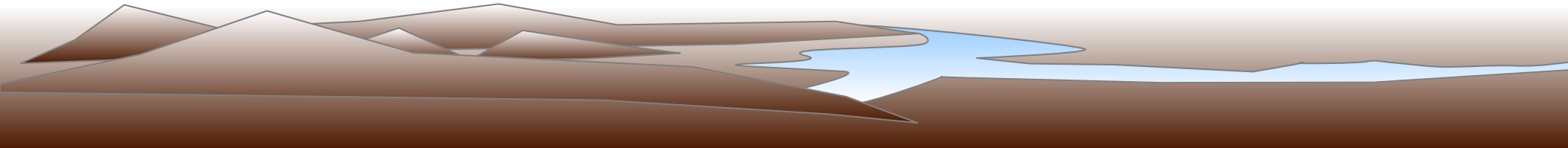


Двойственная задача

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max \quad Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq b_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \leq b_3 \\ x_i \geq 0, i = 1 \div n \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{31} y_3 \geq c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 \geq c_2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array} \right.$$



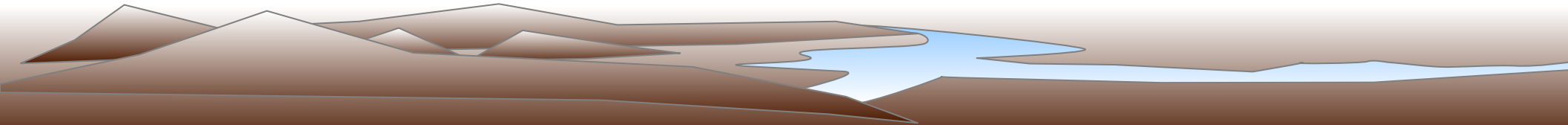
Каждой задаче линейного программирования
соответствует задача **двойственная / сопряженная**
по отношению к исходной задаче

b_i — запас ресурса S_i , a_{ij} — число единиц
потребляемого ресурса S_i при производстве
единицы продукции P_j

y_1, y_2, y_3 -цены на ресурсы

Затраты на закупку этих ресурсов должны быть
минимальными, т. е.:

$$Z(y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \rightarrow \min$$



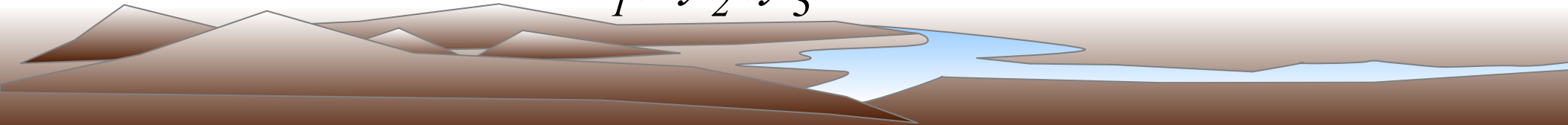
С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие могло получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление продукции P1 расходуется a_{11} ресурса S1, a_{21} ресурса S2, a_{31} ресурса S3.

Следовательно:

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2$$

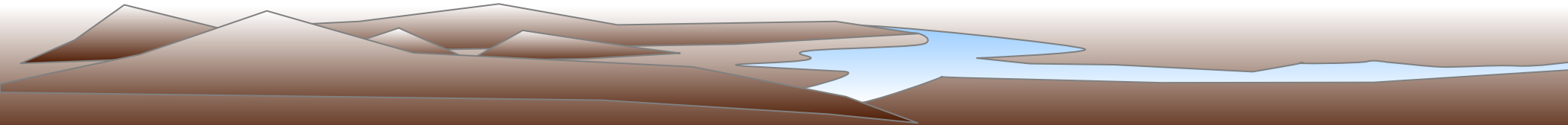
Цены на ресурсы величины не могут быть отрицательными, значит

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$



Формулировка двойственной задачи:

Найти такой набор оценок ресурсов, при которых общие затраты а ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее выручки с реализации этой продукции

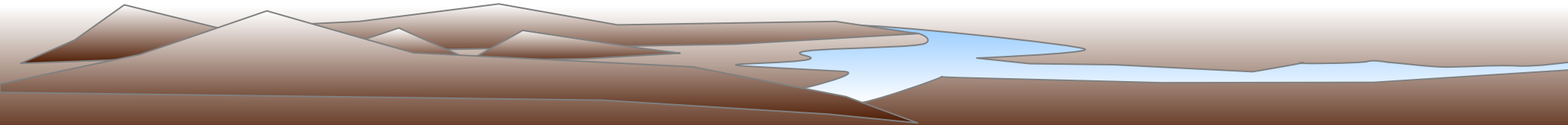


Свойства взаимно двойственных задач:

1. В одной задаче ищут максимум целевой функции, а в другой минимум.
2. Коэффициенты при переменных в целевой функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.
3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче на максимум все неравенства вида « $\leq$ », а в задаче на минимум — все неравенства вида « $\geq$ ».
4. Матрица коэффициентов при переменных в системах ограничений являются транспортированными друг к другу

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.



Пример решения задачи.

Составить двойственную задачу для заданной.

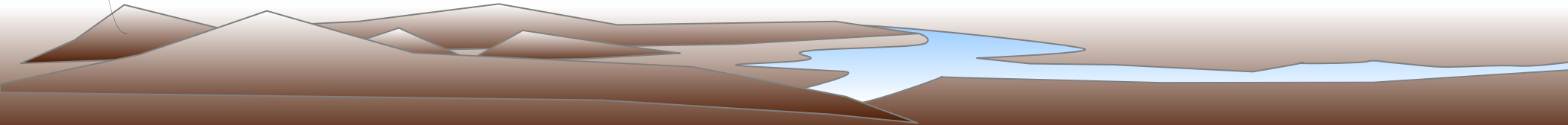
Дана целевая функция $f(x) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

И система ограничений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приведем систему неравенств к правильному виду (чтобы все знаки неравенств соответствовали задаче на максимум):

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 - x_2 \leq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Тогда взаимно двойственная задача для исходной
имеет вид:

$$\begin{cases} z(y) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \rightarrow \min \\ -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

