24.05.21.

# Тема:
# Понятие вектора в пространстве. Действия над векторами. Координаты вектора. Вычисление координат вектора. Длина вектора.

*Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части*.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1442
https://infourok.ru/videouroki/1444
https://infourok.ru/videouroki/1446
https://infourok.ru/videouroki/1456
https://infourok.ru/videouroki/1467

**Теоретическая часть:**

Прочитать.

Теоремы и определения

(выделенное жирным шрифтом) – выучить.

## 38 Понятие вектора

В курсе планиметрии мы познакомились с векторами на плоскости и действиями над ними. Основные понятия для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой — концом, называется **вектором**. Направление вектора (от начала к концу) на рисунках отмечается стрелкой. Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**. Начало и конец нулевого вектора совпадают, и он не имеет какого-либо определенного направления. На рисунке 100, *а* изображены ненулевые векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ и нулевой вектор $\overrightarrow{TT}$, а на рисунке 100, *б* — ненулевые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, имеющие общее начало. Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$.

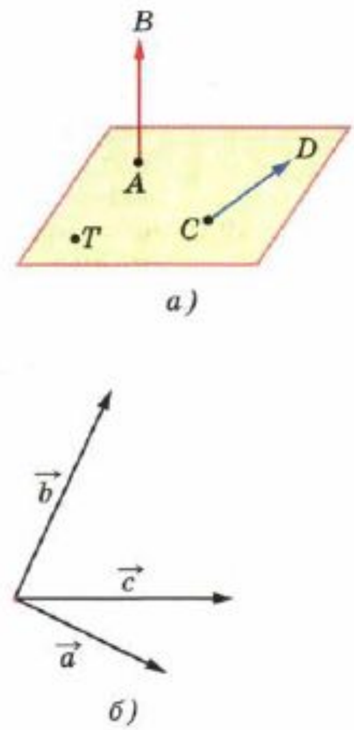


Рис. 100

**Длиной ненулевого вектора** $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $AB$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Два ненулевых вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если два ненулевых вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны и если при этом лучи $AB$ и $CD$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **сонаправленными**, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются **противоположно направленными**.

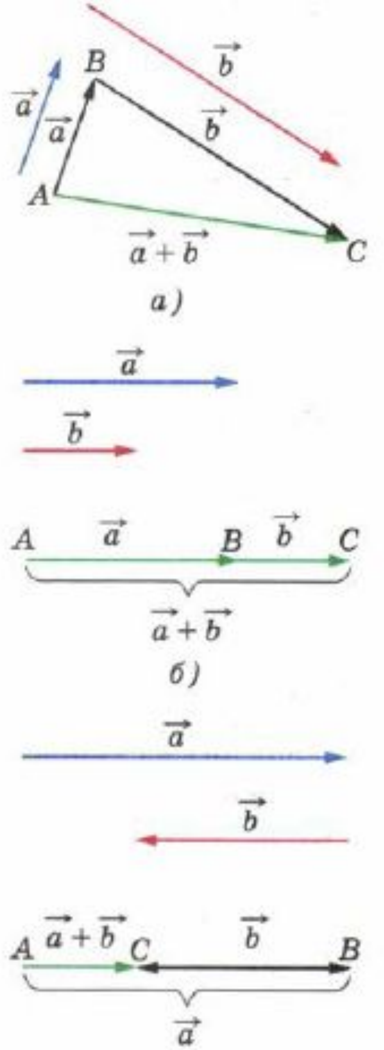
## 39 Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны. На рисунке 101 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DK}$, так как $\overrightarrow{AE} \upuparrows \overrightarrow{DK}$ и $|\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DK}|$, а $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$.

Если точка $A$ — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что вектор $\vec{a}$ **отложен** от точки $A$. Нетрудно доказать, что **от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.**

## 40 Сложение и вычитание векторов

Введем правило сложения двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 106). Затем от точки $B$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.




Это правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 106, *а* поясняет это название. Отметим, что по этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника. Рисунки 106, *б*, *в* иллюстрируют сложение коллинеарных векторов.

Точно так же, как в планиметрии, доказывается, что **сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки $A$, от которой при сложении откладывается вектор $\vec{a}$.** Иными словами, если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по правилу треугольника точку $A$ заменить другой точкой $A_1$, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 107). Докажите это утверждение самостоятельно.

Правило треугольника можно сформулировать в такой форме: **для любых трех точек $A$, $B$ и $C$ имеет место равенство**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.**
Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти по формуле

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}), \qquad (1)$$

### Умножение вектора на число

**Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k$ называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.**

Произведение вектора $\vec{a}$ на число $k$ обозначается так: $k\vec{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что **для любого числа $k$ и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.** Из этого определения следует также, что **произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.**

## Координаты вектора

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равна единице. Обозначим через $\vec{i}$ единичный вектор оси абсцисс, через $\vec{j}$ — единичный вектор оси ординат и через $\vec{k}$ — единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде**

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

**причем коэффициенты разложения $x$, $y$, $z$ определяются единственным образом.**

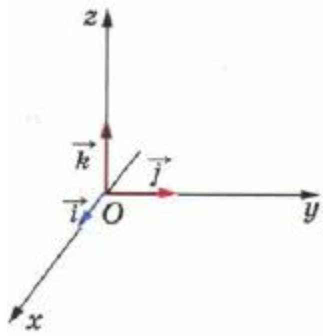


Рис. 124

Коэффициенты $x$, $y$ и $z$ в разложении вектора $\vec{a}$ по координатным векторам называются **координатами вектора $\vec{a}$ в данной системе координат**. Координаты вектора $\vec{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{a}\,\{x;\ y;\ z\}$. На рисунке 125 изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: $OA_1 = 2$, $OA_2 = 2$, $OA_3 = 4$. Координаты векторов, изображенных на этом рисунке, таковы: $\vec{a}\,\{2;\ 2;\ 4\}$, $\vec{b}\,\{2;\ 2;\ -1\}$, $\overrightarrow{A_3A}\,\{2;\ 2;\ 0\}$, $\vec{i}\,\{1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\,\{0;\ 1;\ 0\}$, $\vec{k}\,\{0;\ 0;\ 1\}$.

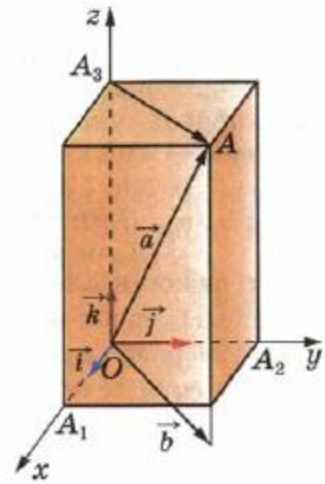


Рис. 125

$1^0$. **Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.** Другими словами, если $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

$2^0$. **Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.** Другими словами, если $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a} - \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2\}$.

$3^0$. **Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.** Другими словами, если $\vec{a}\,\{x;\ y;\ z\}$ — данный вектор, $\alpha$ — данное число, то вектор $\alpha\vec{a}$ имеет координаты $\{\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z\}$.

**Вычисление длины вектора по его координатам.** Докажем, что **длина вектора $\vec{a}$ $\{x; y; z\}$ вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (3)$$

Отложим на осях координат векторы $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = y\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = z\vec{k}$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{a}$ (рис. 129). Длина вектора $\overrightarrow{OA}$ выражается через длины векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ и $\overrightarrow{OA_3}$ следующим образом:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{|\overrightarrow{OA_1}|^2 + |\overrightarrow{OA_2}|^2 + |\overrightarrow{OA_3}|^2}. \qquad (4)$$

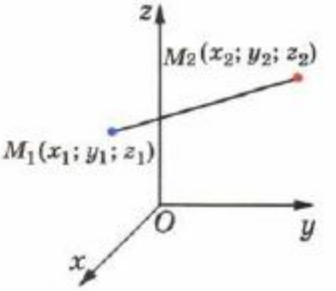


Рис. 130

В самом деле, если точка $A$ не лежит на координатных плоскостях (см. рис. 129), то равенство (4) справедливо в силу свойства диагонали прямоугольного параллелепипеда: $OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2$. Во всех других случаях расположения точки $A$ (точка $A$ лежит на координатной плоскости или на оси координат) равенство (4) также верно (рассмотрите эти случаи самостоятельно).

Так как $|\overrightarrow{OA_1}| = |x\vec{i}| = |x|$, $|\overrightarrow{OA_2}| = |y|$, $|\overrightarrow{OA_3}| = |z|$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, то из равенства (4) получаем формулу (3):

$$|\vec{a}| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**Расстояние между двумя точками.** Рассмотрим две произвольные точки: точку $M_1$ с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ и точку $M_2$ с координатами $(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 130). Выразим расстояние $d$ между точками $M_1$ и $M_2$ через их координаты.

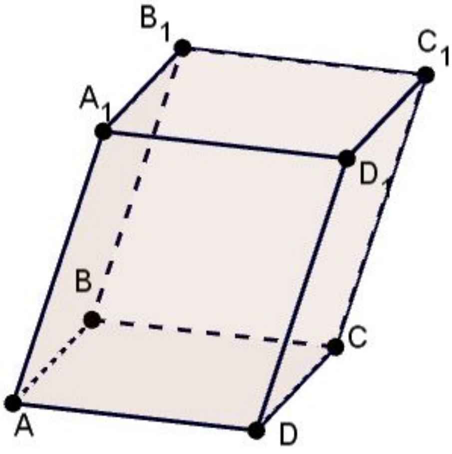
С этой целью рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$. По формуле (3) $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Но $d = |\overrightarrow{M_1M_2}|$. Таким образом, **расстояние между точками $M_1$ $(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2$ $(x_2; y_2; z_2)$ вычисляется по формуле**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

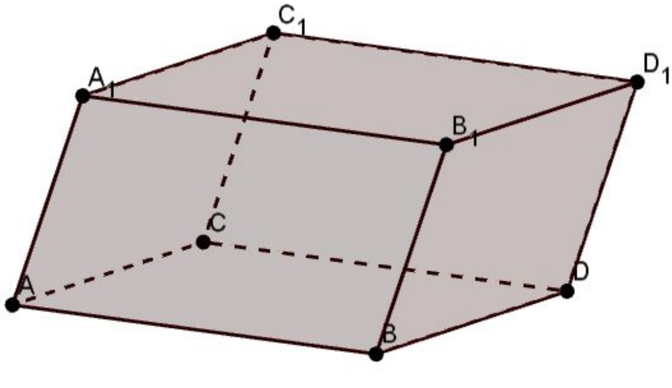
Практическая часть.

Задачи:

**327** На рисунке 104 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$; б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1}$; в) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{B_1B}$; г) $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$; д) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{BC}$.




**329** Назовите все векторы, образованные ребрами параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые: а) противоположны вектору $\overrightarrow{CB}$; б) противоположны вектору $\overrightarrow{B_1A}$; в) равны вектору $-\overrightarrow{DC}$; г) равны вектору $-\overrightarrow{A_1B_1}$.



407 Даны векторы $\vec{a}\,\{3; -5; 2\}$, $\vec{b}\,\{0; 7; -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3}; 0; 0\right\}$ и $\vec{d}\,\{-2{,}7; 3{,}1; 0{,}5\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{c}$; в) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{d}+\vec{b}$; д) $\vec{d}+\vec{a}$; е) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; ж) $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}$; з) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

427 Найдите длины векторов: $\vec{a}\,\{5; -1; 7\}$, $\vec{b}\,\{2\sqrt{3}; -6; 1\}$.