07.05.21.

Тема:
Перпендикуляр и наклонная к плоскости.
Теорема о трех перпендикулярах.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1423
https://infourok.ru/videouroki/1422
https://infourok.ru/videouroki/1428
https://infourok.ru/videouroki/1427

Теоретическая часть:

Прочитать.

Теоремы и определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

15 Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются **перпендикулярными** (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся. Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой.

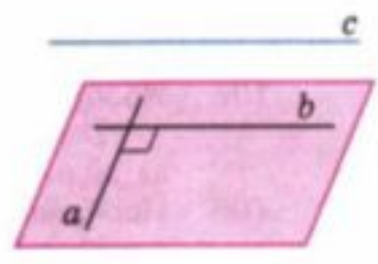


Рис. 43

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Доказательство

Пусть $a \parallel b$ и $a \perp c$. Докажем, что $b \perp c$. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведем прямые MA и MC, параллельные соответственно прямым a и c (рис. 44). Так как $a \perp c$, то $\angle AMC = 90°$.

По условию $b \parallel a$, а по построению $a \parallel MA$, поэтому $b \parallel MA$. Итак, прямые b и c параллельны соответственно прямым MA и MC, угол между которыми равен 90°. Это означает, что угол между прямыми b и c также равен 90°, т. е. $b \perp c$. Лемма доказана. △

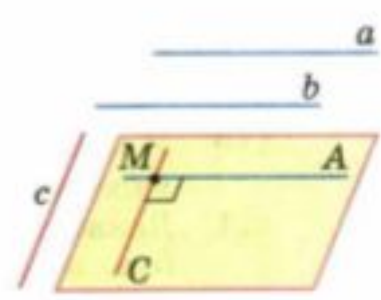


Рис. 44

16 Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Определение

Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$. Говорят также, что **плоскость α перпендикулярна к прямой a.**

Если прямая a перпендикулярна к плоскости α, то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая a не пересекала плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была бы параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой a, например прямые, параллельные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит, прямая a пересекает плоскость α.

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная к плоскости α.

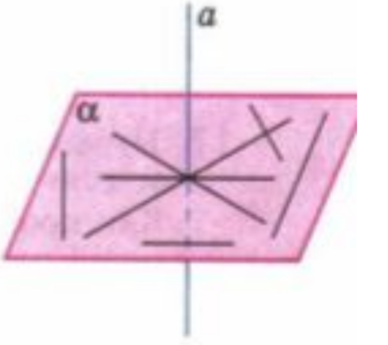


Рис. 45

Окружающая нас обстановка дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Непокосившийся телеграфный столб стоит прямо, т. е. перпендикулярно к плоскости земли. Так же расположены колонны здания по отношению к плоскости фундамента, линии пересечения стен по отношению к плоскости пола и т. д.

Докажем две теоремы, в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

Теорема

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

Рассмотрим две параллельные прямые a и a_1 и плоскость α, такую, что $a \perp \alpha$. Докажем, что и $a_1 \perp \alpha$.

Проведем какую-нибудь прямую x в плоскости α (рис. 46). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp x$. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей $a_1 \perp x$. Таким образом, прямая a_1 перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α, т. е. $a_1 \perp \alpha$. Теорема доказана.

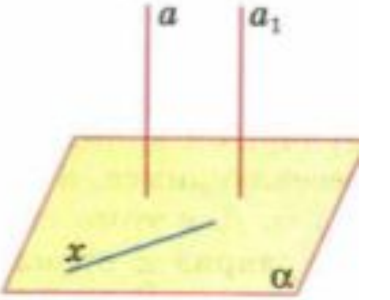


Рис. 46

Докажем обратную теорему.

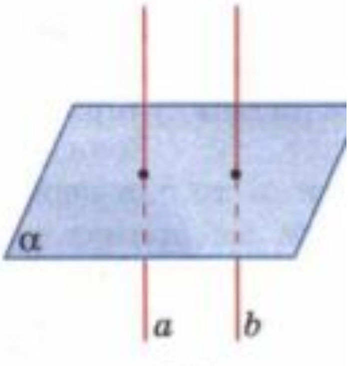
Теорема

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

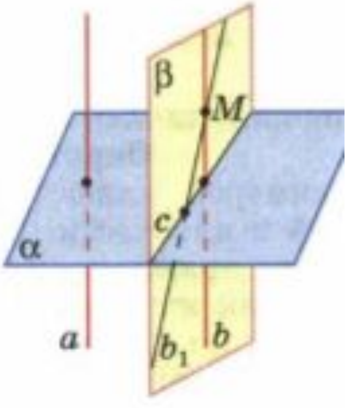
Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α (рис. 47, *а*). Докажем, что $a \parallel b$.

Через какую-нибудь точку M прямой b проведем прямую b_1, параллельную прямой a. По предыдущей теореме $b_1 \perp \alpha$. Докажем, что прямая b_1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые b и b_1 не совпадают. Тогда в плоскости β, содержащей прямые b и b_1, через точку M проходят две прямые, перпендикулярные к прямой c, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 47, *б*). Но это невозможно, следовательно, $a \parallel b$. Теорема доказана. △



а)



б)

Рис. 47

17 Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Как проверить, перпендикулярна ли данная прямая к данной плоскости? Этот вопрос имеет практическое значение, например, при установке мачт, колонн зданий и т. д., которые нужно поставить прямо, т. е. перпендикулярно к той плоскости, на которую они ставятся. Оказывается, что для этого нет надобности проверять перпендикулярность по отношению к любой прямой, как о том говорится в определении, а достаточно проверить перпендикулярность лишь к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости. Это вытекает из следующей теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Доказательство

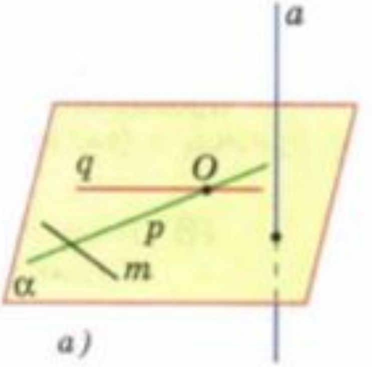
Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым p и q, лежащим в плоскости α и пересекающимся в точке O (рис. 48, *а*). Докажем, что $a \perp \alpha$. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости α.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 48, *б*). Проведем через точку O прямую l, параллельную прямой m (если прямая m проходит через точку O, то в качестве l возьмем саму прямую m). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведем в плоскости α прямую, пересекающую прямые p, q и l соответственно в точках P, Q и L. Будем считать для определенности, что точка Q лежит между точками P и L (рис. 48, *б*).

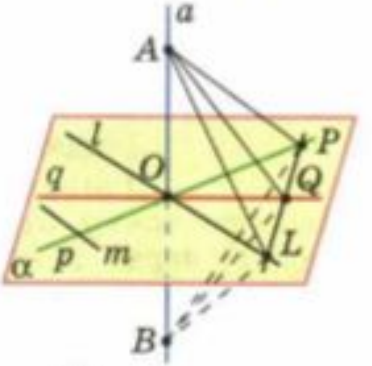
Так как прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезку AB, то $AP = BP$ и $AQ = BQ$. Следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трем сторонам. Поэтому $\angle APQ = \angle BPQ$.

Сравним треугольники APL и BPL. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($AP = BP$, PL — общая сторона, $\angle APL = \angle BPL$), поэтому $AL = BL$. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный и его медиана LO является высотой, т. е. $l \perp a$. Так как $l \parallel m$ и $l \perp a$, то $m \perp a$ (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая a перпендикулярна к любой прямой m плоскости α, т. е. $a \perp \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая a не проходит через точку O. Проведем через точку O прямую a_1, параллельную прямой a. По упомянутой лемме $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$, поэтому по доказанному в первом случае $a_1 \perp \alpha$. Отсюда (по первой теореме п. 16) следует, что $a \perp \alpha$. Теорема доказана.



а)



б)

Рис. 48

Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости для решения следующей задачи.

Задача

Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение

Обозначим данную прямую буквой a, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a.

Проведем через прямую a две плоскости α и β так, чтобы $M \in \alpha$ (рис. 49)*. В плоскости α через точку M проведем прямую p, перпендикулярную к прямой a, а в плоскости β через точку пересечения прямых p и a проведем прямую q, перпендикулярную к прямой a. Рассмотрим плоскость γ, проходящую через прямые p и q. Плоскость γ является искомой, так как прямая a перпендикулярна к двум пересекающимся прямым p и q этой плоскости.

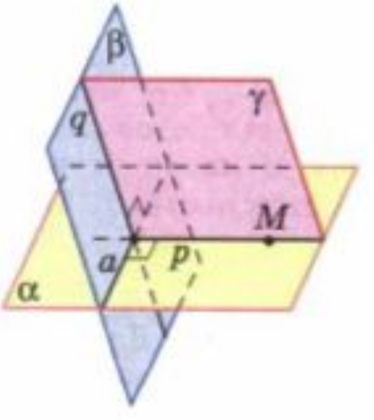


Рис. 49

---

* На рисунке 49 изображен тот случай, когда точка M не лежит на прямой a. Однако приведенное решение задачи пригодно и для того случая, когда точка M лежит на прямой a.

Замечание

Можно доказать, что γ — единственная плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой a (задача 133).

18 Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости

Теорема

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Доказательство

Данную плоскость обозначим α, а произвольную точку пространства — буквой M. Докажем, что: 1) через точку M проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α; 2) такая прямая только одна.

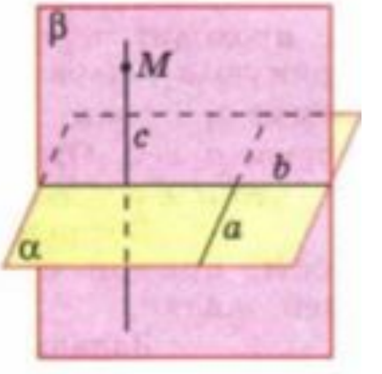


Рис. 50

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую a и рассмотрим плоскость β, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a (рис. 50). Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. В плоскости β через точку M проведем прямую c, перпендикулярную к прямой b. Прямая c и есть искомая прямая. В самом деле, она перпендикулярна к плоскости α, так как перпендикулярна к двум пересекающимся прямым этой плоскости ($c \perp b$ по построению и $c \perp a$, так как $\beta \perp a$).

2) Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая (обозначим ее через c_1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда (по обратной теореме п. 16) $c_1 \parallel c$, что невозможно, так как прямые c_1 и c пересекаются в точке M. Таким образом, через точку M проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α. Теорема доказана. △

19 Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку A прямую, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим буквой H точку пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 51). Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости** α, а точка H — **основанием перпендикуляра**. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку M, отличную от H, и проведем отрезок AM. Он называется **наклонной, проведенной из точки A к плоскости** α, а точка M — **основанием наклонной**. Отрезок HM называется **про-**

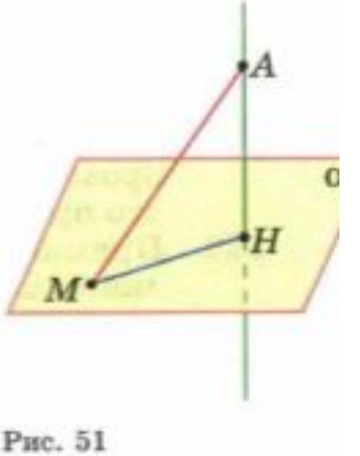


Рис. 51

екцией наклонной на плоскость α. Сравним перпендикуляр AH и наклонную AM: в прямоугольном треугольнике AMH сторона AH — катет, а сторона AM — гипотенуза, поэтому $AH < AM$. Итак, **перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости**.

Следовательно, из всех расстояний от точки A до различных точек плоскости α наименьшим является расстояние до точки H. Это расстояние, т. е. длина перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α, называется **расстоянием от точки A до плоскости** α. Когда мы говорим, что некоторый предмет, например лампочка уличного фонаря, находится на такой-то высоте, скажем 6 м от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведенному от лампочки к плоскости земли (рис. 52).

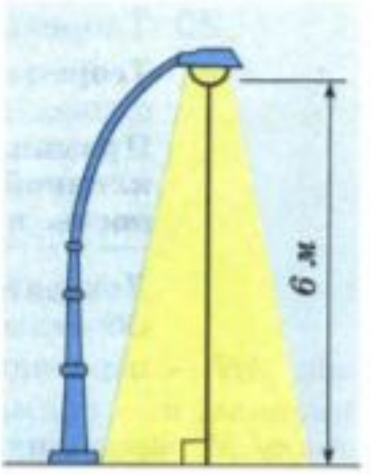


Рис. 52

Замечания

1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. В самом деле, рассмотрим перпендикуляры AA_0 и MM_0, проведенные из двух произвольных точек A и M плоскости α к параллельной ей плоскости β. Так как $AA_0 \perp \beta$ и $MM_0 \perp \beta$, то $AA_0 \parallel MM_0$. Отсюда следует, что $MM_0 = AA_0$ (свойство 2^0, п. 11), т. е. расстояние от любой точки M плоскости α до плоскости β равно длине отрезка AA_0. Очевидно, все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями**.

Как уже отмечалось, примером параллельных плоскостей служат плоскости пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Это расстояние и есть высота комнаты.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости (задача 144). В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью**.

3. Если две прямые скрещивающиеся, то, как было доказано в п. 7, через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми**.

20 Теорема о трех перпендикулярах

Теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Доказательство

Обратимся к рисунку 53, на котором отрезок AH — перпендикуляр к плоскости α, AM — наклонная, a — прямая, проведенная в плоскости α через точку M перпендикулярно к проекции HM наклонной. Докажем, что $a \perp AM$.

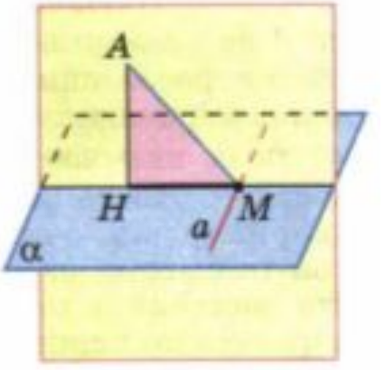


Рис. 53

Рассмотрим плоскость AMH. Прямая a перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AH и MH, лежащим в плоскости AMH ($a \perp HM$ по условию и $a \perp AH$, так как $AH \perp \alpha$). Отсюда следует, что прямая a перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости AMH, в частности $a \perp AM$. Теорема доказана.

Эта теорема называется **теоремой о трех перпендикулярах**, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами AH, HM и AM.

Справедлива также **обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.** По аналогии с доказательством прямой теоремы, используя рисунок 53, докажите эту теорему самостоятельно (задача 153).

21 Угол между прямой и плоскостью

В п. 19 было дано определение проекции наклонной на плоскость. Введем теперь понятие проекции* произвольной фигуры. **Проекцией точки на плоскость** называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 54 точка M_1 — проекция точки M на плоскость α, а N — проекция самой точки N на ту же плоскость ($N \in \alpha$).

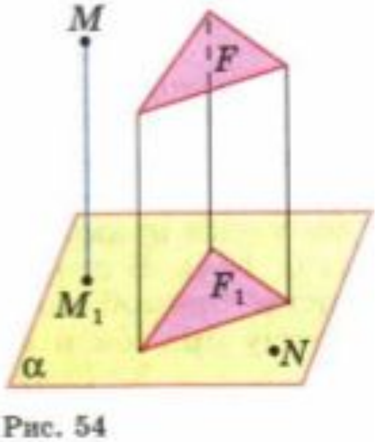


Рис. 54

Обозначим буквой F какую-нибудь фигуру в пространстве. Если мы построим проекции всех точек этой фигуры на данную плоскость, то получим фигуру F_1, которая называется **проекцией фигуры F на данную плоскость.** На рисунке 54 треугольник F_1 — проекция треугольника F на плоскость α.

Докажем теперь, что **проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.**

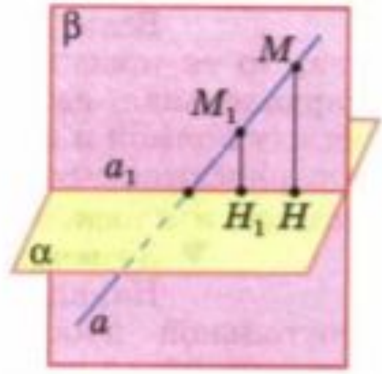


Рис. 55

Данную плоскость обозначим буквой α, а произвольную прямую, не перпендикулярную к плоскости α, — буквой a (рис. 55). Из какой-нибудь точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к плоскости α и рассмотрим плоскость β, проходящую через a и MH. Плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой a_1. Докажем, что эта прямая и является проекцией прямой a на плоскость α. В самом деле, возьмем произвольную точку M_1 прямой a и проведем в плоскости β прямую M_1H_1, параллельную прямой MH (H_1 — точка пересечения прямых M_1H_1 и a_1). По первой теореме п. 16 $M_1H_1 \perp \alpha$, и, значит, точка H_1 является проекцией точки M_1 на плоскость α. Мы доказали, что проекция произвольной точки прямой a лежит на прямой a_1. Аналогично доказывается, что любая точка прямой a_1 является проекцией некоторой точки прямой a. Следовательно, a_1 — проекция прямой a на плоскость α.

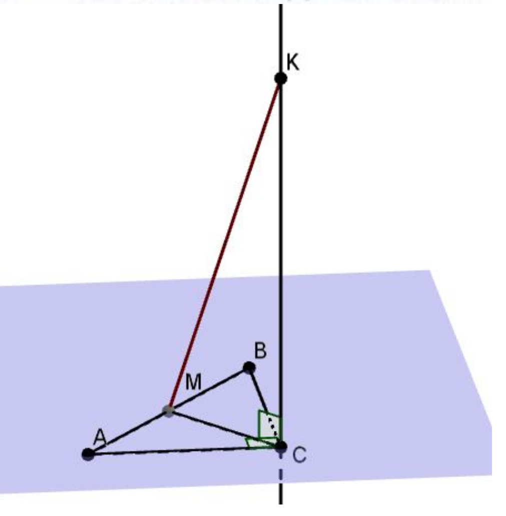
Из доказанного утверждения следует, что проекцией отрезка AB, не перпендикулярного к плоскости, является отрезок, концами которого служат проекции точек A и B. Поэтому определение проекции наклонной (п. 19) полностью согласуется с общим определением проекции фигуры. Используя понятие проекции прямой на плоскость, дадим определение угла между прямой и плоскостью.

Определение

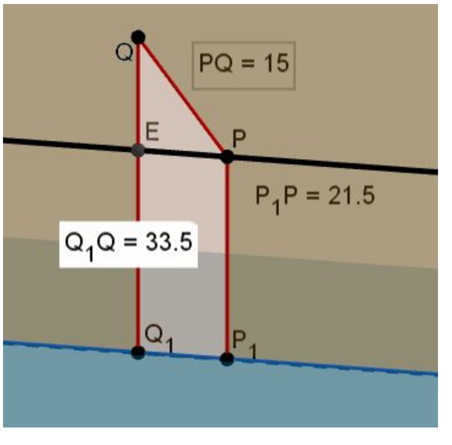
Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Практическая часть.

В треугольнике ABC дано: $\angle C = 90°$, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, CM — медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем $CK = 12$ см. Найдите KM.



Через точки P и Q прямой PQ проведены прямые, перпендикулярные к плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках P_1 и Q_1. Найдите P_1Q_1, если $PQ = 15$ см, $PP_1 = 21,5$ см, $QQ_1 = 33,5$ см.



Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две равные наклонные AB и AC. Известно, что $\angle OAB = \angle BAC = 60°$, $AO = 1,5$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.