между D_B и S^2 (σ_A и S) практически незначимо, поэтому при большом объеме выборки и ту, и другую оценки можно считать несмещенными.

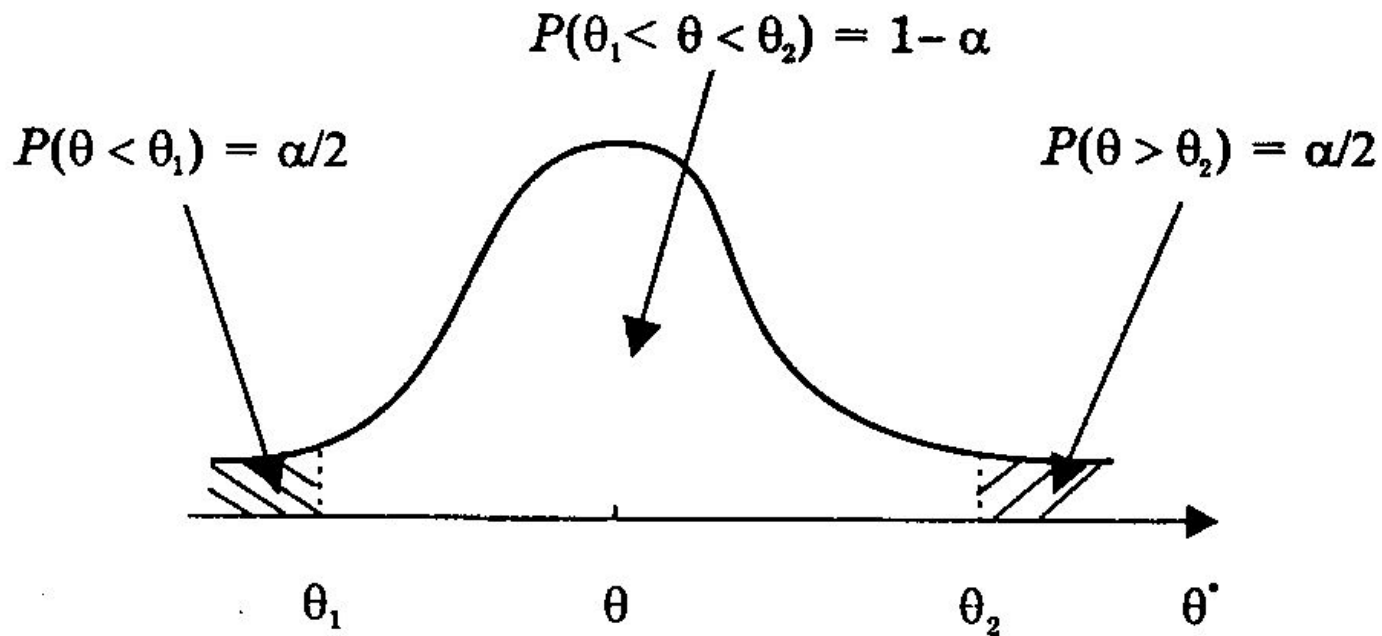
Относительная частота $\frac{n_i}{n}$ является несмещенной и состоятельной оценкой вероятности $P(X = x_i)$. Аналогично эмпирическая функция распределения

(накопленная относительная частота) является несмещенной и состоятельной оценкой (теоретической) функции распределения $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$.

$$F(x) = P(X < x)$$

Точе
, вну
знач
назы
инте
наде

интервалом
ное γ
нтервала
ельным
или
ова



Для определения доверительного интервала заранее выбирают число $\alpha = 1 - \gamma$, такое, что $0 < \alpha < 1$, называемое *уровнем значимости*, и находят два числа θ_1 и θ_2 , зависящих от точечной оценки θ^* , такие, что $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha = \gamma$. Это означает, что интервал (θ_1, θ_2) покрывает неизвестный параметр θ с вероятностью $1 - \alpha$, или в $100(1 - \alpha)\%$ случаев. Границы интервала θ_1 и θ_2 называются доверительными, и они обычно находятся из условия

$$P(\theta < \theta_1) = P(\theta > \theta_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Длина доверительного интервала, характеризующая точность интервальной оценки, зависит от объема выборки n и надежности γ (уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$). При увеличении величины n длина доверительного интервала уменьшается, а с приближением надежности γ к единице — увеличивается. Выбор α (или $\gamma = 1 - \alpha$) определяется конкретными условиями. Обычно используется $\alpha = 0,1; 0,05; 0,01$, что соответствует 90, 95, 99%-м доверительным интервалам.

Общая схема построения доверительного интервала:

1. Из генеральной совокупности с известным распределением $f(x, \theta)$ СВ X извлекается выборка объема n , по которой находится точечная оценка θ^* параметра θ .
2. Строится СВ $Y(\theta)$, связанная с параметром θ и имеющая известную плотность вероятности $f(y, \theta)$.
3. Задается уровень значимости α .
4. Используя плотность вероятности СВ Y , определяют два числа c_1 и c_2 такие, что

$$P(c_1 < Y(\theta) < c_2) = \int_{c_1}^{c_2} f(y, \theta) dy = 1 - \alpha$$

Значения c_1 и c_2 выбираются, как правило, из условия

$$P(Y(\theta) < c_1) = P(Y(\theta) > c_2) = \frac{\alpha}{2}$$

Неравенство $c_1 < Y(\theta) < c_2$ преобразуется в равносильное $\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta$ такое, что

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = 1 - \alpha$$

Полученный интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, накрывающий неизвестный параметр θ с вероятностью $1 - \alpha$, является интервальной оценкой параметра θ .

Интервальная оценка имеет случайный характер, так как она связана с результатами выборки. Если построен доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ накрывает неизвестный параметр, и его границы рассчитываются по K выборкам одинакового объема n , то в $(1 - \alpha)K$ случаях построенные интервалы накроют истинное значение исследуемого параметра.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности имеет нормальное распределение с заданной дисперсией σ^2 и неизвестным математическим ожиданием m ($X \boxtimes N(m, \sigma)$). Построим доверительный интервал для m .

1. Пусть для оценки m извлечена выборка объема n ,
 x_1, x_2, \dots, x_n

тогда
$$m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

2. Составим СВ $U = \frac{x_i - m}{\sigma/\sqrt{n}}$. Очевидно, СВ U имеет стандартизированное нормальное распределение, т.е.

$$U \boxtimes N(0,1) \left(f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right)$$

3. Зададим уровень значимости α .

4. Применяя формулу нахождения вероятности отклонения нормальной величины от математического ожидания, имеем:

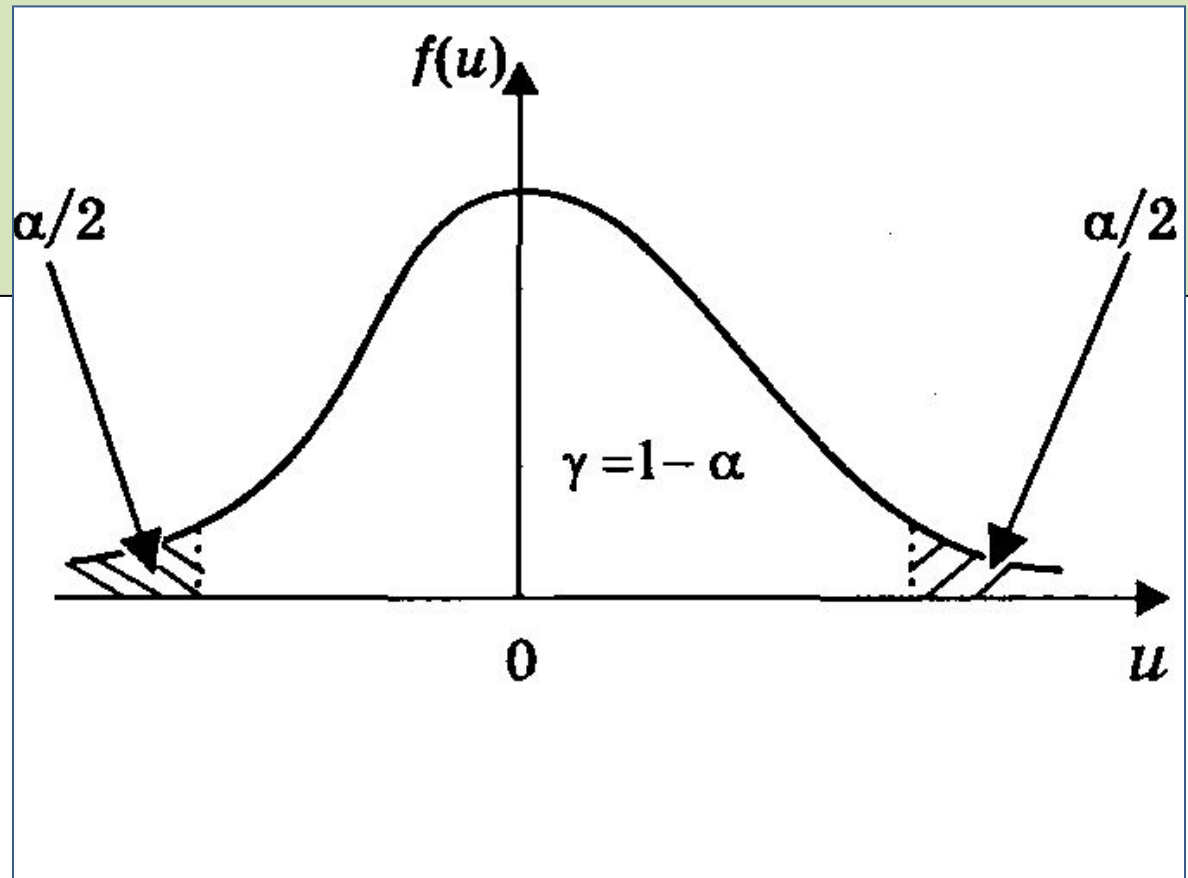
$$P\left(|U| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\left|\frac{\bar{x} - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < u_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Значит доверительный интервал $\left(\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ покрывает неизвестный параметр m с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$. Точность оценки

определяется величиной $\delta = u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Число $u_{\frac{\alpha}{2}}$ определяется по таблице значений функции Лапласа из равенства

$$\hat{O} \left(u_{\frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$$



В реальности истинное значение дисперсии исследуемой СВ, скорее всего, известно не будет. Это приводит к необходимости использования другой формулы при определении доверительного интервала для математического ожидания СВ, имеющей нормальное распределение.

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, причем m и σ^2 — неизвестны. Необходимо построить доверительный интервал, накрывающий с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ истинное значение параметра m .

Для этого из генеральной совокупности СВ X извлекается выборка x_1, x_2, \dots, x_n объема n .

1. В качестве точечной оценки математического ожидания m используется

выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, а в качестве оценки дисперсии σ^2 —

исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_A)^2$, которой
соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.

2. Для нахождения доверительного интервала строится статистика

распределения Стьюдента $T = \frac{x_i - m}{S/\sqrt{n}}$ с числом степеней свободы $\nu = n - 1$ независимо от значений параметров m и σ^2 .

3. Задается требуемый уровень значимости α .

4. Применяется следующая формула расчета вероятности

$$P\left(|T| < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} < T < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

где $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - критическая точка распределения Стьюдента, которая находится по

соответствующей таблице, тогда

$$P\left(t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} < T < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = P\left(t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} < \frac{\bar{x} - m}{S/\sqrt{n}} < t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) =$$
$$P\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} S/\sqrt{n} < m < \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} S/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

Это означает, что интервал $\left(\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} S/\sqrt{n}; \bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} S/\sqrt{n}\right)$ покрывает неизвестный параметр m с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$.

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, причем m и σ^2 — неизвестны. Необходимо построить доверительный интервал, накрывающий с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ истинное значение параметра σ^2 .

Для этого из генеральной совокупности СВ X извлекается выборка x_1, x_2, \dots, x_n объема n .

1. В качестве точечной оценки дисперсии $D(X)$ используется исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_A)^2$, которой соответствует стандартное отклонение $S = \sqrt{S^2}$.

2. Для нахождения доверительного интервала для дисперсии вводится статистика $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, имеющая χ^2 – распределение с числом степеней свободы $\nu = n - 1$ независимо от значения параметра σ^2 .

3. Задается требуемый уровень значимости $\alpha = 1 - \gamma$.

4. Используя таблицу критических точек χ^2 – распределения, можно указать критические точки $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$, для которых будет выполняться равенство:

$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

Подставив вместо χ^2 , соответствующее значение, получим

$$P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \chi^2 < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right) = P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2\right)$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Очевидно, $\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2} \Rightarrow S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}} < \sigma < S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}$

Таким образом, доверительный интервал $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}; \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}\right)$ покрывает неизвестный параметр σ^2 с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$. А доверительный интервал $\left(S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}; S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}\right)$ покрывает неизвестный параметр σ с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$.

интервал $\left(S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}; S \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2}}\right)$ с надежностью $\gamma = 1 - \alpha$ покрывает неизвестный параметр σ .

Эконометрические модели требуют многократного улучшения и уточнения. Для этого необходимо проведение соответствующих расчетов, связанных с установлением выполнимости или невыполнимости тех или иных предпосылок, анализом качества найденных оценок, достоверностью полученных выводов. Обычно эти расчеты проводятся по схеме статистической проверки гипотез.

Во многих случаях необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет определенный вид (например вид A), выдвигают гипотезу: генеральная совокупность (СВ X) распределена по закону A .

Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания предположить, что неизвестный параметр θ равен ожидаемому числу θ_0 , выдвигают гипотезу: $\theta = \theta_0$.

Статистической называют гипотезу о виде закона распределения или о параметрах известного распределения. В первом случае гипотеза называется *непараметрической*, а во втором — *параметрической*.

Гипотеза H_0 , подлежащая проверке, называется *нулевой (основной)*. Рассматривают также гипотезу H_1 , которая будет приниматься, если H_0 отклоняется. Такая гипотеза H_1 называется *альтернативной (конкурирующей)*. Например, если проверяется гипотеза о равенстве параметра θ некоторому значению θ_0 , т.е. $H_0 : \theta = \theta_0$, то в качестве альтернативной могут рассматриваться следующие гипотезы:

$$H_1^{(1)} : \theta \neq \theta_0, H_1^{(2)} : \theta > \theta_0, H_1^{(3)} : \theta < \theta_0, H_1^{(4)} : \theta = \theta_1 \ (\theta_1 \neq \theta)$$

Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи, а нулевая гипотеза часто специально так, чтобы отвергнуть ее и принять тем самым альтернативную гипотезу.

Гипотезу называют *простой*, если она содержит одно конкретное предположение. Гипотезу называют *сложной*, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез

$$\left(H_1^{(1)} : \theta \neq \theta_0, H_1^{(2)} : \theta > \theta_0, H_1^{(3)} : \theta < \theta_0 \right)$$

Сущность проверки статистической гипотезы заключается в том, чтобы установить, согласуются или нет данные наблюдений и выдвинутая гипотеза. Можно ли расхождение между гипотезой и результатом выборочных наблюдений отнести за счет случайной погрешности, обусловленной механизмом случайного отбора? Эта задача решается с помощью специальных методов математической статистики — методов статистической проверки гипотез.

При проверке гипотезы выборочные данные могут противоречить гипотезе H_0 . Тогда она *отклоняется*. Если же статистические данные согласуются с выдвинутой гипотезой, то она *не отклоняется*. В последнем случае часто говорят, что нулевая гипотеза не отклоняется. Статистическая проверка гипотез на основании выборочных данных связана с риском принятия ложного решения. При этом возможны ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята нулевая гипотеза, в то время как в действительности верна альтернативная гипотеза.

Результаты проверки гипотезы	Возможные состояния гипотезы		Последствия указанных ошибок неравнозначны.
	H_0	H_1	
отклоняется	вывод	второго рода	неоправданному риску.

Обычно значения α задают заранее, «круглыми» числами (например, 0,1; 0,05; 0,01 и т.п.), т.е. стремятся построить критерий наибольшей мощности. Если $\alpha = 0,05$ то, это означает, что исследователь не хочет совершить ошибку первого рода более чем в 5 случаях из 100.

Исключить ошибки первого и второго рода невозможно в силу ограниченности выборки. Стремятся минимизировать потери от этих ошибок. Одновременное уменьшение вероятностей данных ошибок невозможно, так как задачи их уменьшения являются конкурирующими, и снижение вероятности допустить одну из них влечет за собой увеличение вероятности допустить другую. В большинстве случаев единственный способ уменьшения вероятности ошибок состоит в увеличении объема выборки.

Вероятность совершить ошибку первого рода принято обозначать через α , и ее называют *уровнем значимости*. Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают β . Вероятность не совершить ошибку второго рода $(1 - \beta)$ называется *мощностью критерия*.

Проверку статистической гипотезы χ^2 осуществляют на основании данных выборки. Для этого используют специально подобранную СВ (статистику, критерий), точное или приближенное значение которой известно. Эту величину обозначают:

1. U (или Z) — если она имеет стандартизированное нормальное распределение;
2. T — если она распределена по закону Стьюдента;
3. χ^2 — если она распределена по закону χ^2 ;
4. F — если она имеет распределение Фишера.

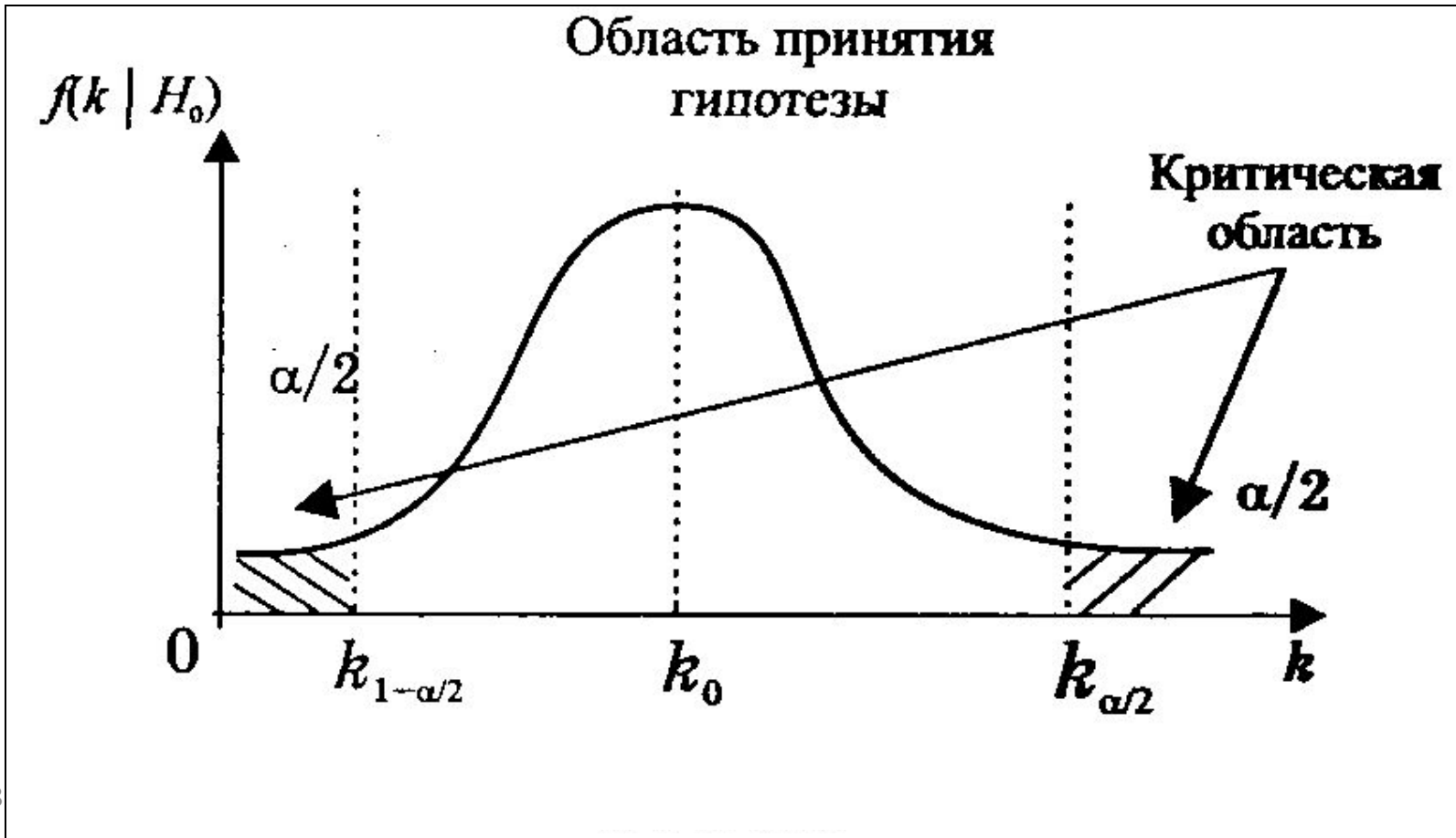
Будем обозначать такую СВ через K .

Таким образом, *статистическим критерием* называют СВ K , которая служит для проверки нулевой гипотезы. После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется, другое — при которых она не отклоняется.

Совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отклоняют, называют *критической областью*. Совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу не отклоняют, называют *областью принятия гипотезы*.

Основной принцип проверки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия K (вычисленное по выборке) принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отклоняют. Если же наблюдаемое значение критерия K принадлежит области принятия гипотезы, то нулевую гипотезу не отклоняют (принимают).

Точки, разделяющие критическую область и область принятия гипотезы, называют *критическими*.



Пусть для проверки нулевой гипотезы H_0 служит критерий K . Пусть плотность распределения вероятности СВ K в случае справедливости H_0 имеет вид $f(k, H_0)$, а математическое ожидание K равно k_0 . Тогда вероятность того, что СВ K попадет в произвольный интервал $\left(k_{1-\frac{\alpha}{2}}, k_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ исчисляется по формуле

$$P\left(k_{1-\frac{\alpha}{2}} < K < k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \int_{k_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{k_{\frac{\alpha}{2}}} f(k, H_0) dk$$

Зададим эту вероятность равной $1 - \alpha$ и вычислим критические точки

(квантили) K -распределения из условий:

$$k_{1-\frac{\alpha}{2}}, k_{\frac{\alpha}{2}}$$
$$P\left(K \leq k_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \int_{k_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{k_{\frac{\alpha}{2}}} f(k, H_0) dk = \frac{\alpha}{2}$$

$$P\left(K \geq k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \int_{k_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{k_{\frac{\alpha}{2}}} f(k, H_0) dk = \frac{\alpha}{2}$$

Следовательно,

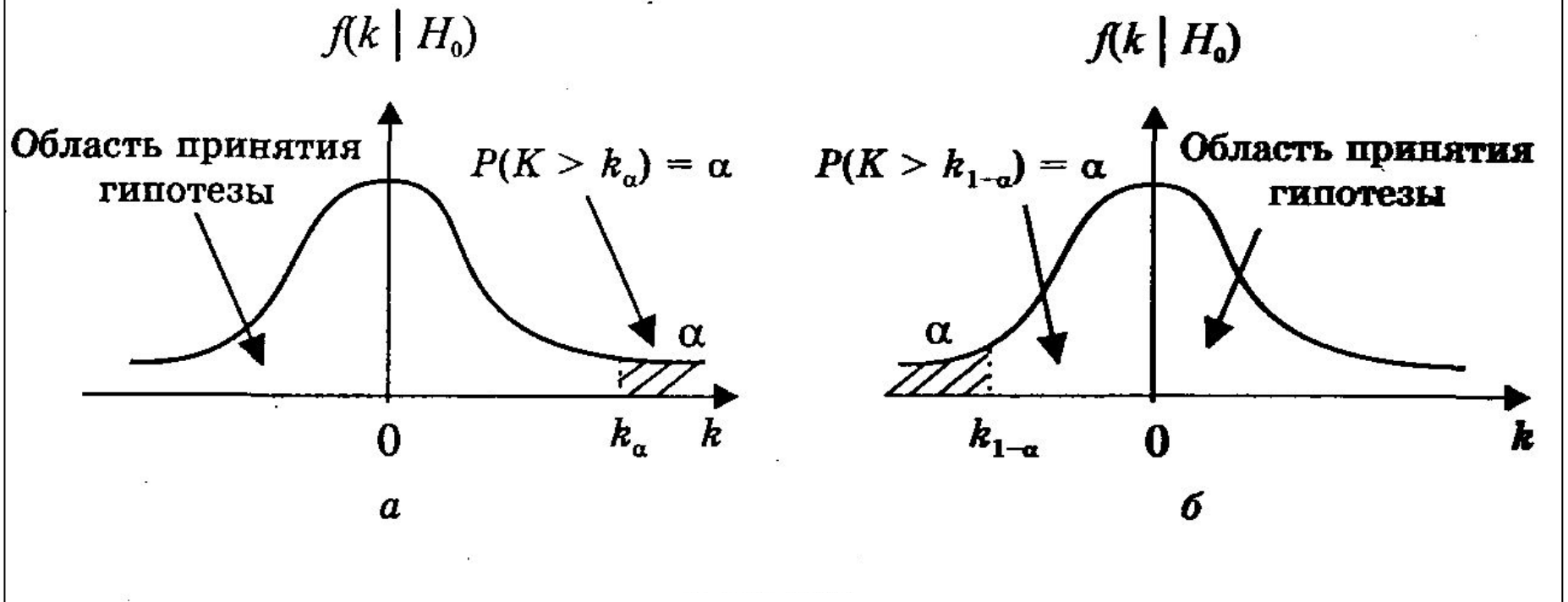
$$P\left(k_{1-\frac{\alpha}{2}} < K < k_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha,$$

$$P\left(\left(K \leq k_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(K \geq k_{\frac{\alpha}{2}}\right)\right) = \alpha$$

Пусть вероятность α настолько мала (0,05; 0,01), что попадание СВ K за пределы интервала $(k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2})$ можно считать маловероятным событием. Тогда, исходя из принципа практической невозможности маловероятных событий, можно считать, что если H_0 справедлива, то при ее проверке с помощью критерия K по данным одной выборки наблюдаемое значение K должно наверняка попасть в интервал $(k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2})$. Если же наблюдаемое значение K попадает за пределы указанного интервала, то произойдет маловероятное, практически невозможное событие. Это дает основание считать, что с вероятностью $1 - \alpha$ нулевая гипотеза H_0 несправедлива. Точки $k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2}$ называют *критическими*. Критическая область $(-\infty, k_{1-\alpha/2}) \cup (k_{\alpha/2}, +\infty)$ называется *двусторонней критической областью*, эта область определяется в случае, когда альтернативная гипотеза имеет вид: $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Правосторонней называют критическую область, определяемую из соотношения $P(K > k_\alpha) = \alpha$. Она используется в случае, когда альтернативная гипотеза имеет вид: $H_1: \theta > \theta_0$

Левосторонней называют критическую область, определяемую из соотношения $P(K < k_{1-\alpha}) = \alpha$. Она используется в случае, когда альтернативная гипотеза имеет вид: $H_1: \theta < \theta_0$



Общая схема проверки гипотез:

1. Формулировка проверяемой (нулевой — H_0) и альтернативной (H_1) гипотез.
2. Выбор соответствующего уровня значимости α .
3. Определение объема выборки n .
4. Выбор критерия K для проверки H_0 .
5. Определение критической области и области принятия гипотезы.
6. Вычисление наблюдаемого значения критерия $K_{i \text{ àáë}}$
7. Принятие статистического решения.

Проверка гипотез и доверительные интервалы. Проверка гипотез при двусторонней критической области тесно связана с интервальным оцениванием. При одном и том же уровне значимости α и объеме выборки n попадание гипотетического значения исследуемого параметра в доверительный интервал равносильно попаданию соответствующего критерия в область принятия гипотезы. Поэтому для проверки гипотезы в этом случае используют доверительный интервал. Если гипотетическое значение исследуемого параметра попадает в этот интервал, то делают вывод, что нет оснований для отклонения выдвигаемой гипотезы.

Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, $(X \boxtimes N(m, \sigma^2))$, причем ее математическое ожидание m неизвестно, а дисперсия σ^2 известна.

Предполагается, что $m = m_0$, тогда

$$H_0 : m = m_0,$$

$$H_1^{(1)} : m \neq m_0 \quad (H_1^{(2)} : m > m_0, H_1^{(3)} : m < m_0)$$

Для проверки H_0 извлекается выборка объема n : x_1, x_2, \dots, x_n и в качестве критерия строится статистика

$$U = \frac{\bar{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

Статистика U имеет стандартизированное нормальное распределение

$$U \boxtimes N(0,1)$$

1. Пусть в качестве альтернативной рассматривается гипотеза $H_1^{(1)} : m \neq m_0$. Тогда критические точки $u_{\alpha/2}$ и $u_{1-\alpha/2} = -u_{\alpha/2}$ будут определяться по таблице значений функции Лапласа из условия

$$\hat{O}(u_{\alpha/2}) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

Если $|U_{набл}| = \left| \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < u_{\alpha/2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $|U_{набл}| \geq u_{\alpha/2}$ гипотеза H_0 отклоняется в пользу альтернативной $H_1^{(1)}$.

2. При $H_1^{(2)} : m > m_0$ критическую точку u_α правосторонней критической области находят из равенства

$$\hat{O}(u_\alpha) = \frac{1 - 2\alpha}{2}$$

Если $U_{набл} < u_\alpha$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $U_{набл} \geq u_\alpha$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : m < m_0$ критическая точка $u_{1-\alpha} = u_\alpha$.

Если $U_{набл} > u_{1-\alpha}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $U_{набл} \leq u_{1-\alpha}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(3)}$.

Пусть генеральная совокупность X распределена нормально, $(X \boxtimes N(m, \sigma^2))$, причем её математическое ожидание m и дисперсия σ^2 неизвестны.

Предполагается, что $m = m_0$, тогда

$$H_0 : m = m_0,$$

$$H_1^{(1)} : m \neq m_0 \quad (H_1^{(2)} : m > m_0, H_1^{(3)} : m < m_0)$$

Для проверки H_0 извлекается выборка объема n : x_1, x_2, \dots, x_n и в качестве критерия строится t -статистика с $\nu = n - 1$ степенями свободы

$$T = \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}}$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ выборочная средняя, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ исправленная выборочная дисперсия, $S = \sqrt{S^2}$ есть стандартное отклонение.

1. При $H_1^{(1)} : m \neq m_0$ по таблице критических точек распределения Стьюдента для заданного уровня значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - 1$ находятся критические точки $t_{\alpha/2, n-1}$ и $t_{1-\alpha/2, n-1} = -t_{\alpha/2, n-1}$.

Если $|T_{\text{набл}}| = \left| \frac{\bar{x} - m_0}{S/\sqrt{n}} \right| < t_{\alpha/2, n-1}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $|T_{\text{набл}}| \geq t_{\alpha/2, n-1}$ гипотеза H_0 отклоняется в пользу альтернативной $H_1^{(1)}$.

2. При $H_1^{(2)} : m > m_0$ определяют критическую точку $t_{\alpha, n-1}$ правосторонней критической области.

Если $T_{\text{набл}} < t_{\alpha, n-1}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $T_{\text{набл}} \geq t_{\alpha, n-1}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : m < m_0$ определяют критическую точку $t_{1-\alpha, n-1} = -t_{\alpha, n-1}$ левосторонней критической области.

Если $T_{\text{набл}} > -t_{\alpha, n-1}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $T_{\text{набл}} \leq -t_{\alpha, n-1}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(3)}$.

Принятие того или иного решения в экономике часто связано с исследованием разброса возможных результатов. Такую оценку можно осуществлять на базе анализа дисперсии СВ. При изучении многих экономических проблем приходится иметь дело с выдвижением и проверкой гипотез о величине дисперсии. Одной из распространенных является гипотеза о величине дисперсии нормальной СВ.

Пусть СВ $X \in N(m, \sigma^2)$; m, σ^2 неизвестны. Проверяется гипотеза о равенстве дисперсии σ^2 нормально распределенной генеральной совокупности X гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2 . Тогда,

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

$$H_1^{(1)} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad (H_1^{(2)} : \sigma^2 > \sigma_0^2, H_1^{(3)} : \sigma^2 < \sigma_0^2)$$

Для проверки H_0 извлекается выборка объема n : x_1, x_2, \dots, x_n ; вычисляются выборочная средняя \bar{x} и исправленная выборочная дисперсия S^2

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

и в качестве критерия проверки H_0 строится статистика $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ с $\nu = n - 1$ степенями свободы.

1. При справедливости H_0 по таблице критических точек χ^2 -распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - 1$ находят критические точки $\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ и $\chi^2_{\alpha/2, n-1}$ двусторонней критической области.

Если $\chi^2_{1-\alpha/2, n-1} < \chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\alpha/2, n-1}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $\chi^2_{\text{набл}} \leq \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ или $\chi^2_{\text{набл}} \geq \chi^2_{\alpha/2, n-1}$ отклоняется H_0 в пользу $H_1^{(1)}$.

2. При $H_1^{(2)} : \sigma^2 > \sigma_0^2$ определяют критическую точку $\chi^2_{\alpha, n-1}$ правосторонней критической области.

Если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\alpha, n-1}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $\chi^2_{\text{набл}} \geq \chi^2_{\alpha, n-1}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ определяют критическую точку $\chi^2_{1-\alpha, n-1}$ левосторонней критической области.

Если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{1-\alpha, n-1}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $\chi^2_{\text{набл}} \leq \chi^2_{1-\alpha, n-1}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(3)}$.

При анализе многих экономических показателей приходится сравнивать две генеральные совокупности. В этих случаях проверяют равенство математических ожиданий двух генеральных совокупностей X и Y .

Пусть $X \boxtimes N(m_x, \sigma_x^2)$ и $Y \boxtimes N(m_y, \sigma_y^2)$, причём их дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 известны (например, из предшествующих наблюдений или определены теоретически). По двум выборкам x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_k объемов n и k соответственно необходимо проверить гипотезу $M(X) = M(Y)$, т.е.

$$H_0 : M(X) = M(Y),$$

$$H_1^{(1)} : M(X) \neq M(Y) \quad (H_1^{(2)} : M(X) > M(Y), H_1^{(3)} : M(X) < M(Y))$$

В качестве критерия проверки H_0 принимается СВ U :

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{k}}}$$

При справедливости H_0 СВ $U \boxtimes N(0,1)$

1. При H_0 по таблице функции Лапласа определяют две критические точки $u_{\alpha/2}$ и $u_{1-\alpha/2}$ из условий:

$$\hat{O}(u_{\alpha/2}) = \frac{1-\alpha}{2}, \quad u_{1-\alpha/2} = u_{\alpha/2}$$

Если $|U_{i \hat{\alpha} \hat{\alpha} \hat{\alpha}}| < u_{\alpha/2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $|U_{i \hat{\alpha} \hat{\alpha} \hat{\alpha}}| \geq u_{\alpha/2}$ гипотеза H_0 отклоняется в пользу альтернативной $H_1^{(1)}$.

2. При $H_1^{(2)} : M(X) > M(Y)$ критическую точку u_α правосторонней критической области находят из равенства

$$\hat{O}(u_\alpha) = \frac{1-2\alpha}{2}$$

Если $U_{i \hat{\alpha} \hat{\alpha} \hat{\alpha}} < u_\alpha$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $U_{i \hat{\alpha} \hat{\alpha} \hat{\alpha}} \geq u_\alpha$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : M(X) < M(Y)$ критическая точка $u_{1-\alpha}$ левосторонней критической области определяется из соотношения $u_{1-\alpha} = -u_\alpha$.

Если $U_{i \hat{\alpha} \hat{\alpha} \hat{\alpha}} > u_{1-\alpha}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $U_{i \hat{\alpha} \hat{\alpha} \hat{\alpha}} \leq u_{1-\alpha}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(3)}$.

Более реалистичным является случай, когда дисперсии рассматриваемых СВ неизвестны.

Пусть $X \boxdot N(m_x, \sigma_x^2)$ и $Y \boxdot N(m_y, \sigma_y^2)$, причём их дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны. По двум выборкам x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_k объемов n и k соответственно необходимо проверить гипотезу $M(X) = M(Y)$, т.е.

$$H_0 : M(X) = M(Y),$$

$$H_1^{(1)} : M(X) \neq M(Y) \quad (H_1^{(2)} : M(X) > M(Y), H_1^{(3)} : M(X) < M(Y))$$

В качестве критерия проверки H_0 принимается СВ T :

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n-1)S_x^2 + (k-1)S_y^2}} \sqrt{\frac{nk(n+k-2)}{n+k}}$$

$$\text{где } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i, S_y^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2$$

При справедливости H_0 статистика T имеет t -распределение Стьюдента с $\nu = n + k - 2$ степенями свободы.

1. При $H_1^{(1)} : M(X) \neq M(Y)$ по таблице критических точек распределения Стьюдента для заданного уровня значимости α и числу степеней свободы $\nu = n + k - 2$ находятся критические точки $t_{\alpha/2, n+k-2}$ и $t_{1-\alpha/2, n+k-2}$ двухсторонней критической области, причем $t_{1-\alpha/2, n+k-2} = -t_{\alpha/2, n+k-2}$.

Если $|T_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}}| < t_{\alpha/2, n+k-2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $|T_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}}| \geq t_{\alpha/2, n+k-2}$ гипотеза H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(1)}$

2. При $H_1^{(2)} : M(X) > M(Y)$ определяют критическую точку $t_{\alpha, n+k-2}$ правосторонней критической области.

Если $T_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} < t_{\alpha, n+k-2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $T_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} \geq t_{\alpha, n+k-2}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)} : M(X) < M(Y)$ определяют критическую точку левосторонней критической области.

H_0

Если $T_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} > -t_{\alpha, n+k-2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $T_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} \leq -t_{\alpha, n+k-2}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(3)}$.

При сравнении двух экономических показателей возникает необходимость анализа разброса значений рассматриваемых СВ, что осуществляют путём сравнения дисперсий исследуемых СВ.

Пусть $X \boxdot N(m_x, \sigma_x^2)$ и $Y \boxdot N(m_y, \sigma_y^2)$, причём их дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 неизвестны. По двум выборкам x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_k объемов n и k соответственно проверяют гипотезу $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ т.е.

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2,$$

$$H_1^{(1)} : M(X) \neq M(Y) \quad (H_1^{(2)} : \sigma_x^2 > \sigma_y^2)$$

(для определённости предполагается, что $S_x^2 \geq S_y^2$, в противном случае можно выполнить переобозначение).

В качестве критерия проверки H_0 принимается СВ F :

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

$$\text{где } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \bar{y} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i, S_y^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y})^2$$

При справедливости H_0 статистика F имеет F -распределение Фишера с $\nu_1 = n - 1$ степенями свободы.

1. При $H_1^{(1)} : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$ по таблице критических точек распределения Фишера для заданного уровня значимости α и числу степеней свободы v_1, v_2 определяют критическую точку $F_{\alpha/2, v_1, v_2}$.

Если $F_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} < F_{\alpha/2, v_1, v_2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $F_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} \geq F_{\alpha/2, v_1, v_2}$ гипотеза H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(1)}$

2. При $H_1^{(2)} : \sigma_x^2 > \sigma_y^2$ определяют критическую точку F_{α, v_1, v_2}

Если $F_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} < F_{\alpha, v_1, v_2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $F_{i \hat{a} \hat{a} \hat{e}} \geq F_{\alpha, v_1, v_2}$ — отклоняют H_0 в пользу $H_1^{(2)}$.

Одним из важнейших элементов эконометрического анализа является установление наличия связи между различными показателями. Обычно анализ начинают с простейшей — линейной зависимости. Для того чтобы установить наличие значимой линейной связи между двумя СВ X и Y , следует проверить гипотезу о статистической значимости коэффициента корреляции.

В этом случае используется следующая гипотеза:

$$H_0 : \rho_{xy} = 0,$$

$$H_1^{(1)} : \rho_{xy} \neq 0$$

Для проверки H_0 по выборке $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ объема n строится статистика

$$T = \frac{r_{xy} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

где r_{xy} — выборочный коэффициент корреляции.

При справедливости статистика T имеет распределение Стьюдента с $\nu = n - 2$ степенями свободы.

По таблице критических точек распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $n - 2$ определяем критическую точку $t_{\alpha/2, n-2}$.

Если $|T_{i \hat{\rho}}| < t_{\alpha/2, n-2}$ — нет оснований для отклонения H_0 .

Если $|T_{i \hat{\rho}}| \geq t_{\alpha/2, n-2}$ гипотеза H_0 отклоняется в пользу $H_1^{(1)}$

Если H_0 отклоняется, то фактически это означает, что коэффициент корреляции статистически значим (существенно отличен от нуля).

Следовательно, X и Y — коррелированы, т.е. между ними существует линейная связь.