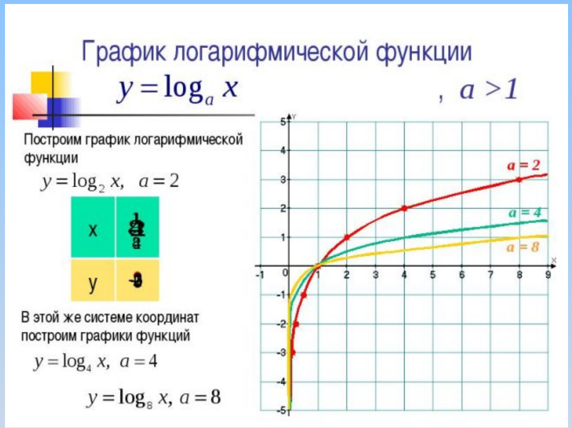
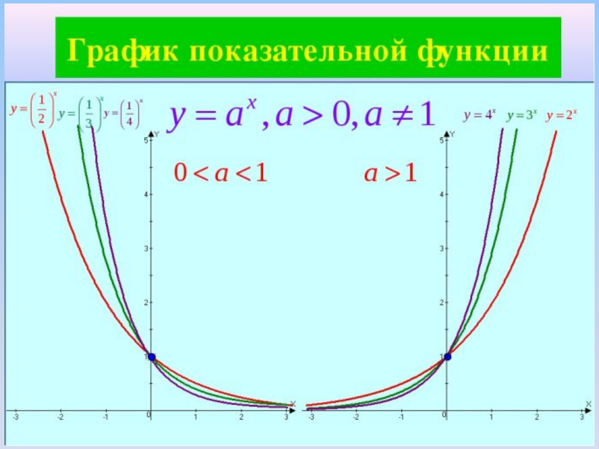
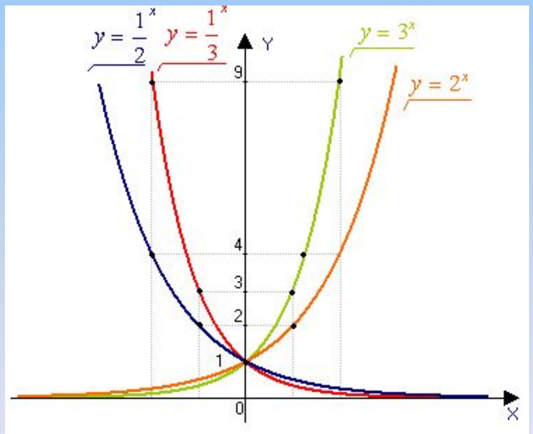
ЗАДАНИЕ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ.

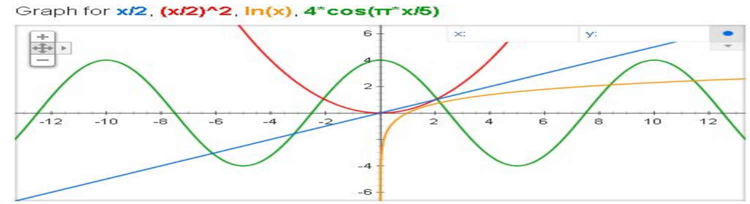






Подготовка к ЕГЭ.

Метод сечений



В зависимости от того, какая роль отводится параметру при решении задач с параметрами с использованием этого метода можно выделить два основных графических приема.

- Построение графического образа на координатной плоскости *Oxy*. В этом случае, если возможно, уравнение или неравенство приводим к виду: $y=f(x)$ и $y=g(x,a)$.
- Построение графического образа на координатной плоскости Oxa. В этом случае уравнение или неравенство приводится к виду: $y=f(x)$ и $y=a$.

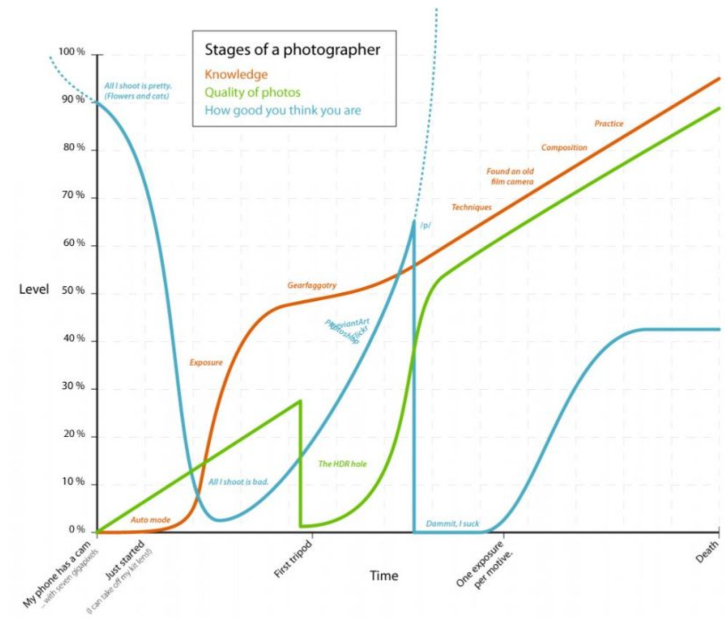
- Применение графических методов удобно использовать, если в задаче ставится вопрос о количестве решений в зависимости от значений параметра или же нахождения значения параметра, при которых решение единственное или задача не имеет решений.

Преимущество графических методов

- Построив графический образ, можно определить, как влияет на решение изменение параметра
- Иногда график дает возможность сформулировать необходимые и достаточные аналитические условия для решения данной задачи
- Ряд теорем позволяют на основании графической информации делать впол строгие и обоснованные заключения о количестве решений, об их границах и

Минусы графических методов:

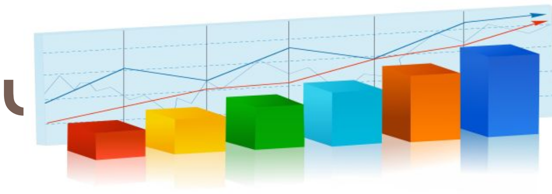
- При использовании графических методов возникает вопрос о строгости решения. Эти требования должны определятся здравым смыслом
- Если результат получен графическим методом и вызывает какие – либо сомнения, его необходимо подкрепить аналитически



Суть метода сечений для решения задач с параметром

- При исследовании уравнения на наличие корней или их количества от значения параметра исходное уравнение приводится к виду $f(x)=g(x, a)$. Далее в системе координат Oxy строятся графики левой и правой части этого уравнения и определяется количество их пересечений в зависимости от значений параметра a
- Или исходное уравнение приводится к виду $a=f(x)$. Далее в системе координат Oxa строится график правой части и определяется количество точек его пересечения семейством графиков функций $a=const$

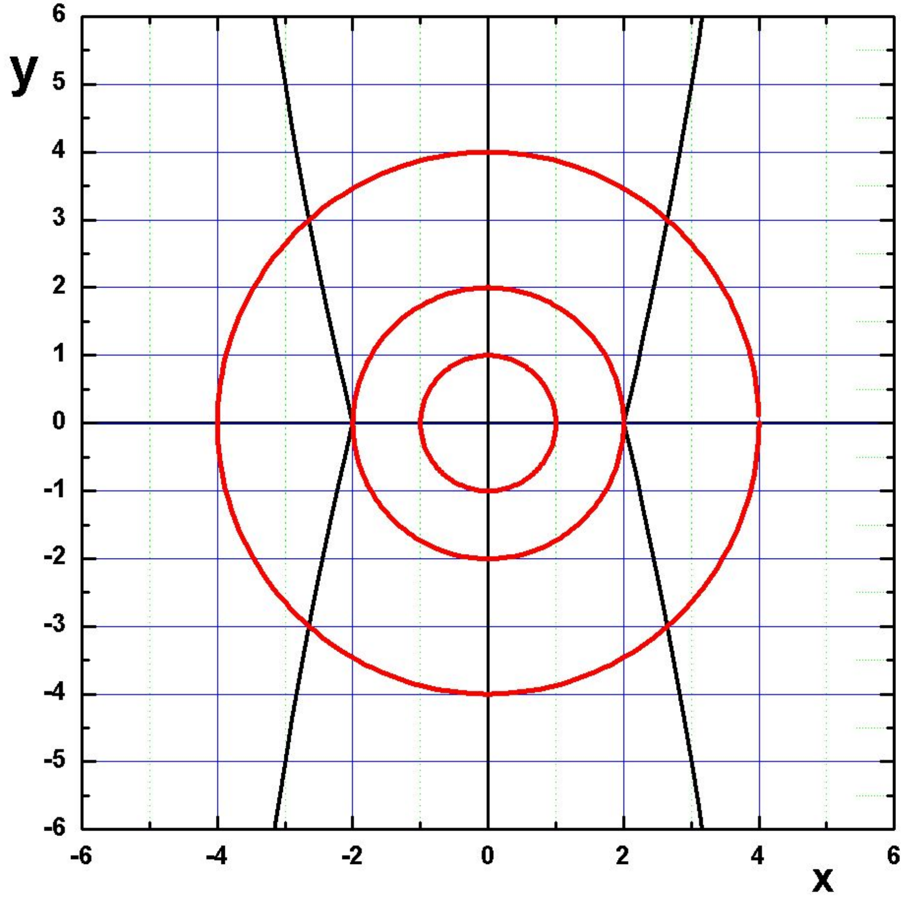
Классификация задач



- Задачи в условии которых спрашивается о количестве решений уравнений или системы уравнений в зависимости от значения параметра
- Задачи в которых необходимо найти значение параметра, при которых задача имеет заданное количество решений (одно, k, бесконечно много)
- Задачи в которых необходимо получить решение для всех значений параметра или для значений параметра из данного промежутка
- Задачи в которых необходимо найти значение параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям

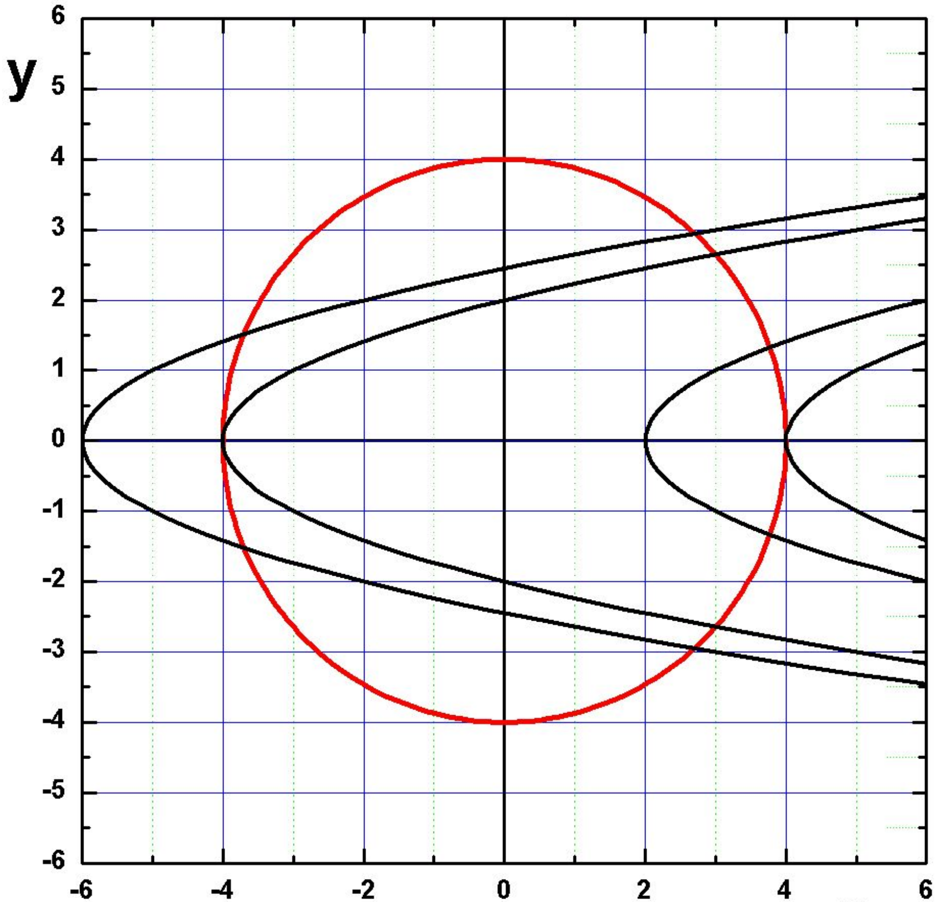
Задача 1: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} |y| = x^2 - 4 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$



Задача 2: Решить систему уравнений

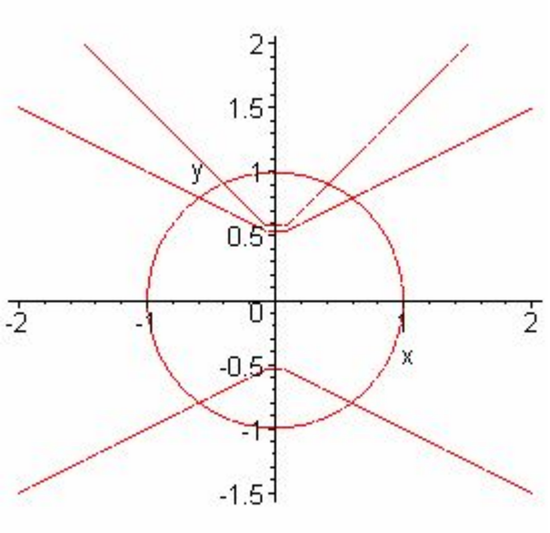
$$\begin{cases} x - 2b = y^2 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$



Задача 3. Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$ имеет решения.

Решение.

График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. График функции, заданной вторым уравнением должен пересекать эту окружность при любом *q,* т.е. при любом угле наклона прямых этой ломаной.



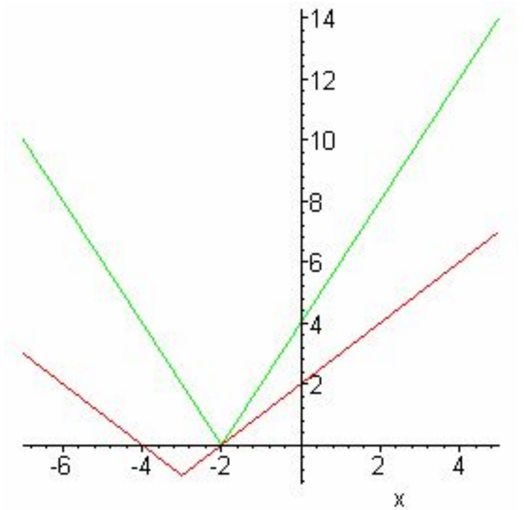
Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси *y* не более чем на единицу вниз или вверх .

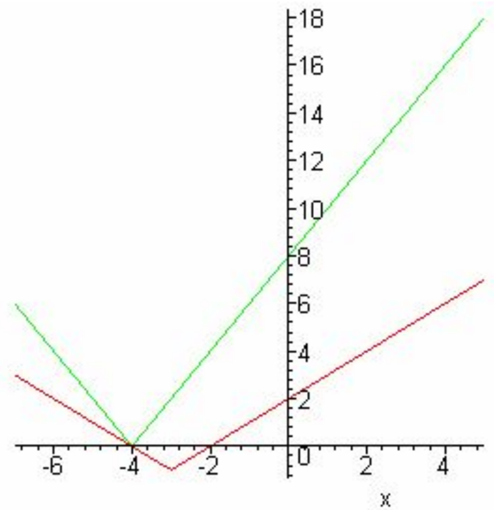
Ответ: $-1 \le p \le 1.$

Задача 4. Найдите все значения а, такие, что уравнение

$|x+3| - 1=|2x - a|$ имеет единственное решение.

Решение. Решим с помощью графиков.





Для выполнения условия задачи вершина графика правой части уравнения должна находиться в точке x = -2 или x = -4.

Т.е. $$\left[\begin{array}{l} -4-a=0, \\ -8-a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8, \\ a=-4. \end{array}\right.$$

Ответ: - 8 и – 4.

Задача 5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

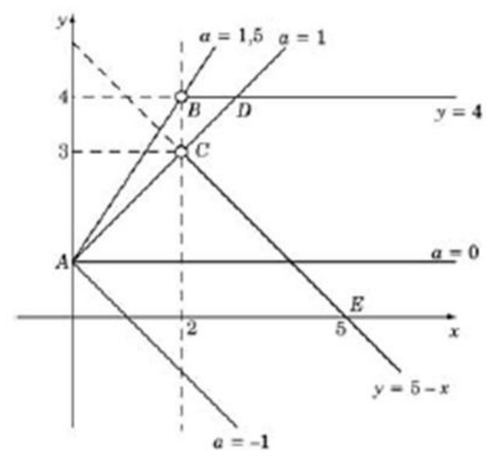
Решение. Преобразуем исходную систему

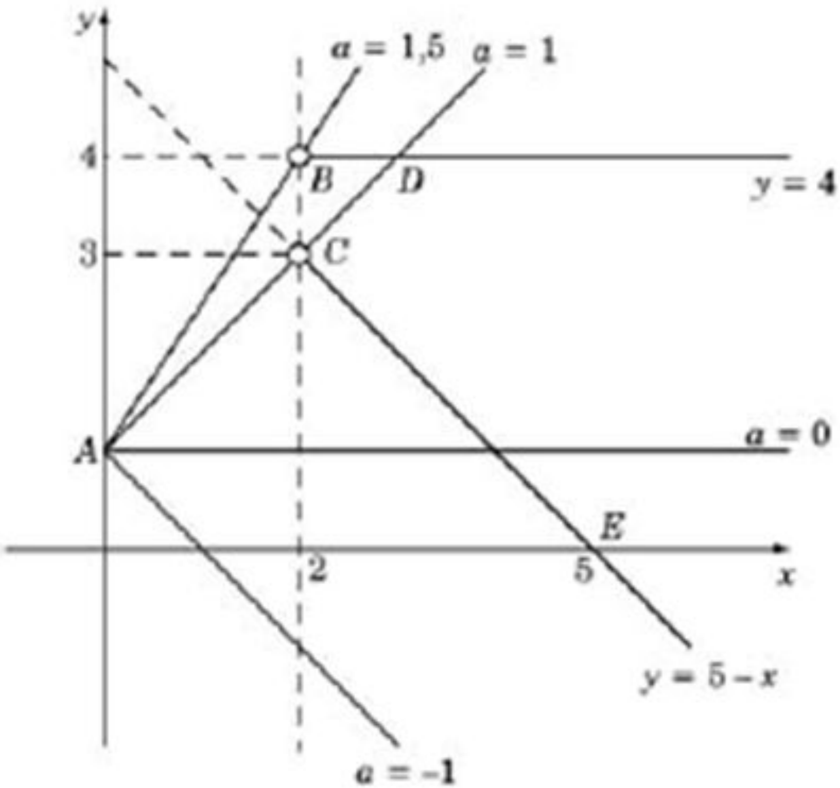
$$\begin{cases} (y-4)x + y^2 - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)x + (y-4)(y-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)(x+y-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

Уравнение *(y-4)(x+y-5)=0* задает пару пересекающихся прямых *y=4* и *y=5-x*.

Система $\begin{cases} x > 2, \\ (y-4)(x+y-5) = 0 \end{cases}$

задает части этих прямых, расположенные правее прямой *x=2,*т.е. лучи BD и CE (без точек *B* и *C*), см. рис.





Уравнение $y=ax+1$ задает прямую m с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $A(0;1)$. Следует найти все значения $\boldsymbol{a}$, при каждом из которых прямая m имеет единственную общую точку с объединением лучей BD и CE.

а) Прямая AB задается уравнением $y=1,5x+1$. Поэтому при $a \geq 1,5$ прямая m не пересечет ни луч BD, ни луч CE.

б) Прямая AC задается уравнением $y=x+1$ Поэтому при $1 \leq a < 1,5$ прямая m пересечет луч BD, но не пересечет луч CE.

в) При $0<a<1$ прямая m пересечет и луч BD, и луч CE.

г) При $-1 < a \leq 0$ прямая m пересечет только луч CE, а при $a \leq -1$ она не пересечет ни луч BD, и ни луч CE.

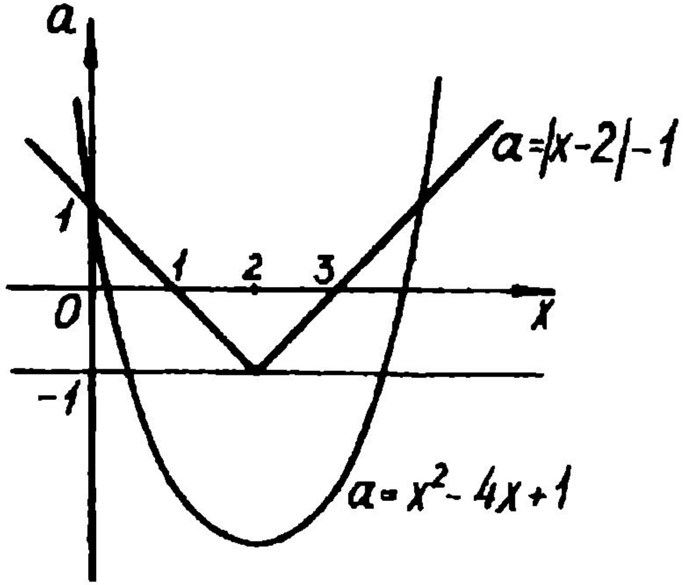
Ответ. $-1 < a \leq 0, \quad 1 \leq a < 1,5.$

Задача 6: При каких значениях параметра *a* уравнение

$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x-2|)=0$ имеет равно три корня?

Имеем $\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 1, \\ a = |x - 2| - 1. \end{array}\right.$

График этой совокупности – объединение «уголка» и параболы. Очевидно что Прямая *a=-1* пересекает полученное объединение в трех точках.



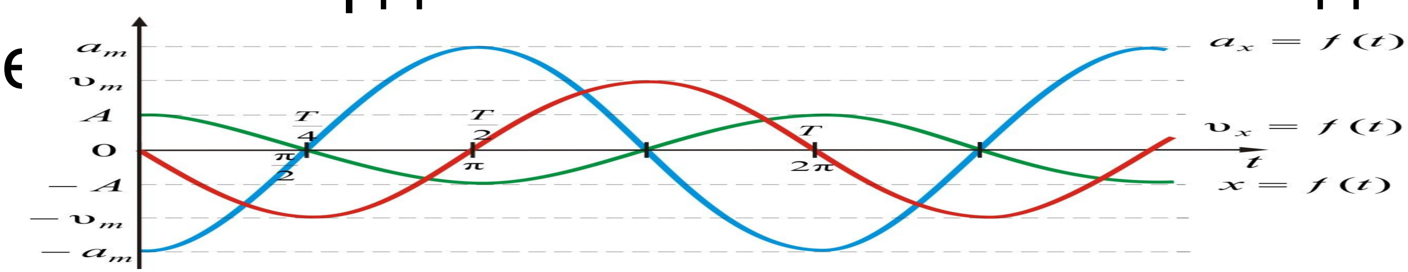
Ответ: *a=-1*

Решение неравенств

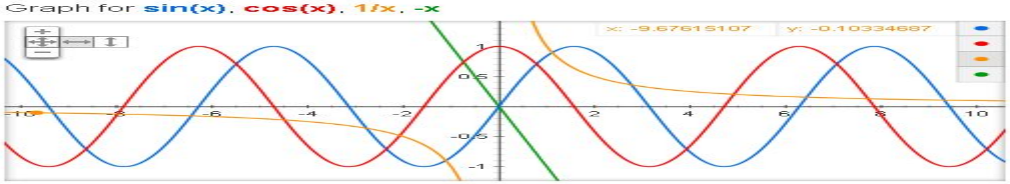
- Задачи, в которых требуется построить на плоскости в декартовой системе координат **множество** решений системы неравенств с двумя переменными. Метод построения решения следующий.
- Если дано неравенство $f(x,y)>0$ (или $f(x,y)<0$), то сначала надо построить график функции $f(x,y)=0$.

Сразу следует оговориться, что выражение «график функции» не совсем точное, если иметь в виду однозначные функции. Вернее было бы говорить о множестве точек, удовлетворяющих равенству.

- Этот график определяет границу области решения неравенства. При этом, если неравенство строгое, то границу изображают пунктирной линией Если неравенство нестрогое - сплошной линией, показывая, что точки графика являются решениями неравенства.
- Чтобы определить, по какую сторону границы располагается область решения неравенства, достаточно выбрать произвольную точку плоскости, не принадлежащую границе, и подставить координаты этой точки в исходное нераве



- Если получено верное числовое неравенство, то все точки по ту же сторону границы, что и выбранная точка, принадлежат области решения. Если же подстановка координат выбранной точки не дает верного числового неравенства, то областью решения будут точки, расположенные по другую сторону границы.
- На чертеже множество решений неравенства изображают штриховкой. При решении системы неравенств решают каждое из неравенств, а затем выбирают точки, для которых одновременно выполняются все неравенства системы (пересечени



Алгоритм решения задач с параметром графическим методом

1. Преобразовываем исходное условие задачи к системе неравенств, в которых неизвестное выражается через параметр, или, наоборот, параметр выражается через неизвестное.
2. Вводим систему координат $(a;x)$, если мы неизвестное выражали через параметр, или $(x;a)$, если, наоборот, параметр выражали через неизвестное.
3. Изображаем в выбранной координатной плоскости фигуру, которая задается множеством решений системы неравенств.
4. «Сканируем» эту фигуру, двигаясь вдоль оси параметра и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия.
5. Записываем ответ.

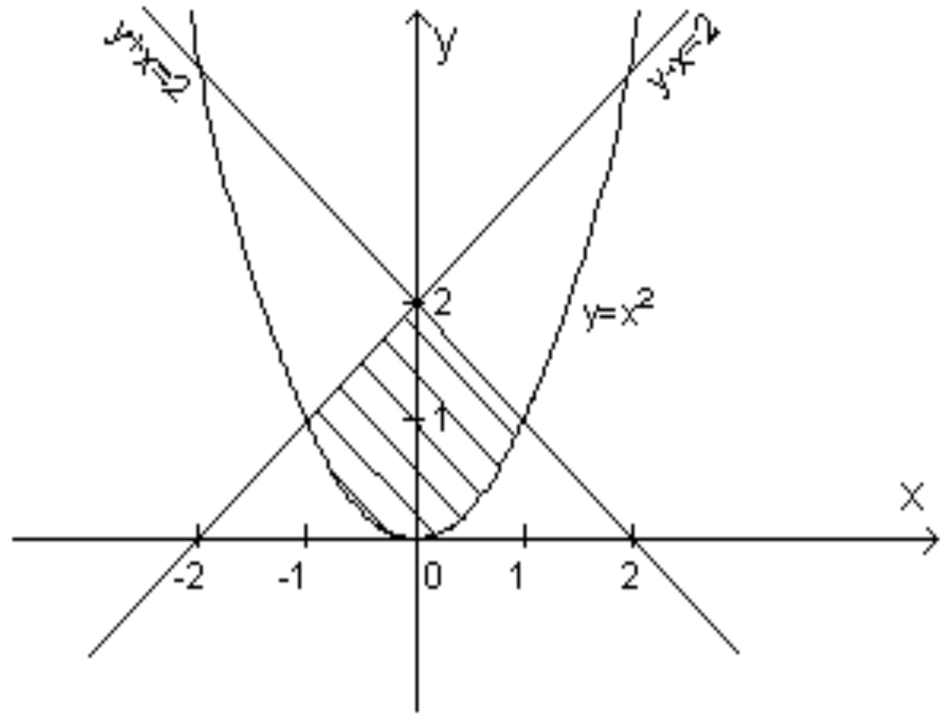
- **Пример 1.** *Построить на плоскости ХОУ множество точек, удовлетворяющих системе неравенств:*

$$\begin{cases} y \geq x^2 \\ x + y \leq 2 \\ y - x \leq 2 \end{cases}$$

Решение. Границей области решения первого неравенства является парабола $y = x^2$,

а областью решения – точки, расположенные «выше» параболы. Границами областей решения двух других неравенств являются прямые $x + y = 2$ и $x - y = 2$,

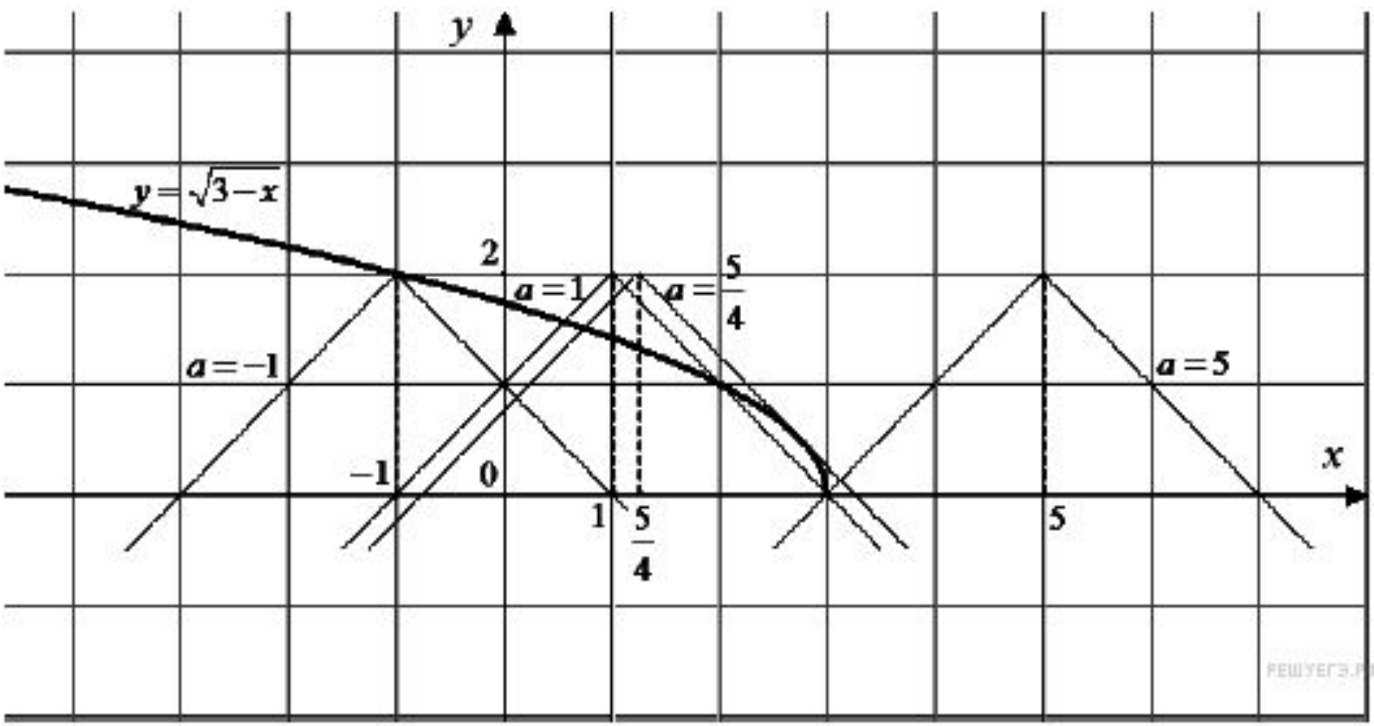
а областями решений – точки, расположенные «ниже» прямых. Область решения системы неравенств изображена на рисунке 1.



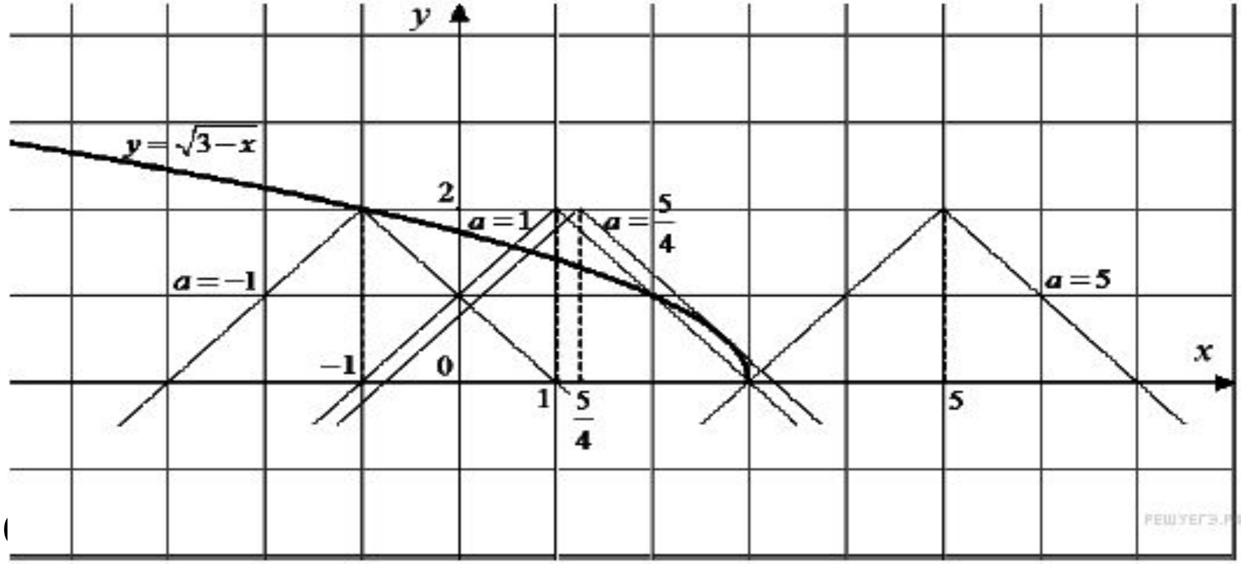
- **Пример 2.** Найти все значения a при каждом из которых множеством решения неравенства $\sqrt{3-x}+|x-a|\leq 2$
- является отрезок.

- **Пример 2.** Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{3-x} \leq 2-|x-a|.$$



Из рисунка видно,
 что график правой
 части неравенства
лежит выше левой
при $a \in (-1, 5)$.
Заметим, что при
а=1 решением кром



 отрезка становится еще и точка x=3 что противоречит усло
вию.

При дальнейшем уменьшении *а* в решение будет попадать еще один отрезок с правым концом в точке x=3. Левый конец будет сдвигаться вплоть до случая касания при котором ре
шение снова превратится в один отрезок.   Рассмотрим случай касания:

$$f'(\sqrt{3-x}) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} = -1 \Leftrightarrow 3-x = 0,25 \Leftrightarrow x = 2,75,$$

$$\sqrt{3-2,75} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0,5 = 2-(2,75-a) \Leftrightarrow a = 1,25.$$

Тогда

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2+(y-5)^2=9, \\ (x+3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное значение a=16, -3+корень из61

2. При каких a уравнение $\cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно 8 корней?
Ответ: $a\in(-8\pi;-6\pi)\cup(6\pi;8\pi).$
3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
$3x+|2x+|a-x||=7|x+2|$ имеет хотя бы один корень.
Ответ: $a\in(-\infty;-12]\cup[8;\infty).$

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение 4х -
$|3x-|x+a||=9|x-3|$ имеет два корня.

Для успешного решения задач типа 18 необходимо:

- Уметь решать уравнения и неравенства
- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

График функции $y = |x-a| + |x-b|, b > a$ «корыто»

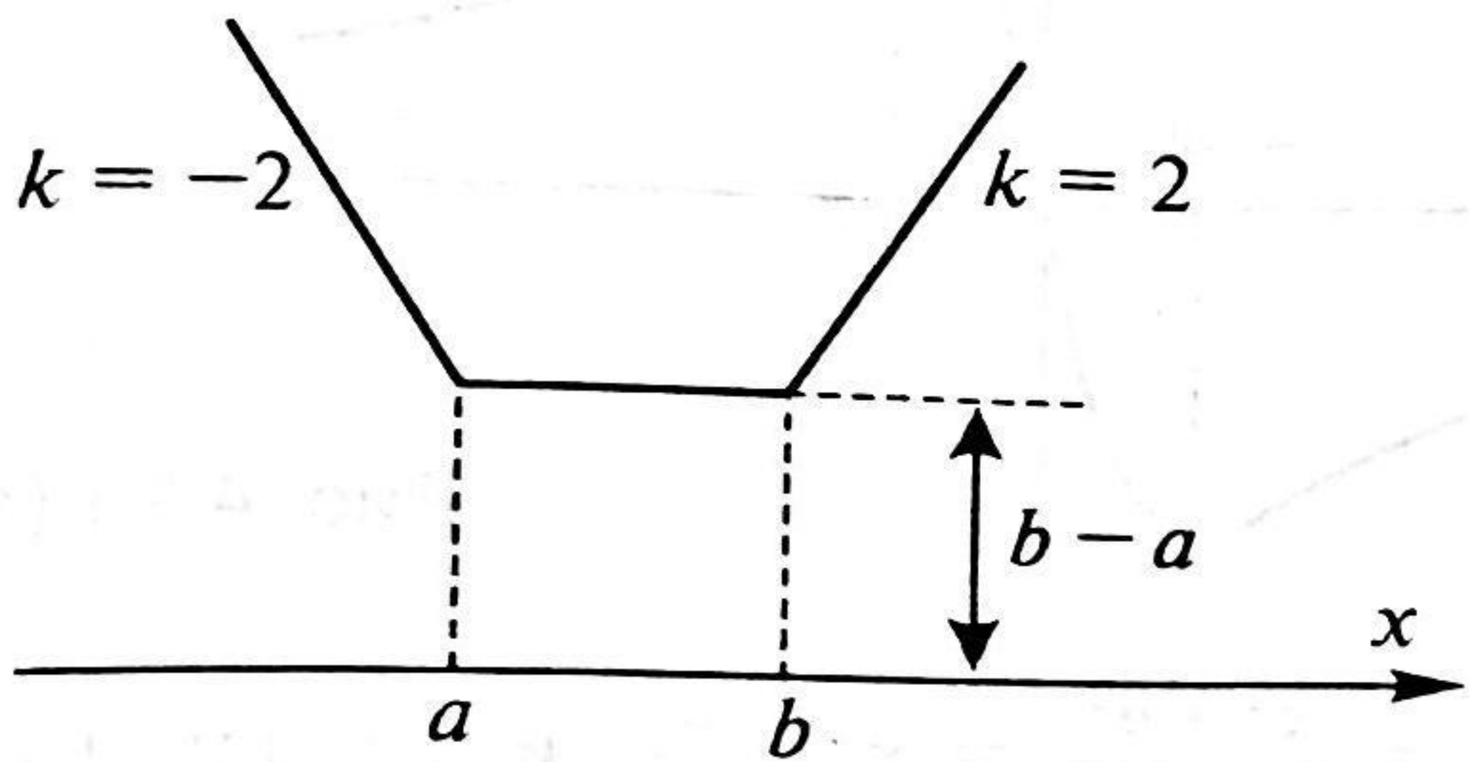


График функции
$y = |x - a| + |x - b|, b > a$
«корыто»

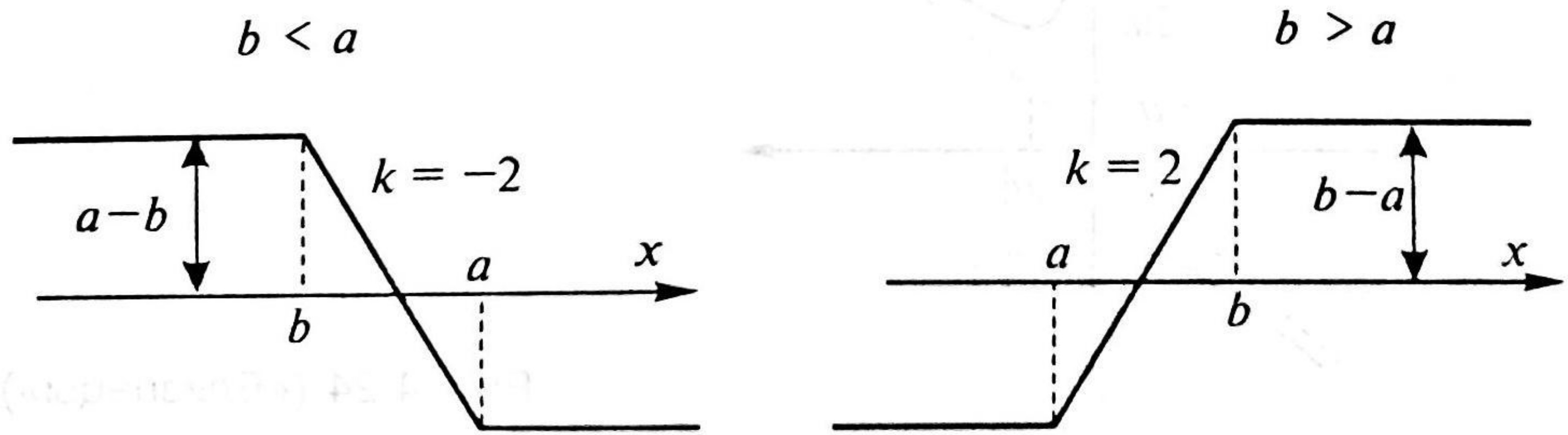


График функции $y = |x - a| + |x - b|, b > a$ «корыто»

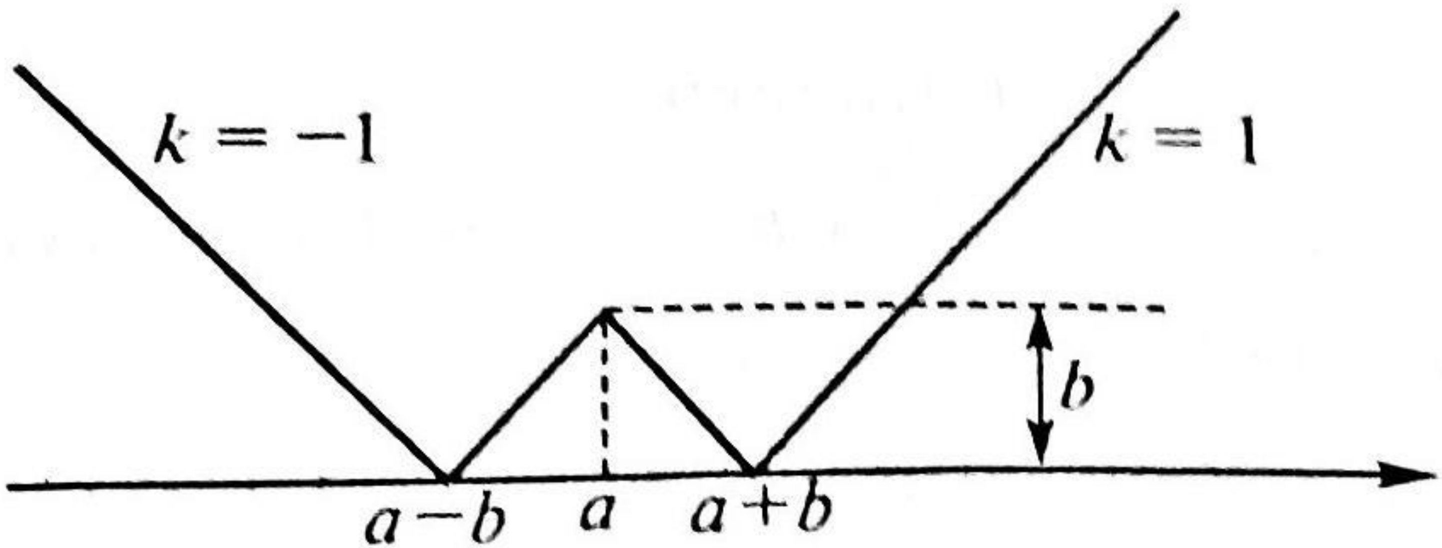


График функции

$$y = |x - a| + |x - b|, b > a$$

«корыто»

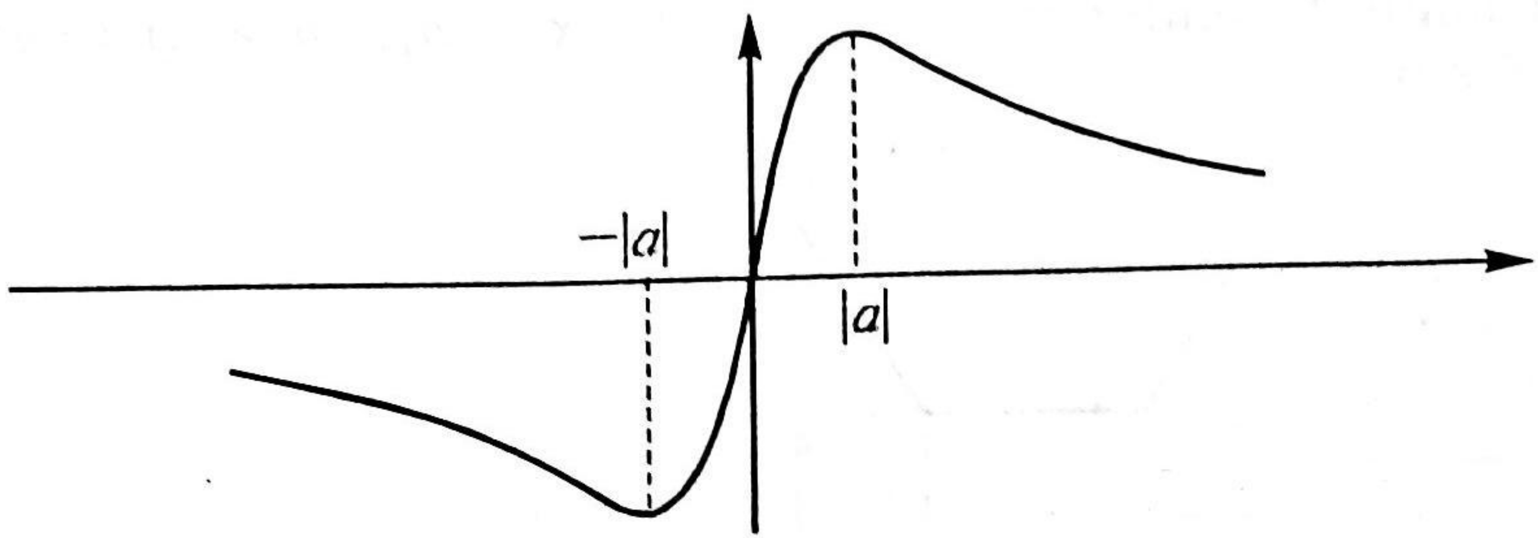


График функции
$y = |x - a| + |x - b|, b > a$
«корыто»

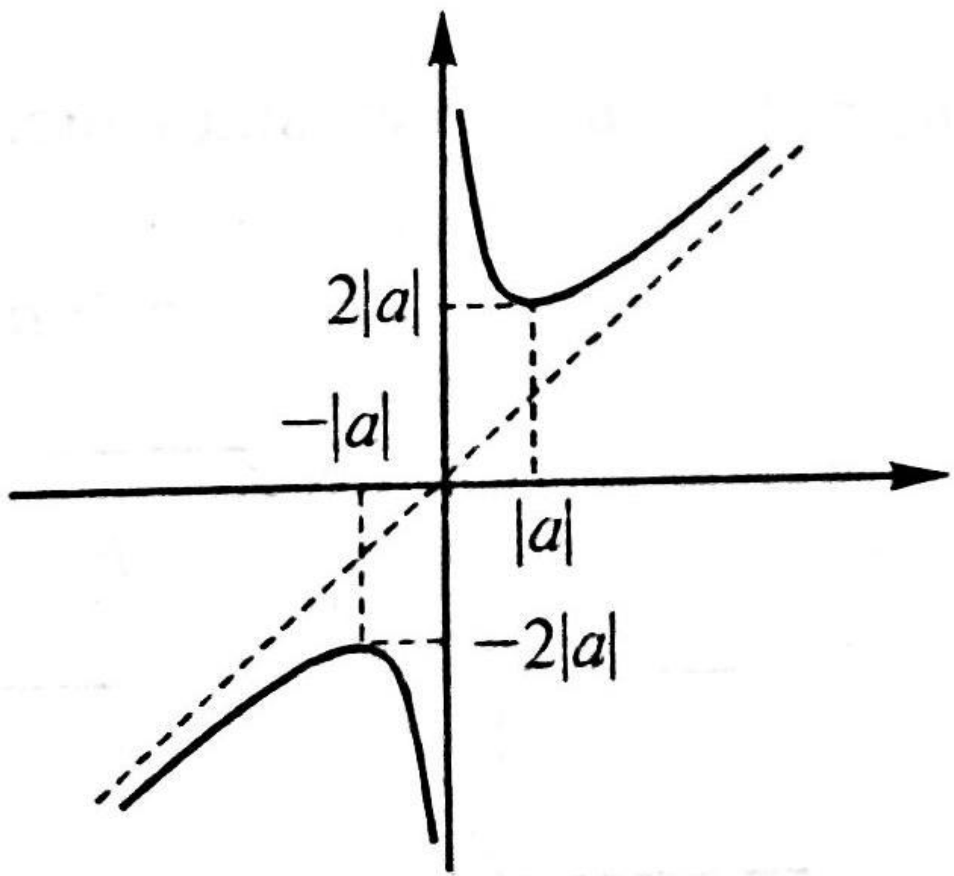
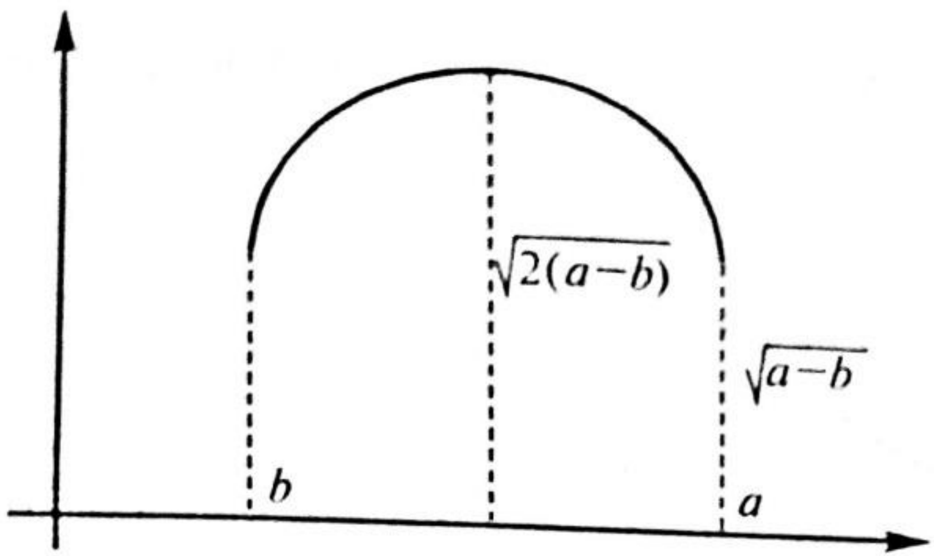


График функции $y = |x - a| + |x - b|, b > a$ «корыто»



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ЖЕЛАЮ ВАМ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ И ТВОРЧЕСКИХ УСПЕХОВ!