

# Лекция 16

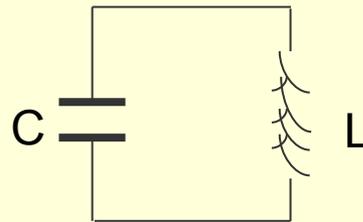
## 5. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

**Электромагнитные колебания.**

- 5.1. Электрический колебательный контур. Формула Томсона.
- 5.2. Свободные затухающие колебания. Добротность колебательного контура.
- 5.3. Вынужденные электрические колебания. Метод векторных диаграмм.
- 5.4. Резонансные явления в колебательном контуре. Резонанс напряжений и резонанс токов.

## 5.1. Электрический колебательный контур. Формула Томсона.

Электромагнитные колебания могут возникать в цепи, содержащей индуктивность  $L$  и емкость  $C$ . Такая цепь называется *колебательным контуром*. Возбудить колебания в таком контуре можно, например, предварительно зарядив конденсатор от внешнего источника напряжения, соединить его затем с катушкой индуктивности.



Поскольку внешнее напряжение к контуру не приложено, сумма падений напряжений на емкости и индуктивности должна быть равна нулю в любой момент времени:

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

откуда, учитывая, что сила тока *свободных незатухающих* колебательном контуре

, получаем дифференциальное уравнение *колебаний* электрического заряда в

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad .$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

то полученное уравнение принимает вид:

$$L \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Решением этого уравнения, как известно, является функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой  $\omega_0$ , называемой *собственной частотой* колебательного контура. *Период колебаний* определяется по **формуле Томсона** (Thomson W., 1824-1907):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

Напряжение на конденсаторе:

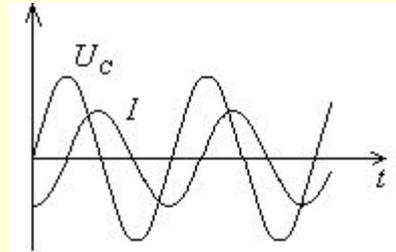
$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha) = U_m \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

где  $U_m = \frac{q_m}{C}$  - амплитуда напряжения.

Сила тока в контуре:

$$I = \dot{q} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \alpha) = I_m \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}).$$

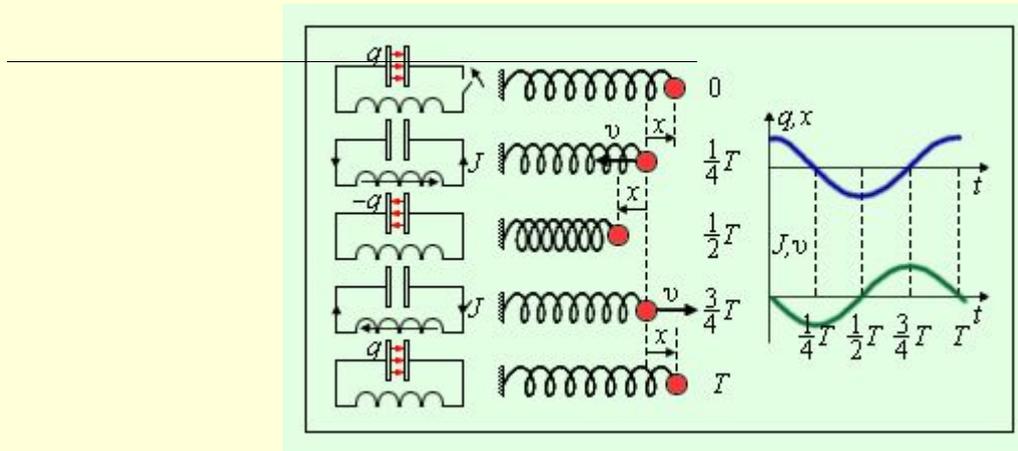
Сопоставляя полученные выражения, видим, что когда напряжение на конденсаторе, а значит энергия электрического поля, обращается в нуль, сила тока, а, следовательно, энергия магнитного поля, достигает максимального значения. Таким образом, электрические колебания в контуре сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.



Амплитуды тока  $I_m$  и напряжения  $U_m$  связаны между собой очевидным соотношением:

$$I_m = \omega_0 q_m = \omega_0 C U_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m .$$

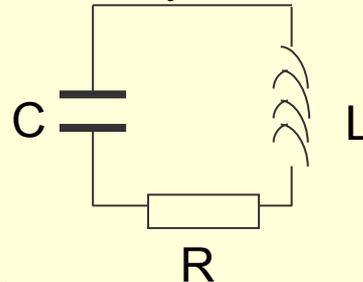
# Аналогия процессов свободных электрических и механических колебаний



Электрические величины		Механические величины	
Заряд конденсатора	$q(t)$	Координата	$x(t)$
Ток в цепи	$I = dq/dt$	Скорость	$v = dx/dt$
Индуктивность	$L$	Масса	$m$
Величина, обратная емкости	$1/C$	Жесткость	$k$
Напряжение на конденсаторе	$U = q/C$	Упругая сила	$kx$
Энергия электрического поля конденсатора	$q^2/(2C)$	Потенциальная энергия пружины	$kx^2/2$
Магнитная энергия катушки	$LI^2/2$	Кинетическая энергия	$mv^2/2$
Магнитный поток	$LI$	Импульс	$mv$

## 5.2. Свободные затухающие колебания. Добротность колебательного контура.

Всякий реальный колебательный контур обладает сопротивлением. Энергия электрических колебаний в таком контуре постепенно расходуется на нагревание сопротивления, переходя в джоулево тепло, вследствие чего колебания затухают.



Уравнение *свободных затухающих колебаний* можно получить, исходя из того, что в отсутствии внешнего источника напряжения, сумма падений напряжений на индуктивности, емкости и сопротивлении равна нулю для любого момента времени:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0$$

или, поскольку  $I = \dot{q}$ ,

Введя обозначение

$$\dot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

этому уравнению можно придать вид:

$$\dot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

где

$$\omega_0^2 = 1/LC$$

Решение полученного уравнения имеет вид:

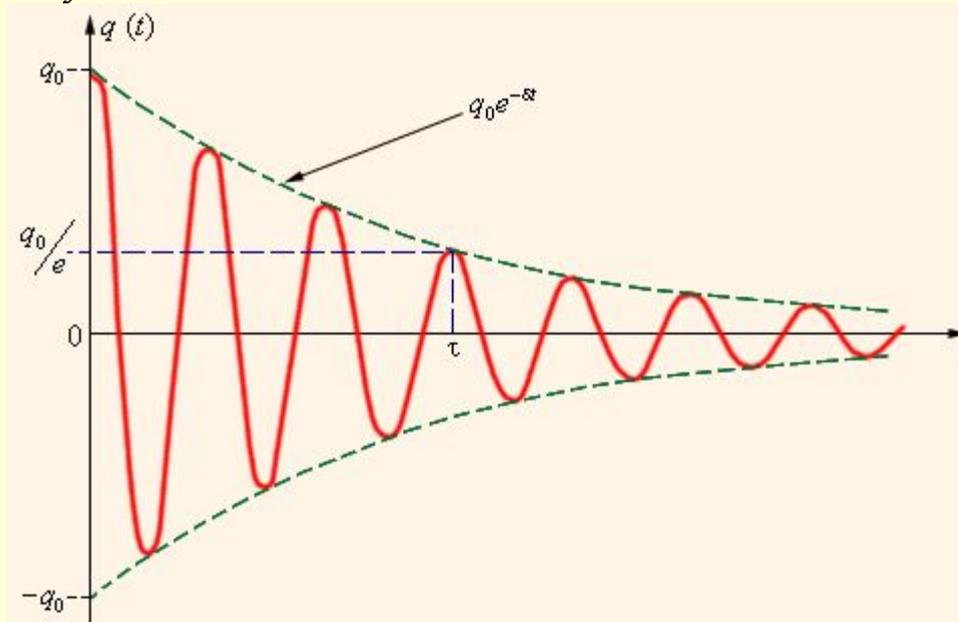
$$q = q_0(t) \cdot \cos(\omega' t + \varphi), \text{ где } q_0(t) = q_m \exp(-\beta t)$$

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Мы видим, что частота свободных затухающих колебаний  $\omega'$  *меньше* собственной частоты  $\omega_0$ . Подставив значения  $\omega_0$  и  $\beta$ , получим:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Амплитуда затухающих колебаний заряда конденсатора  $q_0(t)$  уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Коэффициент  $\beta$  называется *коэффициентом затухания*.



Затухание колебаний принято характеризовать *декрементом колебаний*  $\lambda$ , определяемым как:

$$\lambda = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \beta T .$$

Легко видеть, что декремент колебаний обратен по величине числу колебаний  $N_e$ , совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз:  $\lambda = 1/N_e$ . *Добротностью* колебательного контура называется величина:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e$$

Из этой формулы видно, что добротность тем *выше*, чем *меньше* коэффициент затухания  $\beta$ . При малых затуханиях ( $\lambda \ll 1$ ) можно приближенно считать, что

$$Q = \frac{\omega'}{2\beta} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} .$$

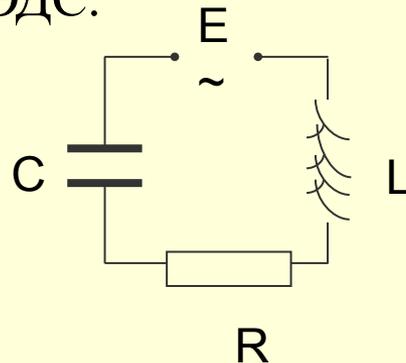
Амплитуда тока в контуре, как и заряд на конденсаторе, убывает со временем по закону  $e^{-\beta t}$ . Энергия  $W$ , запасенная в контуре, пропорциональна квадрату амплитуды тока (или квадрату напряжения на конденсаторе). Следовательно,  $W$  убывает со временем по закону  $e^{-2\beta t}$ . Относительное уменьшение энергии за период колебания  $T$  (при малом затухании) есть:

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{W(t) - W(t+T)}{W(t)} = 1 - e^{-2\beta T} \approx 2\beta T = \frac{2\pi}{Q} .$$

Таким образом, потери энергии в колебательном контуре тем *меньше*, чем *выше* его добротность.

## 5.3. Вынужденные электрические колебания. Метод векторных диаграмм.

Если в цепь электрического контура, содержащего емкость, индуктивность и сопротивление, включить источник переменной ЭДС, то в нем, наряду с *собственными затухающими колебаниями*, возникнут **незатухающие вынужденные колебания**. Частота этих колебаний *совпадает* с частотой изменения переменной ЭДС.



Чтобы получить уравнение **вынужденных колебаний**, надо, согласно второму правилу Кирхгофа, приравнять сумму падений напряжений на элементах контура приложенной ЭДС:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

или

$$L \ddot{\varphi} + R \dot{\varphi} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

где  $E_0$  - амплитуда переменной ЭДС,  $\omega$  - ее циклическая частота.

Интересующее нас частное решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$q(t) = q_0(\omega) \cdot \cos[\omega t - \psi(\omega)] \quad \text{где} \quad q_0(\omega) = \frac{E_0}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}},$$

$$\operatorname{tg} \psi(\omega) = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}$$

Решение соответствующего *однородного* уравнения, как мы видели в п.5.2, представляет собой свободные затухающие колебания, которые с течением времени становятся исчезающе малыми, и их можно в дальнейшем не учитывать.

Выпишем формулы для силы тока в цепи и падений напряжений на каждом из элементов контура.

Сила тока:

$$I(t) = \tilde{i}(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2})$$

$$I_0(\omega) = \omega q_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

По аналогии с законом Ома для полной цепи по постоянному току величину

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

называют *полным сопротивлением* цепи по переменному току. Эта величина представляет собой модуль комплексного сопротивления,

называемого также *импедансом* цепи. Сопротивление  $R$  называют **активным сопротивлением** (на нем выделяется тепло). Чисто мнимые сопротивления  $\omega L$  и  $\frac{1}{\omega C}$  называют соответственно **индуктивным** и **емкостным реактивными сопротивлениями** (на них тепло не выделяется).

## Напряжение на сопротивлении $R$ :

$$U_R(t) = RI(t) = U_{R0}(\omega) \cos(\omega t - \psi + \frac{\pi}{2}) \quad , \quad U_{R0}(\omega) = RI_0(\omega) = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} R \quad .$$

## Напряжение на конденсаторе $C$ :

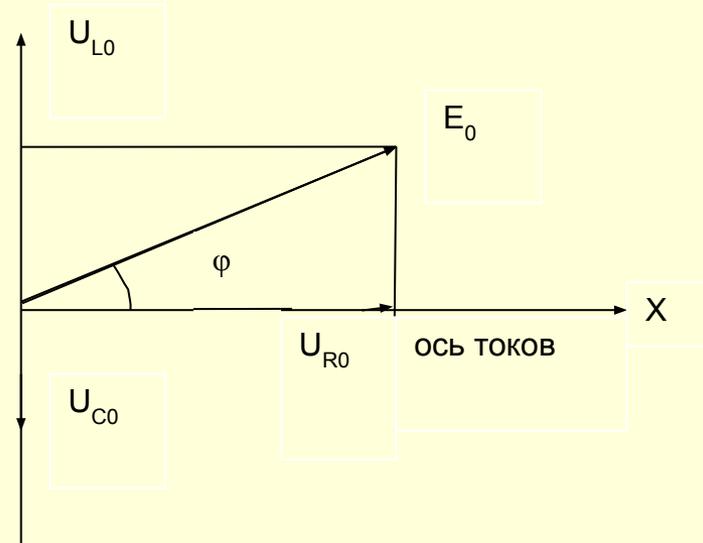
$$U_C(t) = \frac{q(t)}{C} = U_{C0}(\omega) \cos(\omega t - \psi) \quad , \quad U_{C0}(\omega) = \frac{q_0(\omega)}{C} = \frac{E_0}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad .$$

## Напряжение на катушке индуктивности $L$ :

$$U_L(t) = \dot{\Phi}(t)L = \dot{q}(t)L = U_{L0}(\omega) \cos(\omega t - \psi + \pi) \quad , \quad U_{L0}(\omega) = q_0(\omega)\omega^2 L = \frac{\omega L E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad .$$

Сравнивая написанные формулы, видим, что изменение напряжения на сопротивлении следует за изменением силы тока в цепи без *отставания* или *опережения* по фазе, изменение напряжения на конденсаторе *отстает* по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ , а на индуктивности *опережает* по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  изменение тока. Наглядно это можно изобразить с помощью **векторной диаграммы**, вещественная ось которой (ось X) совпадает с осью токов. Длина каждого вектора на этой диаграмме дает *амплитуду* соответствующего напряжения, а *угол*, который составляет данный вектор с осью токов – *сдвиг фазы* по отношению к изменению силы тока в цепи.

## Векторная диаграмма для последовательного RLC-контура.



Амплитуда *суммарного напряжения* на всех элементах контура, равная амплитуде  $E_0$  действующей в контуре ЭДС, является результатом векторного сложения символических напряжений  $\underline{U}_R$ ,  $\underline{U}_L$  и  $\underline{U}_C$ . Этот вектор образует с осью токов угол  $\varphi$ , показывающий разность фаз между током и ЭДС. Тангенс этого угла равен:  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \frac{\pi}{2})$

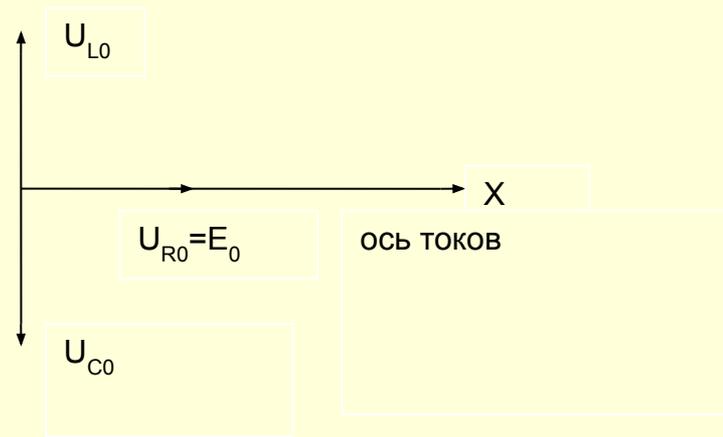
$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\psi - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

## 5.4. Резонансные явления в колебательном контуре. Резонанс напряжений и резонанс токов.

Как следует из приведенных формул, при частоте переменной ЭДС  $\omega$ , равной

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

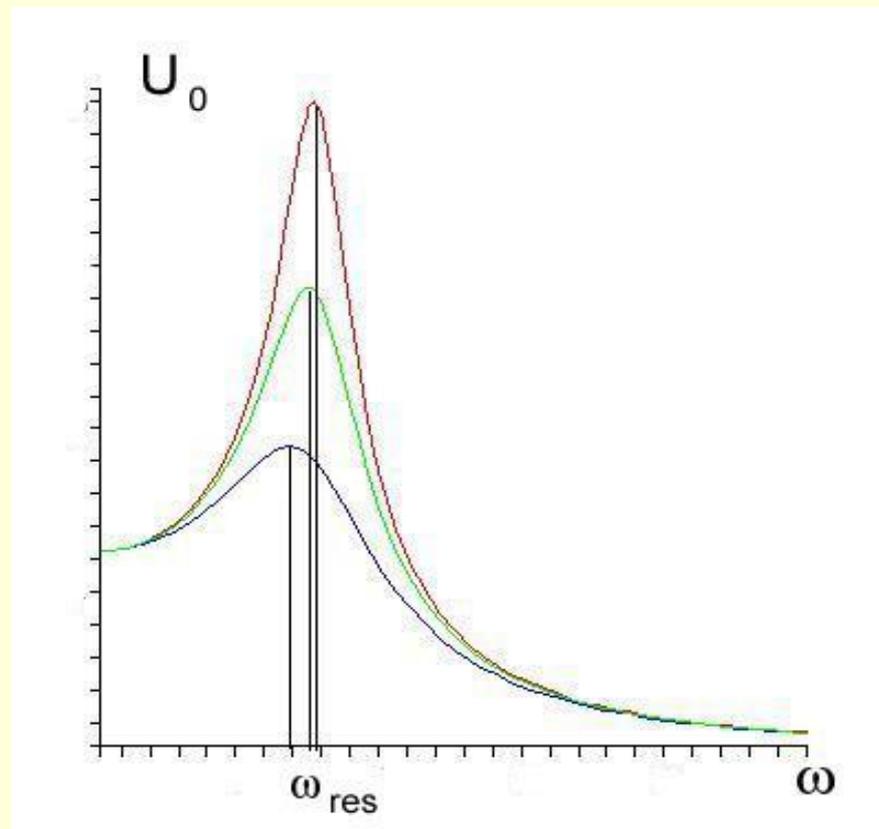
амплитудное значение *силы тока* в колебательном контуре, принимает *максимальное* значение  $I_{0max} = \frac{E_0}{R}$ . При этом *амплитуда напряжения* на *активном сопротивлении*  $R$  также *максимальна* и равна  $U_{R0} = I_{0max} R = E_0$ . *Падения напряжения* на емкости  $U_C$  и индуктивности  $U_L$  *одинаковы* по амплитуде, но *противоположны* по фазе, и они *взаимно компенсируют* друг друга. Это явление, имеющее место в *последовательном колебательном контуре*, называется **резонансом напряжений**. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, показана на рисунке.



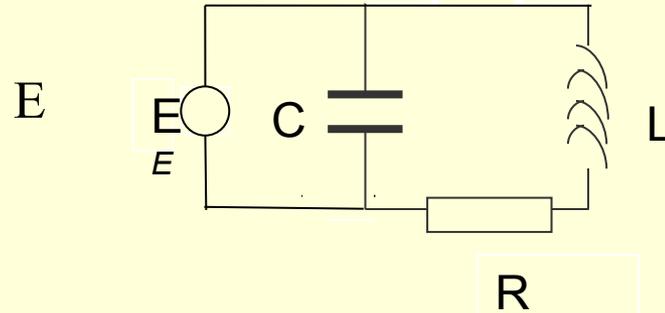
Максимальное значение амплитуды напряжения на конденсаторе  $U_{C0}(\omega)$  достигается при частоте

$$\omega_{\text{Срез}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leq \omega_0 .$$

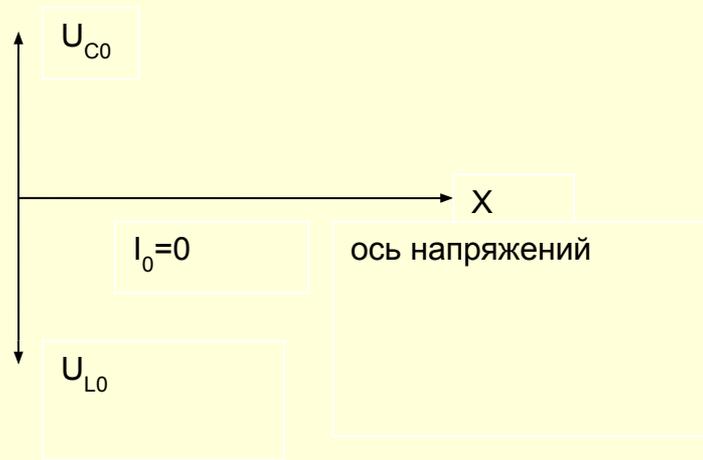
Резонансные кривые для  $U_{C0}(\omega)$  представлены на рисунке. Максимум получается тем *выше* и *острее*, чем *меньше* коэффициент затухания  $\beta$ , то есть чем *меньше* активное сопротивление  $R$  и *больше* индуктивность контура  $L$ .



Если источник переменной ЭДС подключить *параллельно* конденсатору, то получим колебательный контур, который называется *параллельным RLC-контуром*.



В таком контуре при  $\omega \approx \omega_0$  наблюдается другое резонансное явление, получившее название *резонанса токов*. При резонансе токов *токи*, текущие через емкость и индуктивность *одинаковы* по амплитуде, но *противоположны* по фазе. При этом *общий ток* в цепи ЭДС *близок к нулю*, хотя *токи* в самом контуре могут быть *очень велики*. Векторная диаграмма, соответствующая этому случаю, приведена на рисунке.



Можно показать, что при резонансе токов *полное сопротивление*  $Z(\omega)$  параллельного контура максимально и равно чисто *активному сопротивлению*  $R$ . Резонансная частота, при которой  $Z(\omega)$  максимально, определяется из условия равенства нулю реактивной части комплексного сопротивления :

$$\tilde{Z}(\omega) = \left[ \frac{1}{i\omega C} + \frac{1}{R + i\omega L} \right]^{-1}$$

$$\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega CR^2 = 0 ,$$

откуда

$$\omega'_{рез} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2} \leq \omega_0$$

Резонансные кривые для амплитудных значений  $I_{C0}(\omega)$  тока, текущего через конденсатор, приведены на рисунке.

Резонансные явления в колебательных контурах широко используются в электро- и радиотехнике (резонансные усилители, частотные фильтры и другие). В частности, явление резонанса используется для выделения из сложного сигнала нужной частотной составляющей. Настроив контур (путем изменения его параметров  $C$  и/или  $L$ ) на одну из выбранных частот, можно получить на конденсаторе напряжение, в  $Q$  раз *превышающее* величину напряжения данной частотной составляющей. Такой процесс осуществляется, например, при настройке радиоприемника на нужную длину волны.

