ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

АСАФОВ Л.

ЧТО ТАКОЕ ИНТЕГРАЛ ЭЙЛЕРА

Интегралом Эйлера первого рода называют интеграл вида:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

где *a*, *b* > 0. Он определяет функцию двух параметров *a* и *b*: B ("Бета") функцию.

Интегралом Эйлера второго рода называют интеграл вида:

$$\Gamma(a)=\int_{0}^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

который сходится при любом *a* > 0.

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОСТИ ГАММА-ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

- Функция Г(*a*) при всех значениях *a* > 0 непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков. Достаточно доказать лишь существование производных. Продифференцируем интеграл и получим:

$$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \ln x \cdot e^{-x} dx$$

Так как оба интеграла

$$\int_0^1 x^{a-1}\ln x \cdot e^{-x}dx$$

и

$$\int_1^\infty x^{a-1}\ln x \cdot e^{-x}dx$$

сходятся равномерно относительно *a*

тем самым оправдано правило Лейбница

ФОРМУЛА РААБЕ

$$R(a) = \int_{a}^{a+1} \ln \Gamma(a)\,da = a(\ln a - 1) + \ln\sqrt{2\pi}$$

ФОРМУЛА ЛЕЖАНДРА

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a)$$

ПРИМЕРЫ

Определить площадь *P* фигуры, ограниченной одним витком кривой $r^m = a^m \cos m\Theta$, и длину *S* этого витка.

$$P = 2\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{2}{m}} m\Theta\Theta d = \frac{a^2}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m}} \quad d = \frac{a^2}{m}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)} = \frac{\pi a^2}{m\sqrt[m]{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right)}$$

По формуле длины дуги в полярных координатах

$$s = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{1}{m}-1} \quad m\Theta\Theta d = \frac{2a}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{m}-1} \quad d = \frac{2}{m}2^{\frac{1}{m}-1}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

Вычислить интеграл $\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\ \phi}{1+k\sin\phi}\right)^{a-1}\frac{d\pi}{1+k\cos\phi}\quad\left(a>0,0<k<1\right)$

Воспользуемся подстановкой $tg\frac{\Theta}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}tg\frac{\phi}{2}$

и получим $\frac{2^{a-1}}{\left(1-k^2\right)^{\frac{a}{2}}}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2}{\Gamma\left(a\right)}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Начальный курс. Под. ред. А. Н. Тихонова. [Текст] – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 662 с.
- Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Продолжение курса. Под. ред. А. Н. Тихонова. [Текст] – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
- Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 1. 9-е изд., стер. [Текст] – СПб.: Издательство "Лань", 2008. – 912 с.
- Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Часть 2. 9-е изд., стер. [Текст] – СПб.: Издательство "Лань", 2008. – 464 с.
- Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике в 5 томах. Том III. Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы. [Текст] – М.: Едиториал УРСС, 2001 – 224 с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. I / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. [Текст] – М.ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 680 с.
- Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II / Пред. и прим. А.А. Флоринского. – 8-е изд. [Текст] – М.ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 864 с.
- Кузнецов Д.С. Специальные функции. [Текст] – М.: Высшая школа, 1962 – 249 с.
- Литвинов В. В. Различные методы вычисления несобственных интегралов, зависящих от параметра / В. В. Литвинов; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова [Текст] – Ярославль: ЯрГУ, 2014. – 30 с.
- Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего [Текст] – М.: Высш. шк. 2004. – 640 с.

Спасибо за внимание