טופולוגיה – תרגול 4

הגדרת המושג מרחב טופולוגי, דוגמאות למרחבים טופ', בסיס ותת בסיס למרחב טופ', מכפלה של מרחבים טופ', התכנסות סדרה במרחב טופ'.

כפי שראינו, הרבה טענות בהקשר למרחבים מטריים נוסחו באמצעות שפה של סביבות או שניתן היה לנסח את חלקן בשפה של סביבות.

כפי שראינו, הרבה טענות בהקשר למרחבים מטריים
נוסחו באמצעות שפה של סביבות או שניתן
היה לנסח את חלקן בשפה של סביבות.
כלומר, כל טענה כזו נוסחה בהקשר לטופולוגיה של
המרחב בלבד.

כפי שראינו, הרבה טענות בהקשר למרחבים מטריים
נוסחו באמצעות שפה של סביבות או שניתן
היה לנסח את חלקן בשפה של סביבות.
כלומר, כל טענה כזו נוסחה בהקשר לטופולוגיה של
המרחב בלבד.
על כן, אולי כדאי להכליל את המושג של מרחב מטרי
ולקבל פרספקטיבה כללית יותר התלויה במושגים
של סביבות, קבוצות פתוחות או סגורות
ושלא תהיה תלויה במטריקה שמוגדרת על קבוצה.

על כן, אולי כדאי להכליל את המושג של מרחב מטרי
ולקבל פרספקטיבה כללית יותר התלויה במושגים
של סביבות, קבוצות פתוחות או סגורות
ושלא תהיה תלויה במטריקה שמוגדרת על קבוצה.

על כן, אולי כדאי להכליל את המושג של מרחב מטרי
ולקבל פרספקטיבה כללית יותר התלויה במושגים
של סביבות, קבוצות פתוחות או סגורות
ושלא תהיה תלויה במטריקה שמוגדרת על קבוצה.
באופן כללי, יש טעם להכליל מושגים, כי לעיתים
באמצעות הכללה של מושג כזה או אחר,
נוכל לקבל הגדרות, טענות ובפרט הוכחות לטענות
בניסוח קומפקטי יותר.

הגדרה: (טופולוגיה של קבוצה)

יהי קב' X ויהי $T \subseteq P(X)$.

הגדרה: (טופולוגיה של קבוצה)

תהי קב' X ותהי $T \subseteq P(X)$.

נאמר ש- T הינה טופולוגיה על X אם:

א) $\phi, X \in T$

הגדרה: (טופולוגיה של קבוצה)

תהי קב' X ותהי $T \subseteq P(X)$.

נאמר ש- T הינה טופולוגיה על X אם:

א) $\phi, X \in T$

ב) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T \quad \forall U_1, \dots, U_n \in T$

הגדרה: (טופולוגיה של קבוצה)

תהי קב' X ותהי $T \subseteq P(X)$.

נאמר ש- T הינה טופולוגיה על X אם:

א) $\phi, X \in T$

ב) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T \quad \forall U_1,\dots,U_n \in T$

ג) $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T \quad \forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T$

הגדרה: (טופולוגיה של קבוצה)

תהי קב' X ותהי $T \subseteq P(X)$.

נאמר ש- T הינה טופולוגיה על X אם:

א) $\phi, X \in T$

ב) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T \quad \forall U_1,\dots,U_n \in T$

ג) $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T \quad \forall \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T$

כל קבוצה $U \in T$ נקרא קבוצה פתוחה,

והזוג (X,T) נקרא מרחב טופולוגי.

דוגמה:

כל קב' X, קבוצת החזקה שלה $P(X)$ מהווה טופולוגיה
על X בעצמה.

דוגמה:

כל קב' X, קבוצת החזקה שלה $P(X)$ מהווה טופולוגיה
על X בעצמה.

שימו לב שטופ' זו מושרית מתוך המטריקה הדיסקרטית.

דוגמה:

כל קב' X , קבוצת החזקה שלה $P(X)$ מהווה טופולוגיה
על X בעצמה.

שימו לב שטופ' זו מושרית מתוך המטריקה הדיסקרטית.

על כן, לטופ' זו קוראים טופ' דיסקרטית.

דוגמה נוספת:

לכל קב' X, הקבוצה $\{X,\phi\}=T$ מהווה טופ' על X.

דוגמה נוספת:

לכל קב' X , הקבוצה $T=\{X,\phi\}$ מהווה טופ' על X.

לטופ' זו קוראים טופ' טריוויאלית.

דוגמה נוספת:

לכל קב' X, הקבוצה $T=\{X,\phi\}$ מהווה טופ' על X.

לטופ' זו קוראים טופ' טריוויאלית.

שימו לב שבטופ' זו: לכל $a\in X$, הסביבה היחידה

שיש ל-a היא הקב' X.

דוגמה נוספת:

לכל קב' X, הקבוצה $T=\{X,\phi\}$ מהווה טופ' על X.

לטופ' זו קוראים טופ' טריוויאלי.

שימו לב שבטופ' זו: לכל $a\in X$, הסביבה היחידה שיש ל-a היא הקב' X.

לכן לכל שתי נקודות $a,b\in X$, לא ניתן להקיפן בסביבות כך שחיתוכן יהיה ריק כמו במרחבים מטריים.

דוגמה נוספת:

לכל קב' X, הקבוצה $T=\{X,\emptyset\}$ מהווה טופ' על X.

לטופ' זו קוראים טופ' טריוויאלית.

שימו לב שבטופ' זו: לכל $a\in X$, הסביבה היחידה

שיש ל-a היא הקב' X.

לכן לכל שתי נקודות $a,b\in X$, לא ניתן להקיפן

בסביבות כך שחיתוכן יהיה ריק כמו במרחבים

מטריים. לכן אם $|X|\geq 2$, טופ' זו אינה מושרית ממטריקה.

טיפ:

אם רוצים למצוא דוגמה נגדית למשהו, כדאי לעיתים
לחשוב על מקרים קיצוניים כגון טופ׳ דיסקרטית
או טופ׳ טריוויאלית.

טיפ:

אם רוצים לבנות דוגמה נגדית למשהו, כדאי לפעמים לחשוב על מקרים קיצוניים כגון טופ' דיסקרטית או טופ' טריוויאלית.

דוגמה נוספת:

הקבוצה $T=\{\phi,\{1,2,3\},\{1,2\},\{3\}\}$

מהווה טופ' על הקב' $\{1,2,3\}$.

טיפ:

אם רוצים לבדוק דוגמה נגדית למשהו, כדאי לעיתים לחשוב על מקרים קיצוניים כגון טופ' דיסקרטית או טופ' טריוויאלית.

דוגמה נוספת:

הקבוצה $T=\{\phi,\{1,2,3\},\{1,2\},\{3\}\}$

מהווה טופ' על הקב' $\{1,2,3\}$.

בקב' זו היחידון $\{3\}$ הוא קב' פתוחה ובנוסף, לא ניתן להפריד בין האיברים 1 ו-2 ע"י סביבות עם חיתוך ריק.

מסקנה:

אם במרחבים מטריים האוריינטציה יחסית גאומטרית,
במרחבים טופולוגיים ניתן אינטואיטיבית לדמיין לעיתים אובייקטים
באופן גאומטרי, אך כאן האוריינטציה יותר בשפה של
תורת הקבוצות.

מסקנה:

אם במרחבים מטריים האוריינטציה יחסית גאומטרית,

במרחבים טופולוגיים ניתן אינטואיטיבית לדמיין לעיתים אובייקטים

באופן גאומטרי, אך כאן האוריינטציה יותר בשפת של

תורת הקבוצות.

דוגמה נוספת:

א) הקב' $T_1=\{U\subseteq\mathbb{R} : |U|<\infty\}\cup\{\mathbb{R}\}$ אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

מסקנה:

אם במרחבים מטריים האוריינטציה יחסית גאומטרית,

במרחבים טופולוגיים ניתן אינטואיטיבית לדמיין לעיתים אובייקטים

באופן גאומטרי, אך כאן האוריינטציה יותר בשפה של

תורת הקבוצות.

דוגמה נוספת:

א) הקב' $T_1=\{U\subseteq\mathbb{R} : |U|<\infty\}\cup\{\mathbb{R}\}$ אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

ב) הקב' $T_2=\{U\subseteq\mathbb{R} : \mathbb{R}\setminus U\subseteq\mathbb{Q}\}\cup\{\phi\}$ מהווה טופ' על $\mathbb{R}$.

דוגמה נוספת:

א) הקב' $T_1=\{U\subseteq\mathbb{R} : |U|<\infty\}\cup\{\mathbb{R}\}$ אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

ב) הקב' $T_2=\{U\subseteq\mathbb{R} : \mathbb{R}\setminus U\subseteq\mathbb{Q}\}\cup\{\emptyset\}$ מהווה טופ' על $\mathbb{R}$.

דוגמה נוספת:

א) הקב' $T_1=\{U\subseteq\mathbb{R} : |U|<\infty\}\cup\{\mathbb{R}\}$ אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

ב) הקב' $T_2=\{U\subseteq\mathbb{R} : \mathbb{R}\setminus U\subseteq\mathbb{Q}\}\cup\{\phi\}$ מהווה טופ' על $\mathbb{R}$.

הוכחה:

א) (1) נשים לב שלכל $r\in\mathbb{R}$ $|\{r\}|<\infty$ ולכן $\{r\}\in T_1$.

דוגמה נוספת:

א) הקב' $T_1=\{U\subseteq\mathbb{R} : |U|<\infty\}\cup\{\mathbb{R}\}$ אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

ב) הקב' $T_2=\{U\subseteq\mathbb{R} : \mathbb{R}\setminus U\subseteq\mathbb{Q}\}\cup\{\phi\}$ מהווה טופ' על $\mathbb{R}$.

הוכחה:

א) (1) נשים לב שלכל $r\in\mathbb{R}$ $|\{r\}|<\infty$ ולכן $\{r\}\in T_1$.

(2) מצד שני $\bigcup_{r\neq 1}\{r\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ו- $|\mathbb{R}\setminus\{1\}|=\infty$.

דוגמה נוספת:

א) הקב' $T_1 = \{U \subseteq \mathbb{R} : |U| < \infty\} \cup \{\mathbb{R}\}$ אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

ב) הקב' $T_2 = \{U \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus U \subseteq \mathbb{Q}\} \cup \{\phi\}$ מהווה טופ' על $\mathbb{R}$.

הוכחה:

א) ① נשים לב שלכל $r \in \mathbb{R}$ $|\{r\}| < \infty$ ולכן $\{r\} \in T_1$.

② מצד שני $\bigcup_{r \neq 1} \{r\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ו- $|\mathbb{R} \setminus \{1\}| = \infty$.

לכן $\bigcup_{r \neq 1} \{r\} \notin T_1$ ולכן T_1 אינה טופ' על $\mathbb{R}$.

ב) 1) לפי הגדרת T_2 $\phi \in T_2$.

ב) (1) לפי הגדרת T_2 $\phi \in T_2$.

(2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \phi \subseteq \mathbb{Q}$.

ב) (1) לפי הגדרת T_2 $\phi \in T_2$.

(2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \phi \subseteq \mathbb{Q}$.

לכן $\mathbb{R} \in T_2$.

ב) ① לפי הגדרת T_2 $\phi \in T_2$.

② $\mathbb{R}\setminus\mathbb{R} = \phi \subseteq \mathbb{Q}$.

לכן $\mathbb{R} \in T_2$.

③ נתונים $U_1,\dots,U_n \in T_2$, אזי

$$\mathbb{R}\setminus\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(\mathbb{R}\setminus U_i\right) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T_2$$

ב) 1) לפי הגדרת T_2 $\phi \in T_2$.

2) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \phi \subseteq \mathbb{Q}$.

לכן $\mathbb{R} \in T_2$.

3) נתונים $U_1, \dots, U_n \in T_2$, אזי

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \setminus U_i) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in T_2$$

4) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq T_2$, אזי

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} (\mathbb{R} \setminus U_\alpha) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow$$

ב) 1) לפי הגדרת T_2, $\phi \in T_2$.

2) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\phi \subseteq \mathbb{Q}$.

לכן $\mathbb{R}\in T_2$.

3) תהיינה $U_1,\dots,U_n \in T_2$, אזי

$$\mathbb{R}\setminus\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(\mathbb{R}\setminus U_i)\subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i\in T_2$$

4) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq T_2$, אזי

$$\mathbb{R}\setminus\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(\mathbb{R}\setminus U_\alpha)\subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T_2$$

4 יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T_2$, אזי

$$\mathbb{R}\setminus\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I}\left(\mathbb{R}\setminus U_\alpha\right) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T_2$$

(4) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T_2$, אזי

$$\Leftarrow \quad \mathbb{R}\setminus\Big(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in I}(\mathbb{R}\setminus U_\alpha) \subseteq \mathbb{Q}$$

$$\Leftarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T_2$$

מאחר ו"הדרישות המכוננות" מתקיימות במלואן,

T_2 הינה טופ' על $\mathbb{R}$.

תרגיל 87:

מה מבין האוספים הבאים מהווה טופ׳ על $\mathbb{R}$?

א) $T_7 = \{(-q,q) : q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\} \cup \{\phi\}$.

תרגיל 87:

מה מבין האוספים הבאים מהווה טופ' על $\mathbb{R}$?

א) $T_1=\{(-q,q) : q\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}\}\cup\{\phi\}$.

ב) $T_2=\{(-r,r) : r\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\}\cup\{\phi\}$.

תרגיל 88:

תהי $X \neq \phi$.

תרגיל 88:

תהי $X \neq \phi$.

הוכיחו שהקב' $T_{cof} := \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \infty\} \cup \{\phi\}$

מהווה טופ' על X

תרגיל 88:

תהי $X \neq \phi$.

הוכיחו שהק' $T_{cof} := \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \infty\} \cup \{\phi\}$

מהווה טופ' על X

לטופ' זו קוראים הטופ' הקו-סופית.

תרגיל 88:

תהי $X\neq\emptyset$.

הוכיחו שהקב' $T_{cof}:=\{A\subseteq X : |X\setminus A|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$

מהווה טופ' על X

לטופ' זו קוראים הטופ' הקו-סופית.

הוכיחו בנוסף שאם $|X|<\infty$, אז T_{cof} הינה

הטופ' הדיסקרטית.

תרגיל 88:

יהי $X \neq \emptyset$.

הוכיחו שהקב' $T_{cof} := \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$

מהווה טופ' על X

לטופ' זו קוראים הטופ' הקו-סופית.

הוכיחו בנוסף שאם $|X| < \infty$, אז T_{cof} הינה

הטופ' הדיסקרטית.

הגדרה:

יהי (X, T) מרחב טופ' ותהי $A \subseteq X$ ..

תרגיל 88:

תהי $X\neq\phi$.

הוכיחו שהקב' $T_{cof}:=\{A\subseteq X : |X\setminus A|<\infty\}\cup\{\phi\}$

מהווה טופ' על X

לטופ' זו קוראים הטופ' הקו-סופית.

הוכיחו בנוסף שאם $|X|<\infty$, אז T_{cof} הינה

הטופ' הדיסקרטית.

הגדרה:

יהי (X,T) מרחב טופ' ותהי $A\subseteq X$.

נאמר ש- A סגורה אם $X\setminus A\in T$.

תרגיל 99:

יהי (X,τ) מרחב טופ'.

תרגיל 99:

יהי (X,d) מרחב טופ'.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א) ϕ, X קבוצות סגורות.

תרגיל 99:

יהי (X,d) מרחב טופ'.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א) ϕ, X קבוצות סגורות.

ב) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות, סגור.

תרגיל 99:

יהי (X,d) מרחב טופ'.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א) ϕ, X קבוצות סגורות.

ב) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות, סגור.

ג) איחוד סופי של קב' סגורות, סגור.

תרגיל 99:

יהי (X,d) מרחב מטרי.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א) ϕ, X קבוצות סגורות.

ב) חיתוך שרירותי של קבוצות סגורות, סגור.

ג) איחוד סופי של קב' סגורות, סגור.

הגדרה:

כל מה שהגדרנו במרחבים מטריים ושניסח בשפה של

קבוצות פתוחות או קב' סגורות, כגון סביבה של נקודה,

נגדיר שיהיה תקף גם למרחבים טופולוגיים.

טענה:

יהי (X,T) מרחב טופ', תהי $Y \subseteq X$ תת קב' ונגדיר:

$$T_Y := \{U \cap Y \ : \ U \in T\}$$

טענה:

יהי (X,T) מרחב טופ', תהי $X \supseteq Y$ תת קב' ונגדיר:

$$T_Y := \{U \cap Y : U \in T\}$$

אזי, T_Y מהווה טופ' על Y.

טענה:

יהי (X,T) מרחב טופ', תהי $Y\subseteq X$ תת קב' ונגדיר:

$$T_Y := \{U\cap Y : U\in T\}$$

אזי, T_Y מהווה טופ' על Y.

לטופ' זו קוראים טופ' תת מרחב, ולזוג (Y,T_Y)

קוראים תת מרחב טופולוגי.

טענה:

יהי (T,X) מרחב טופ', תהי $X \supseteq Y$ תת קב' ונגדיר:

$$T_Y := \{U \cap Y \ : \ U \in T\}$$

אזי, T_Y מהווה טופ' על Y.

לטופ' זו קוראים טופ' תת מרחב, ולזוג (Y,T_Y)

קוראים תת מרחב טופולוגי.

הוכחה:

תרגיל 100.

הערה:

נשים לב שטופולוגית תת המרחב שהוגדרה לעיל מתנהגת באופן דומה לטופ' של תת מרחב מטרי.

הערה:

נשים לב שטופולוגיית תת המרחב שהוגדרה לעיל מתנהגת
באופן דומה לטופ' של תת מרחב מטרי.
כעיקרון, אני נראה בהמשך מקרים נוספים שבהם תוגדר
טופ' שתהיה דומה במשהו לטופולוגיות של
מרחבים מטריים.

תרגיל ד.100 :

יהי X מרחב טופ' ויהי Y תת מרחב טופ'

של X.

תרגיל 1.100 :

יהי X מרחב טופ' ויהי Y תת מרחב טופ'
של X.

תהי $A \subseteq Y$.

תרגיל 7.100 :

יהי X מרחב טופ' ויהי Y תת מרחב טופ' של X.

תהי $A \subseteq Y$.

הוכח ש- A סגורה ב-Y אמ"מ קיימת קב' B שסגורה ב-X, כך ש- $A = B \cap Y$.

תרגיל 105:

יהי $(X, \mathcal{T}_{cof})$ מרחב קו-סופי, אינסופי.

תרגיל רשר:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי, אינסופי.

הוכיחו שלכל $x,y\in X$ לא ניתן להפריד בשתי סביבות

שחיתוכן ריק.

תרגיל וסר:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי, אינסופי.

הוכיחו שלכל $x,y\in X$ לא ניתן להפריד בשתי סביבות שחיתוכן ריק.

טענה:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

תרגיל וסר:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי, אינסופי.

הוכיחו שלכל $x,y \in X$ לא ניתן להקיפן בשתי סביבות שחיתוכן ריק.

פתרון:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

אזי, כל תת מרחב שלו הינו קו-סופי גם כן.

טענה:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

אזי, כל תת מרחב שלו הינו קו-סופי גם כן.

טענה:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

אזי, כל תת מרחב שלו הינו קו-סופי גם כן.

הוכחה:

1. יהי Y תת מרחב טופ' של X.

טענה:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

אזי, כל תת מרחב שלו הינו קו-סופי גם כן.

הוכחה:

(1) יהי Y תת מרחב טופ' של X.

לפי הגדרה, הטופולוגיה הקו-סופית על Y היא

הקב' $T'_{cof} := \{W \subseteq Y : |Y \setminus W| < \infty\} \cup \{\phi\}$

טענה:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

אזי, כל תת מרחב שלו הינו קו-סופי גם כן.

הוכחה:

(1) יהי Y תת מרחב טופ' של X.

לפי הגדרת הטופולוגיה הקו-סופית על Y הינו

הקבוצ' $T'_{cof} := \{W \subseteq Y : |Y \setminus W| < \infty\} \cup \{\phi\}$

אנו צריכים להראות ש- $T_{cof,Y} = T'_{cof}$:

הוכחה:

(1) יהי Y תת מרחב טופ' של X.

לפי הגדרת הטופולוגיה הקו-סופית על Y היא:

הקב' $T'_{cof} := \{W \subseteq Y : |Y \setminus W| < \infty\} \cup \{\phi\}$

אנו צריכים להראות ש- $T'_{cof} = T_{cof_Y}$:

הוכחה:

(1) יהי Y תת מרחב טופ' של X.

לפי הגדרה, הטופולוגיה הקו-סופית על Y היא

הקב' $T'_{cof} := \{W \subseteq Y : |Y \setminus W| < \infty\} \cup \{\phi\}$

אנו צריכים להראות ש- $T_{cof,Y} = T'_{cof}$:

(2) תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$\exists U \in T_{cof} : V = U \cap Y \Leftarrow$

הוכחה:

(1) יהי Y תת מרחב טופ' של X.

לפי הגדרת הטופולוגיה תת-מרחבית על Y היא

תקבל' $T'_{cof} := \{W \subseteq Y : |Y \setminus W| < \infty\} \cup \{\phi\}$

אנו צריכים להראות ש- $T_{cof,Y} = T'_{cof}$:

(2) תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$$\Rightarrow \exists U \in T_{cof} : V = U \cap Y$$

$$\Rightarrow |Y \setminus V| = |Y \setminus (U \cap Y)| = |Y \setminus U| \le |X \setminus U| < \infty \Rightarrow$$

הוכחה:

(1) יהי Y תת מרחב טופ' של X.

לפי הגדרה, הטופולוגיה הקו-סופית על Y היא

הקב' $T'_{cof} := \{W \subseteq Y : |Y \setminus W| < \infty\} \cup \{\phi\}$

אנו צריכים להראות ש- $T_{cof,Y} = T'_{cof}$:

(2) תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$$\exists U \in T_{cof} : V = U \cap Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Y \setminus V| = |Y \setminus (U \cap Y)| = |Y \setminus U| \leq |X \setminus U| < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V \in T'_{cof}$$

(2) תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$\exists U \in T_{cof} \quad : \quad V = U \cap Y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |Y \setminus V| = |Y \setminus (U \cap Y)| = |Y \setminus U| \leq |X \setminus U| < \infty \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad V \in T'_{cof}$

(2) תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$\exists U \in T_{cof} \quad : \quad V = U \cap Y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |Y \setminus V| = |Y \setminus (U \cap Y)| = |Y \setminus U| \leq |X \setminus U| < \infty \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad V \in T'_{cof}$

(3) תהי $\phi \neq W \in T'_{cof}$.

(2) תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$$\exists U \in T_{cof} : V = U \cap Y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |Y \setminus V| = |Y \setminus (U \cap Y)| = |Y \setminus U| \le |X \setminus U| < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V \in T'_{cof}$$

(3) תהי $\phi \neq W \in T'_{cof}$.

אם $Y \in T_{cof}$, אז $|X \setminus Y| < \infty$ ולכן

$$|X \setminus W| = |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus W)| < \infty \Rightarrow W \in T_{cof} \Rightarrow$$

② תהי $\phi \neq V \in T_{cof,Y}$, אזי

$\exists U \in T_{cof} \quad : \quad V = U \cap Y \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |Y \setminus V| = |Y \setminus (U \cap Y)| = |Y \setminus U| \leq |X \setminus U| < \infty \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad V \in T'_{cof}$

③ תהי $\phi \neq W \in T'_{cof}$.

אם $Y \in T_{cof}$, אזי $|X \setminus Y| < \infty$ ולכן

$|X \setminus W| = |(X \setminus Y) \cup (Y \setminus W)| < \infty \quad \Rightarrow \quad W \in T_{cof} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad W = W \cap Y \in T_{cof,Y}$

(3.1) אם $Y \notin T_{cof}$, אז $|X\setminus Y|=\infty$ ולכן ישנו $x_0\in X\setminus Y$

(3.1) אזי $Y \notin T_{cof}$, אבל $|X \setminus Y| = \infty$ ולכן ישנו $x_0 \in X \setminus Y$

(3.2) נסמן $U := W \cup (X \setminus (Y \cup \{x_0\}))$.

(3.1) אם $Y\notin T_{cof}$, אזי $|X\setminus Y|=\infty$ ולכן ישנו $x_0\in X\setminus Y$

(3.2) נסמן $U:=W\cup(X\setminus(Y\cup\{x_0\}))$.

מתוך כך נקבל ש-

$$|X\setminus U|=|(X\setminus W)\cap(Y\cup\{x_0\})|=$$

(3.1) אם $Y \notin T_{cof}$, אז $|X \setminus Y| = \infty$ ולכן ישנו $x_0 \in X \setminus Y$

(3.2) נסמן $U := W \cup (X \setminus (Y \cup \{x_0\}))$.

מתוך כך נקבל ש-

$$|X \setminus U| = |(X \setminus W) \cap (Y \cup \{x_0\})| =$$

$$= |(Y \setminus W) \cup \{x_0\}| < \infty$$

(3.1) אם $Y \notin T_{cof}$, אז $|X \setminus Y| = \infty$ ולכן ישנו $x_0 \in X \setminus Y$

(3.2) נסמן $U = W \cup (X \setminus (Y \cup \{x_0\}))$.

מתוך כך נקבל ש-

$$|X \setminus U| = |(X \setminus W) \cap (Y \cup \{x_0\})| =$$

$$= |(Y \setminus W) \cup \{x_0\}| < \infty$$

ובנוסף, נקבל ש- $W = U \cap Y$

(3.1) אם $Y\notin T_{cof}$, אז $|X\setminus Y|=\infty$ ולכן ישנו $x_0\in X\setminus Y$

(3.2) נסמן $U=W\cup(X\setminus(Y\cup\{x_0\}))$.

מכיון כך נקבל ש-

$$|X\setminus U|=|(X\setminus W)\cap(Y\cup\{x_0\})|=$$

$$=|(Y\setminus W)\cup\{x_0\}|<\infty$$

ובנוסף , נקבל ש- $W=U\cap Y$

לכן גם במקרה זה $W\in T_{cof,Y}$.

תרגיל 102:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

תרגיל 102 :

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

תוכיחו ש- $A \subseteq X$ קבוצה סגורה ב-X אמ"מ $|A|<\infty$

תרגיל 102:

יהי (X,T_{cof}) מרחב קו-סופי.

הוכיחו ש- $A\subseteq X$ קבוצה סגורה ב-X אמ"מ $|A|<\infty$

תרגיל 103:

יהי (X,T_{cof}) מרחב קו-סופי, יהי $a\in X$ ותהי $V\subseteq X$

קבוצה המכילה את a.

תרגיל 102:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי.

הוכיחו ש- $A \subseteq X$ קבוצה סגורה ב-X אמ"מ $|A| < \infty$

תרגיל 103:

יהי (X, T_{cof}) מרחב קו-סופי, יהי $a \in X$ ותהי $V \subseteq X$

קבוצה המכילה את a.

הוכיחו ש- V הינה סביבה של a אמ"מ V פתוחה.

הגדרה:

תהי קבוצה של קבוצות S ונסמן

$$\bigcup S := \bigcup_{x \in S} x$$

הגדרה:

תהי קבוצה של קבוצות S ונסמן

$$\bigcup S := \bigcup_{x \in S} x$$

למשל, אם $S=\{\{1,2\},\{3\}\}$, אז $\bigcup S=\{1,2,3\}$

הגדרה:

תהי קבוצה של קבוצות S ונסמן

$$\cup S := \bigcup_{x \in S} x$$

למשל, אם $S=\{\{1,2\},\{3\}\}$, אז $\cup S=\{1,2,3\}$

הגדרה:

תהי קב' X ותהי $S \subseteq P(X)$. נאמר ש-S היא כיסוי של X אם $\cup S = X$.

לאחר שהכרנו את המושגים טופולוגיה ומרחב טופולוגי, נלמד

מספר כלים לבניית טופולוגיה על קבוצה:

לאחר שהכרנו את המושגים טופולוגיה ומרחב טופולוגי, נלמד
מספר כלים לבניית טופולוגיה על קבוצה:

הגדרה: (בסיס לטופולוגיה)

תהי $X \neq \emptyset$ ויהי $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ כיסוי של X.

לאחר שהכרנו את המושגים טופולוגיה ומרחב טופולוגי, נלמד
מספר כלים לבניית טופולוגיה על קבוצה:

הגדרה: (בסיס לטופולוגיה)

תהי $X \neq \emptyset$ ויהי $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ כיסוי של X.

נאמר ש-$\mathcal{B}$ הינו בסיס לטופ' על X אם

$$\forall x \in X \ \forall W, V \in \mathcal{B} \ (x \in W \cap V \Rightarrow (\exists U_x \in \mathcal{B} : x \in U_x \subseteq W \cap V))$$

לאחר שהכרנו את המושגים טופולוגיה ומרחב טופולוגי, נלמד מספר כלים לבניית טופולוגיה על קבוצה:

הגדרה: (בסיס לטופולוגיה)

תהי $X \neq \emptyset$ ויהי $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ כיסוי של X.

נאמר ש- $\mathcal{B}$ הינו בסיס לטופ' על X אם

$$\forall x \in X \ \forall W, V \in \mathcal{B} \ \left(x \in W \cap V \Rightarrow \left(\exists U_x \in \mathcal{B} : x \in U_x \subseteq W \cap V \right) \right)$$

לכל $B \in \mathcal{B}$ נקרא קב' בסיסית.

תרגיל 103:

תהי X קבוצה לא ריקה ויהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופ' על X.

תרגיל 103:

תהי X קב' לא ריקה ויהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופ' על X.

תהינה $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B}$ קב' בסיסיות

תרגיל 103:

תהי X קב' לא ריקה ויהי $\mathcal{B}$ בסיס לטופ' על X.

תהינה $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B}$ קב' בסיס.

הוכיחו ש-:

$$\forall x\in \bigcap_{i=1}^{n} B_i \quad \exists V_x\in\mathcal{B} \ : \ x\in V_x\subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i$$

תרגיל 106:

תהי X קב' לא ריקה, יהי בסיס $\mathcal{B}$ ונגדיר:

$$T_{\mathcal{B}} := \{\cup S \ : \ S \subseteq \mathcal{B}\}$$

תרגיל 106:

תהי X קב' לא ריקה, יהי בסיס $\mathcal{B}$ ונגדיר:

$$T_{\mathcal{B}} := \{\cup S \ : \ S \subseteq \mathcal{B}\}$$

הוכח ש-

$$\forall B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in T_{\mathcal{B}}$$

תרגיל 106:

תהי X קבוצה לא ריקה, יהי בסיס $\mathcal{B}$ ונגדיר:

$$T_{\mathcal{B}} := \{\cup S \ : \ S \subseteq \mathcal{B}\}$$

הוכיחו ש-

$$\forall B_1,\dots,B_n \in \mathcal{B} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in T_{\mathcal{B}}$$

תרגיל 106.1:

הראו שלכל טופ' יש בסיס.

משפט:

תהי X קב' לא ריקה ויהי $\mathcal{B}$ בסיס, אזי

$\mathcal{B}^{T}$ מהתרגיל הקודם מהווה טופ' על X.

משפט:

תהי X קב' לא ריקה ויהי $\mathcal{B}$ בסיס, אזי

$\mathcal{B}^T$ מהתרגיל הקודם מהווה טופ' על X.

הוכחה:

(1) לפי הגדרת $\mathcal{B}^T$, $\bigcup\mathcal{B}$ הינו איחוד שרירותי

של קב' בסיסיות בעצמו.

משפט:

תהי X קב' לא ריקה ויהי $\mathcal{B}$ בסיס, אזי
$T_{\mathcal{B}}$ מהתרגיל הקודם מהווה טופ' על X.

הוכחה:

(1) לפי הגדרת $T_{\mathcal{B}}$, $\cup\mathcal{B}$ הינו איחוד שרירותי
של קב' בסיסיות בעצמו.
לכן $\cup\mathcal{B}=X\in T_{\mathcal{B}}$.

הוכחות:

1. לפי הגדרת $T_{\mathcal{B}}$, $\cup\mathcal{B}$ הינו איחוד שרירותי
של קב' בסיסית בעצמו.
לכן $\cup\mathcal{B}=X\in T_{\mathcal{B}}$.

הוכחה:

(1) לפי הגדרת $T_{\mathcal{B}}$, $\cup\mathcal{B}$ הינו איחוד שרירותי
של קב' בסיסית בעצמו.
לכן $\cup\mathcal{B}=X\in T_{\mathcal{B}}$.

(2) שימו לב שכאשר אומרים "איחוד שרירותי", מתכוונים לכך
שאם S הינה תת קב' של $\mathcal{B}$, אזי
$\cup S$ הינו איחוד של כל איברי S.

הוכחה:

(1) לפי הגדרת $T_{\mathcal{B}}$, $\cup\mathcal{B}$ הינו איחוד שרירותי
של קב' בסיסית בעצמו.
לכן $\cup\mathcal{B} = X \in T_{\mathcal{B}}$.

(2) שימו לב שכאשר אומרים "איחוד שרירותי", מתכוונים לכך
שאם S הינה תת קב' של $\mathcal{B}$, אז
$\cup S$ הינו איחוד של כל איברי S.
ב"שרירותי" מתכוונים לכך ש-S יכולה להיות
כל תת קב' של $\mathcal{B}$.

הוכחה:

(1) לפי הגדרת $T_{\mathcal{B}}$, $\cup\mathcal{B}$ הינו איחוד שרירותי
של קב' בבסיס בעצמו.
לכן $\cup\mathcal{B} = X \in T_{\mathcal{B}}$.

(2) שימו לב שכאשר אומרים "איחוד שרירותי", מתכוונים לכך
שאם S הינה תת קב' של $\mathcal{B}$, אז
$\cup S$ הינו איחוד של כל איברי S.
ב"שרירותי" מתכוונים לכך ש-S יכולה להיות
כל תת קב' של $\mathcal{B}$.
מכיוון שגם ϕ הינה תת קב' של $\mathcal{B}$ גם
כן, נקבל ש- $\cup\phi = \phi \in T_{\mathcal{B}}$.

(3) יהי אוסף פתוחות: $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq T_B$

(3) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}\subseteq T_B$

אזי, לפי הגדרת T_B, לכל $\alpha\in I$ U_α הינו

איחוד שרירותי של קב' בסיסיות.

(3) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T_B$

אזי, לפי הגדרת T_B, לכל $\alpha \in I$ U_α הינו

איחוד שרירותי של קב' בסיסיות.

כלומר:

$$\forall \alpha \in I \quad \exists S_\alpha \subseteq B : \quad U_\alpha = \cup S_\alpha \Rightarrow$$

(3) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq T_B$

אזי, לפי הגדרת T_B, לכל $\alpha \in I$ U_α הינו

איחוד שרירותי של קב' בסיסיות.

כלומר:

$$\forall \alpha \in I \quad \exists S_\alpha \subseteq \mathcal{B} : \quad U_\alpha = \cup S_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (\cup S_\alpha)$$

(3) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T_B$

אזי, לפי הגדרת T_B, לכל $\alpha \in I$ U_α הינו איחוד שרירותי של קב' בסיסיות.

כלומר:

$$\forall \alpha\in I \ \exists S_\alpha \subseteq B : \quad U_\alpha = \cup S_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} \left(\cup S_\alpha\right)$$

וזהו איחוד שרירותי של קב' בסיסיות גם כן.

(3) יהי אוסף שרירותי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq T_B$

אזי, לפי הגדרת T_B, לכל $\alpha \in I$ U_α הינו איחוד שרירותי של קב' בסיסית.

כלומר:

$$\forall \alpha\in I \quad \exists S_\alpha \subseteq B \; : \; U_\alpha = \bigcup S_\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} \left(\bigcup S_\alpha\right)$$

וזהו איחוד שרירותי של קב' בסיסית גם כן.

לכן $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \in T_B$.

(4) תהינה $U_1,\dots,U_n\in T_{\mathcal{B}}$, אזי

$$\forall i\in\{1,\dots,n\}\quad \exists S_i\subseteq \mathcal{B} \;:\; U_i=\bigcup S_i \quad \Rightarrow$$

4 תהיינה $U_1,\dots,U_n \in T_{\mathcal{B}}$ אז

$\forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \exists S_i \subseteq \mathcal{B} \;:\; U_i = \bigcup S_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcup S_i\right)$

④ תכונה $U_1, \ldots, U_n \in T_{\mathcal{B}}$, אז

$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists S_i \subseteq \mathcal{B} \quad : \quad U_i = \cup S_i \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\cup S_i)$

⑤ נסמן $W = \prod_{i=1}^{n} S_i$.

(4) תהינה $U_1,\dots,U_n \in T_{\mathcal{B}}$ אזי

$$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} \quad \exists S_i \subseteq \mathcal{B} : \quad U_i = \cup S_i$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\cup S_i)$$

(5) נסמן $W = \prod_{i=1}^{n} S_i$.

אזי כל איבר $\bar{B} = (B_1,\dots,B_n) \in W$ הינו

סדרה בת n קבוצות בסיסיות, כך שלכל i $B_i \in S_i$.

(4) תהינה $U_1,\dots,U_n \in T_{\mathcal{B}}$, אזי

$$\forall i\in\{1,\dots,n\} \quad \exists S_i \subseteq \mathcal{B} \ : \ U_i = \cup S_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\cup S_i)$$

(5) נסמן $W=\prod_{i=1}^{n} S_i$.

אזי כל איבר $\bar{B}=(B_1,\dots,B_n)\in W$ הינו

סדרה בת n קבוצות בסיסיות, כך שלכל i $B_i\in S_i$.

מתוך כך נקבל ש-

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n} (\cup S_i) = \bigcup_{\bar{B}\in W} \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$$

(6) לפי תרגיל 106 ,

$$\forall \tilde{B} \in W \quad \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in T_B$$

(6) לפי תרגיל 106,

$\forall \tilde{B} \in W \quad \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in T_{\mathcal{B}}$

לכן, לפי (3) $\bigcup_{\tilde{B} \in W} \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i \right) \in T_{\mathcal{B}}$.

(6) לפי תרגיל 106,

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i \in T_{\mathcal{B}} \quad \forall \bar{B} \in W$$

לכן, לפי (3) $\bigcup_{\bar{B}\in W} \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \in T_{\mathcal{B}}$.

על כן, $T_{\mathcal{B}}$ מהווה טופ' על X.

תרגיל 107:

יהי (X,d) מרחב מטרי

תרגיל 107:

יהי (X,d) מרחב מטרי

הראו שאוסף כל הכדורים הפתוחים $B_r(x,d)$

מהווה בסיס לטופ' τ_d, המושרית מהמטריקה d.

תרגיל 108:

ד) הראו שהאוסף $S=\{[a,b) : a<b\in\mathbb{R}\}$ מהווה

בסיס לטופ' על $\mathbb{R}$.

תרגיל 108:

א) הראו שהאוסף $S=\{[a,b) : a<b\in\mathbb{R}\}$ מהווה
בסיס לטופ' על $\mathbb{R}$.
לטופ' T_s הנוצרת מ-S קוראים
טופולוגית Sorgenfrey.

תרגיל 108:

א) הראו שהאוסף $S=\{[a,b) : a<b\in\mathbb{R}\}$ מהווה
בסיס לטופ' על $\mathbb{R}$.
לטופ' T_s הנוצרת מ-S קוראים
טופולוגית Sorgenfrey.

ב) הראו שכל קטע פתוח (a,b) הינו קב' פתוחה
ב-$(\mathbb{R},T_s)$.

תרגיל פסר:

תהי X קב' לא ריקה ויהי כיסוי S ל-X.

תרגיל נוסף:

תהי X קב' לא ריקה ויהי S כיסוי ל-X.

נגדיר:

$$\mathcal{B}_S := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \ : \ n\in\mathbb{N} \ , \ \forall i\in\{1,\dots,n\} \ \ S_i\in S \right\}$$

תרגיל ספר:

תהי X קב' לא ריקה ויהי S כיסוי ל-X.

נגדיר:

$$\mathcal{B}_S := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i \ : \ n\in\mathbb{N},\ \forall i\in\{1,\dots,n\}\ S_i\in S \right\}$$

הוכיחו ש- $\mathcal{B}_S$ מהווה בסיס ל-X.

מסקנה:

תהי X קב' לא ריקה.

מסקנה:

תהי X קב' לא ריקה.

מאחר וניתן ליצור בסיס לטופ' על X מתוך כל כיסוי של X, קוראים לכיסוי של X תת בסיס לטופ'.

מסקנה:

תהי X קב' לא ריקה.

מאחר וניתן ליצור בסיס לטופ' על X מתוך כל
כיסוי של X, קוראים לכיסוי של X תת בסיס
לטופ'.

לכל תת בסיס $\mathcal{S}$, מסמנים ב- $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ את הטופ'
הנוצרת מהבסיס שנוצר ע"י $\mathcal{S}$.

משפט: (קריטריון לבסיס של טופולוגיה נתונה)

יהי (X,T) מרחב טופולוגי ויהי $\mathcal{B}$ כיסוי של X.

משפט: (קריטריון לבסיס של טופולוגיה נתונה)

יהי (X,T) מרחב טופולוגי ויהי $\mathcal{B}$ כיסוי של X.

אזי, $\mathcal{B}$ מהווה בסיס לטופ' T אמ"מ

$$\forall U\in T \;\; \forall x\in U \;\; \exists B_x\in\mathcal{B} : \;\; x\in B_x\subseteq U$$

משפט: (קריטריון לבסיס של טופולוגיה נתונה)

יהי (X,T) מרחב טופולוגי ויהי $\mathcal{B}$ כיסוי של X.

אזי, $\mathcal{B}$ מהווה בסיס לטופו׳ T אם״ם

$$\forall U\in T \;\; \forall x\in U \;\; \exists B_x\in\mathcal{B} : \;\; x\in B_x\subseteq U$$

הוכחה:

תרגיל 110.

משפט: (קריטריון לבסיס של טופולוגיה נתונה)

יהי (X,T) מרחב טופולוגי ויהי $\mathcal{B}$ כיסוי של X.

אזי, $\mathcal{B}$ מהווה בסיס לטופו' T אמ"ם

$$\forall U\in T\ \forall x\in U\ \exists B_x\in\mathcal{B} : x\in B_x\subseteq U$$

הוכחה:

תרגיל 110.

הערה:

תהי X קב' לא ריקה. אזי אוסף היחידונים של קב' זו מהווה בסיס לטופו' הדיסקרטית מעל X.

טיפ:

בהינתן בסיס לטופ' $\mathcal{B}$, כדאי לבדוק אם אוסף
כל היחידונים מוכל ב-$\mathcal{B}$.

טיפ:

בהינתן בסיס לטופ' B, כדאי לבדוק אם אוסף

כל היחידונים מוכל ב-B.

בכך נקבל ש-B הינו בסיס לטופ' דיסקרטית

טיפ:

בהינתן בסיס לטופ' $\mathcal{B}$, כדאי לבדוק האם אוסף
כל היחידונים מוכל ב-$\mathcal{B}$.
בכך נקבל ש-$\mathcal{B}$ הינו בסיס לטופ' דיסקרטית

תרגיל [illegible]:

איזו טופ' נוצרת ע"י את הבסיס הבא:

$$\mathcal{B}=\{[a,b] : a<b\in\mathbb{R}\}$$

מעל $\mathbb{R}$?

טענה:

יהיו $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ מרחבים טופ' ונגדיר:

$$\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n} X_i} := \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \;:\; \forall i\in\{1,\dots,n\}\;\; U_i\in T_i \right\}$$

טענה:

יהיו $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ מרחבים טופ' ונגדיר:

$$\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n}X_i} := \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \ :\ \forall i\in\{1,\dots,n\}\ \ U_i\in T_i \right\}$$

אז: $\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n}X_i}$ מהווה בסיס לטופ' על $\prod_{i=1}^{n}X_i$.

טענה:

יהיו $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ מרחבים טופ' ונגדיר:

$$\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n} X_i} := \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \ : \ \forall i\in\{1,\dots,n\} \ \ U_i \in T_i \right\}$$

אזי, $\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n} X_i}$ מהווה בסיס לטופ' על $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

לטופ' זו קוראים "טופולוגיית המכפלה".

טענה:

יהיו $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ מרחבים טופ' ונגדיר:

$$\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n} X_i} := \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \ : \ \forall i\in\{1,\dots,n\}\ U_i\in T_i \right\}$$

אזי, $\mathcal{B}_{\prod_{i=1}^{n} X_i}$ מהווה בסיס לטופ' על $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

לטופ' זו קוראים "טופולוגיית המכפלה".

הוכחה:

תרגיל בדרך.

תרגיל בית:

יהיו $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ מרחבים מטריים.

תרגיל בית:

יהיו $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ מרחבים מטריים.

הוכיחו שהקב׳

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \ : \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \ U_i \in T_{d_i} \right\}$$

מהווה בסיס לטופ׳ של $\prod_{i=1}^{n} X_i$ המושרית

מתוך מטריקת המכפלה.

תרגיל 3ח:

יהיו $(X_1,d_1),\ldots,(X_n,d_n)$ מרחבים מטריים.

הוכיחו שהקב':

$$\mathcal{B}:=\left\{\prod_{i=1}^{n} U_i \ :\ \forall i\in\{1,\ldots,n\}\ \ U_i\in T_{d_i}\right\}$$

מהווה בסיס לטופ' של $\prod_{i=1}^{n} X_i$ המושרית מתוך מטריקת המכפלה.

מסקנה:

טופולוגיית מכפלה הינה מעין הכללה של מטריקת המכפלה.

תרגיל 3חח:

יהיו $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ מרחבים מטריים.

הוכיחו שהקב'

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i=1}^{n} U_i \;:\; \forall i\in\{1,\dots,n\}\ \ U_i \in T_{d_i} \right\}$$

מהווה בסיס לטופ' של $\prod_{i=1}^{n} X_i$ המושרית

מתוך מטריקת המכפלה.

מסקנה:

טופולוגיית מכפלה הינה מעין הכללה של מטריקת המכפלה.

אנו נראה בהמשך כמה טופ' בו מתקיימים דברים

דומים לדברים שהתקיימו תחת מטריקת המכפלה.

הגדרה: (התכנסות סדרה במרחב טופ')

יהי X מרחב טופ' ותהי סדרה $\bar{a} \in X^{\omega}$.

הגדרה: (התכנסות סדרה במרחב טופ')

יהי X מרחב טופ' ותהי סדרה $\bar{a}\in X^{\omega}$.

נאמר ש-$\bar{a}$ מתכנסת ל- $L\in X$ אם לכל סביבה V

של L,

$\exists n_V\in\mathbb{N}: \forall n>n_V \quad a_n\in V$.

תרגיל 114:

נסמן ב־$\mathbb{R}_{trv}$ את אוסף הממשיים עם הטופ' הטריוויאלית

$\{\phi, \mathbb{R}\}$

תרגיל 114:

נסמן ב-$\mathbb{R}_{triv}$ את אוסף הממשיים עם הטופ' הטריוויאלית

$\{\phi, \mathbb{R}\}$

א) הראו שהסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו.

תרגיל 114:

נסמן ב-$\mathbb{R}_{triv}$ את אוסף הממשיים עם הטופ' הטריוויאלית

$\{\phi, \mathbb{R}\}$

א) הראו שהסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו.

ב) הראו שהסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-7 בטופ' זו.

מסקנה:

הינו שבמרחבים מטריים, אם סדרה מתכנסת לגבול,

אז גבול זה הינו יחיד.

מסקנה:

הינו שבמרחבים מטריים, אם סדרה מתכנסת לגבול,

אזי גבול זה הינו יחיד.

אולם מתוך התרגיל האחרון ניתן להסיק שתכונה זו

כבר אינה נכונה בכל מרחב טופ'.

מסקנה:

הגענו שבמרחבים מטריים, אם סדרה מתכנסת לגבול,
אז גבול זה הינו יחיד.
אולם מתוך התרגיל האחרון ניתן להסיק שתכונה זו
כבר אינה נכונה בכל מרחב טופ'.
לכן לא נוכל לתת כאן סימון מיוחד לגבול,
שכן, סימון זה לא יהיה מוגדר היטב.

טענה:

יהיו $(X_1,\mathcal{T}_1),\dots,(X_n,\mathcal{T}_n)$ מרחבים טופ', תהי סדרה $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ ב- $\prod_{i=1}^{n} X_i$ ויהי $\bar{L}\in\prod_{i=1}^{n} X_i$.

טענה:

יהיו $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ מרחבים טופ', תהי סדרה

$(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ ב- $\prod_{i=1}^{n} X_i$ ויהי $\bar{L}\in\prod_{i=1}^{n} X_i$.

אזי, תחת טופ' המכפלה סדרה זו מתכנסת ל-$\bar{L}$ אמ"מ

לכל $i\in\{1,\dots,n\}$ הסדרה $(a_{in})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_i.

טענה:

יהיו $(X_1,T_1),\dots,(X_n,T_n)$ מרחבים טופ', ותהי סדרה

$(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ ב- $\prod_{i=1}^{n} X_i$ ויהי $\bar{L}\in\prod_{i=1}^{n} X_i$.

אזי, תחת טופ' המכפלה סדרה זו מתכנסת ל-$\bar{L}$ אמ"מ

לכל $i\in\{1,\dots,n\}$ הסדרה $(a_{in})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_i.

כלומר, תחת טופ' המכפלה, התכנסות סדרה שקולה

להתכנסות הקואורדינטות של איבריה.

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח כי $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}$)

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח ש- $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}$)

(1.1) יהי $i \in \{1,\dots,n\}$ ותהי סביבה V_i של L_i.

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח ש- $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}$)

(1.1) יהי $i \in \{1,\dots,n\}$ ותהי סביבה V_i של L_i.

אזי, $Z_i := \left(\prod_{j=1}^{i-1} X_j\right) \times V_i \times \left(\prod_{j=i+1}^{n} X_j\right)$ הינה סביבה של $\bar{L}$, ולכן

$\Leftarrow$ $\bar{a}_n \in Z_i \quad \exists n_{V_i} : \forall n > n_{V_i}$

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח ש- $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}$)

יהי $i \in \{1,\dots,n\}$ ותהי סביבה V_i של L_i.

אזי, $Z_i := \left(\prod_{j=1}^{i-1} X_j\right) \times V_i \times \left(\prod_{j=i+1}^{n} X_j\right)$ הינה סביבה של $\bar{L}$, ולכן

$$\Rightarrow \exists n_{V_i} : \forall n > n_{V_i} \quad \bar{a}_n \in Z_i$$

$$\Rightarrow \forall n > n_{V_i} \quad a_{i_n} \in V_i$$

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח ש- $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\bar{L}$)

יהי $i\in\{1,...,n\}$ ותהי סביבה V_i של L_i.

אזי, $Z_i := \left(\prod_{j=1}^{i-1} X_j\right)\times V_i\times\left(\prod_{j=i+1}^{n} X_j\right)$ הינה סביבה של $\bar{L}$, ולכן

$$\exists n_{V_i} : \forall n > n_{V_i} \quad \bar{a}_n \in Z_i \quad \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \quad \forall n > n_{V_i} \quad a_{i_n} \in V_i \quad \Leftarrow$$

לכן $(a_{i_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_i.

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $i\in\{1,\dots,n\}$ הסדרה $(a_{i_m})_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_i)

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $i\in\{1,\dots,n\}$ הסדרה $(a_m^i)_{m=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_i)

(2.1) תהי סביבה V של L

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $i\in\{1,\dots,n\}$ הסדרה $(a_{n,i})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_i)

(2.1) תהי סביבה V של $\bar{L}$.

אזי, לפי הגדרת טופ' המכפלה, לכל $i\in\{1,\dots,n\}$

קיימת סביבה V_i של L_i, כך ש-

$\bar{L}\in\prod_{i=1}^{n}V_i\subseteq V$

(2.2) מאחר ולכל i הסדרה $(a_{in})_{n=n_i}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_i,

נלצ'

$$\exists n_{V_i} : \forall n > n_{V_i} \quad a_{in} \in V_i$$

(2.2) מכיוון שלכל i הסדרה $(a_{i_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_i,

אזי

$$\exists n_{v_i} : \forall n > n_{v_i} \quad a_{i_n} \in V_i$$

(2.3) נסמן $n_v := \max\{n_{v_i}\}_{i=1}^{n}$ ובכך נקבל ש-

$$\Rightarrow \quad \forall n > n_v \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad a_{i_n} \in V_i$$

(2.2) מגוחר לכל i הסדרה $(a_{i_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L_i,

נלצ'

$$\exists n_{V_i} : \forall n > n_{V_i} \quad a_{i_n} \in V_i$$

(2.3) נסמן $n_V := \max\{n_{V_i}\}_{i=1}^{n}$ ובכך נקבל ש-

$$\forall n > n_V \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad a_{i_n} \in V_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > n_V \quad \vec{a}_n \in \prod_{i=1}^{n} V_i \subseteq V$$

(2.2) מאחר ולכל i הסדרה $(a_{in})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L_i,

ולצ'

$$\exists n_{v_i} : \forall n > n_{v_i} \quad a_{in} \in V_i$$

(2.3) נסמן $n_v := \max\{n_{v_i}\}_{i=1}^{n}$ ובכך נקבל ש-

$$\forall n > n_v \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad a_{in} \in V_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall n > n_v \quad \bar{a}_n \in \prod_{i=1}^{n} V_i \subseteq V$$

לכן $(\bar{a}_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$\bar{L}$. $\blacksquare$

הערה:

יהי (X,τ) מרחב טופ' ויהי $\mathcal{B}$ בסיס ל-τ.

הערה:

יהי $(X, \mathcal{T})$ מרחב טופ' ויהי $\mathcal{B}$ בסיס ל-$\mathcal{T}$

אזי, הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-$L \in X$ אמ"ם

לכל קב' בסיסית $B \in \mathcal{B}$ סביב L

$\exists n_B \in \mathbb{N} : \forall n > n_B \quad a_n \in B$

תרגיל 511:

א) האם הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגיית Sorgenfrey?

תרגיל 211:

א) האם הסדרה $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגיית Sorgenfrey?

ב) האם הסדרה $(-\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו גם כן?

תרגיל 217:

א) האם הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגית Sorgenfrey?

ב) האם הסדרה $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו גם כן?

ג) אפיינו סדרות ב-$\mathbb{R}$ המתכנסות בטופ' זו.

תרגיל 511:

א) האם הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגית Sorgenfrey?

ב) האם הסדרה $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו גם כן?

ג) אפיינו סדרות ב-$\mathbb{R}$ המתכנסות בטופ' זו.

ד) האם גבול של סדרה בטופ' זו הינו יחיד?

תרגיל זרר:

א) האם הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגית Sorgenfrey?

ב) האם הסדרה $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו גם כן?

ג) אפיינו סדרות ב-$\mathbb{R}$ המתכנסות בטופ' זו.

ד) האם בטופ' זו גבול של סדרה הינו יחיד?

תרגיל טרר:

יהי X מרחב טופ'.

תרגיל 217:

א) האם הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגית Sorgenfrey?

ב) האם הסדרה $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו גם כן?

ג) אפיינו סדרות ב-$\mathbb{R}$ המתכנסות בטופ' זו.

ד) האם בטופ' זו גבול של סדרה הינו יחיד?

תרגיל 218:

יהי X מרחב טופ'.

הראו שכל סדרה מתייצבת ב-X מתכנסת.

תרגיל זוד:

א) האם הסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 תחת טופולוגית Sorgenfrey?

ב) האם הסדרה $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0 בטופ' זו גם כן?

ג) אפיינו סדרות ב-$\mathbb{R}$ המתכנסות בטופ' זו.

ד) האם בטופ' זו גבול של סדרה הינו יחיד?

תרגיל טוד:

יהי X מרחב טופ'.

הראו שכל סדרה מתייצבת ב-X מתכנסת.

(שימו לב שגם סדרה קבועה הינה סדרה מתייצבת)

טענה:

יהי X מרחב קו-סופי ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X.

טענה:

יהי X מרחב קו-סופי ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X.

אזי סדרה זו מתכנסת ל- $L\in X$ אמ"מ

לכל $x\neq L\in X$, L מופיע בסדרה זו מספר סופי

של פעמים לכל היותר.

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L)

הוכחה:

1 $\Rightarrow$: (נניח ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L)

(1.1) יהי $x\neq L\in X$.

הוכחה:

① ⇐: (נניח ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L)

(ר.ד) יהי $x \neq L \in X$.

אזי, מכיוון ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, אז

לכל סביבה V של L

$\exists n_V : \forall n > n_V \quad a_n \in V$

הוכחה:

(1) $\Leftarrow$: (נניח ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L)

(1.א) יהי $x \neq L \in X$.

אזי, מכיוון ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, אז

לכל סביבה V של L

$\exists n_V : \forall n > n_V \quad a_n \in V$

(1.ב) מאחר ו-V הינה סביבה של L ו-X הינו מרחב קו-סופי,

נקבל ש- $|X \setminus V| < \infty$.

הוכחה:

(1) ⇐: (נניח ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L)

(1.1) יהי $x \neq L \in X$.

אזי, מכיוון ש- $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, אז

לכל סביבה V של L

$\exists n_V : \forall n > n_V \quad a_n \in V$

(1.2) מאחר ו-V הינה סביבה של L ו-X הינו מרחב קו-סופי,

נקבל ש- $|X \setminus V| < \infty$.

לכן גם $|X \setminus (V \setminus \{x\})| = |(X \setminus V) \cup \{x\}| < \infty$ ולכן

גם $V \setminus \{x\}$ מהווה סביבה ל- L.

(ג.1) מאחר ו-V הינה סביבה של L ו-X הינו מרחב קו-סופי,

נקבל ש- $|X\setminus V|<\infty$.

לכן גם $|X\setminus(V\setminus\{x\})|=|(X\setminus V)\cup\{x\}|<\infty$ ולכן

גם $V\setminus\{x\}$ מהווה סביבה ל-L.

(1.2) מאחר ו-V הינה סביבה של L ו-X הינו מרחב קו-סופי,

נקבל ש- $|X \setminus V| < \infty$.

לכן גם $|X \setminus (V \setminus \{x\})| = |(X \setminus V) \cup \{x\}| < \infty$ ולכן

גם $V \setminus \{x\}$ מהווה סביבה ל-L.

(1.3) נסמן $W := V \setminus \{x\}$ ואז נקבל ש-

$$\exists n_W : \forall n > n_W \quad a_n \in V \setminus \{x\}$$

(1.2) מאחר ו-V הינה סביבה של L ו-X הינו מרחב קו-סופי,

נקבל ש- $|X\setminus V|<\infty$.

לכן גם $|X\setminus(V\setminus\{x\})|=|(X\setminus V)\cup\{x\}|<\infty$ ולכן

גם $V\setminus\{x\}$ מהווה סביבה ל-L.

(1.3) נסמן $W:=V\setminus\{x\}$ ואז נקבל ש-

$$\exists n_w : \forall n>n_w \quad a_n\in V\setminus\{x\}$$

לכן אם x מהווה איפשהו איבר a_{n_0} בסדרה,

נקבל ש- $n_0\le n_w$.

(1.2) מאחר ו-V הינה סביבה של L ו-X הינו מרחב קו-סופי,

נקבל ש- $|V\setminus X|<\infty$.

לכן גם $|(V\setminus\{x\})\setminus X|=|(V\setminus X)\setminus\{x\}|<\infty$ ולכן

גם $V\setminus\{x\}$ מהווה סביבה ל-L.

(1.3) נסמן $W:=V\setminus\{x\}$ ואז נקבל ש-

$$\exists n_W : \forall n>n_W \quad a_n\in V\setminus\{x\}$$

לכן אם x מהווה איבר a_{n_0} בסדרה,

נקבל ש- $n_0\le n_W$.

לכן x מופיע בסדרה רק מספר סופי של פעמים

לכל היותר.

2 $\Leftarrow$: (נניח שלכל $x \neq L$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים
לכל היותר)

(ב) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $L \neq x$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים
לכל היותר)

(ב.1) תהי V סביבה של L.

(ב) ⇐: (נניח שלכל $L\neq x$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים

לכל היותר)

(ב.1) תהי V סביבה של L.

אזי, $|X\setminus V|<\infty$.

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $x \neq L$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים לכל היותר)

(2.1) תהי V סביבה של L.

אזי, $|X \setminus V| < \infty$.

(2.2) נסמן $X \setminus V := \{x_1, \dots, x_k\}$ ואז נקבל ש-

$\forall j \in \{1, \dots, k\} \; \exists n_j : \forall n > n_j \; a_n \neq x_j$

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $L\neq x$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים
לכל היותר)

(2.1) תהי V סביבה של L.

אזי, $|X\setminus V|<\infty$.

(2.2) נסמן $X\setminus V := \{x_1,\dots,x_k\}$ ואז נקבל ש-

$$\forall j\in\{1,\dots,k\}\ \exists n_j : \forall n>n_j \quad a_n\neq x_j$$

(2.3) נסמן $n_V := \max\{n_j\}_{j=1}^{k}$ ואז נקבל ש-

$$\forall n>n_V \quad \forall j\in\{1,\dots,k\} \quad a_n\neq x_j \Rightarrow$$

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $x \neq L$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים לכל היותר)

(2.1) תהי V סביבה של L.

אזי, $|X \setminus V| < \infty$.

(2.2) נסמן $X \setminus V := \{x_1, \ldots, x_k\}$ ואז נקבל ש-

$\forall j \in \{1, \ldots, k\} \; \exists n_j : \forall n > n_j \;\; a_n \neq x_j$

(2.3) נסמן $n_V := \max\{n_j\}_{j=1}^{k}$ ואז נקבל ש-

$\forall n > n_V \;\; \forall j \in \{1, \ldots, k\} \;\; a_n \neq x_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n > n_V \;\; a_n \in V \Leftarrow$

(2) $\Leftarrow$: (נניח שלכל $L\neq x$, x מופיע בסדרה מספר סופי של פעמים לכל היותר)

(2.1) תהי V סביבה של L.

אזי, $|X\setminus V|<\infty$.

(2.2) נסמן $X\setminus V:=\{x_1,\dots,x_k\}$ ואז נקבל ש-

$\forall j\in\{1,\dots,k\}\ \exists n_j:\ \forall n>n_j\ \ a_n\neq x_j$

(2.3) נסמן $n_V:=\max\{n_j\}_{j=1}^{k}$ ואז נקבל ש-

$\forall n>n_V\ \ \forall j\in\{1,\dots,k\}\ \ a_n\neq x_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n>n_V\ \ a_n\in V$

לכן סדרה זו מתכנסת ל-L. $\blacksquare$

מסקנה:

יהי X מרחב קו-סופי ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X.

מסקנה:

יהי X מרחב קו-סופי ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X.

א) אם כל $x \in X$ מופיע מס' סופי של פעמים לכל היותר בסדרה, אז סדרה זו מתכנסת לכל איבר ב-X.

מסקנה:

יהי X מרחב קו-סופי ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X.

א) אם כל $x \in X$ מופיע מס' סופי של פעמים לכל היותר בסדרה, אז סדרה זו מתכנסת לכל איבר ב-X.

ב) אם קיים $L \in X$ שמופיע אינסוף פעמים בסדרה, אך כל שאר האיברים מופיעים בסדרה מספר סופי של פעמים לכל היותר. אז L הינו הגבול היחיד של הסדרה.

מסקנה:

יהי X מרחב קו-סופי ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב-X.

א) אם כל $x\in X$ מופיע מס' סופי של פעמים לכל היותר בסדרה, אז סדרה זו מתכנסת לכל איבר ב-X.

ב) אם קיים $L\in X$ שמופיע אינסוף פעמים בסדרה, אך כל שאר האיברים מופיעים בסדרה מספר סופי של פעמים לכל היותר, אז L הינו הגבול היחיד של הסדרה.

ג) אם קיימים $L_1\neq L_2\in X$ שמופיעים בסדרה אינסוף פעמים, אז הסדרה אינה מתכנסת לאף איבר.

הוכחה:

תרגיל 117.